ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques dans un domaine non borné

par J. Chabrowski (Katowice)

Dans ce travail nous considérons deux systèmes non linéaires d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$(0.1)\qquad u_t^i \leqslant F^i(t, x, U, u_x^i, u_{xx}^i) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$(0.2)\qquad u_t^i \geqslant F^i(t, x, U, u_x^i, u_{xx}^i) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

où l'on a posé

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad U = (u^1, \ldots, u^m),$$

$$u_x^i = (u_{x_1}^i, \ldots, u_{x_n}^i), \qquad u_{xx}^i = (u_{x_1x_1}^i, u_{x_2x_2}^i, \ldots, u_{x_nx_n}^i).$$

Nous montrerons que pour deux suite de fonctions $u^i(t, x)$, $v^i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ satisfaisant aux systèmes d'inégalités (0.1) et (0.2) respectivement à l'intérieur d'un ensemble non borné D (cf. définition 1), on a $u^i \leqslant v^i$, si les fonctions F^i sont elliptiques (cf. définition 4) par rapport à la suite $u^j(t, x)$, satisfont à une condition de monotonie (cf. définition 5), à une condition de Lipschitz (cf. hypothèse 2°) et les fonctions u^i, v^i appartiennent à la classe $\bar{E}_A$ et $\underline{E}_A$ respectivement (cf. définition 2) ainsi que vérifient l'inégalité $u^i \leqslant v^i$ sur la frontière ∂D.

La classe E_A a été introduite par Smirnova [3]. Ces inégalités différentielles ont été traitées par Besala [1] et Bodanko [2] dans les classes E_2 et E_{2a} qui sont les cas particuliers de E_A. Ensuite nous considérons les inégalités (0.1) et (0.2) dans la classe de fonctions convergeant vers zéro, lorsque $|x| \to \infty$. Comme conclusions nous obtiendrons les théorèmes de l'unicité de la solution du problème aux limites pour le système de la forme (3.1).

§ 1. D'abord nous introduisons des définitions et des notations.

Définition 1. Nous désignons par D un ensemble dans l'espace-temps $(t, x_1, \ldots, x_n)$, contenu entre les plans $t = t_0$, $t = t_0 + T \leqslant \infty$ et la surface latérale S, $\partial D = [D \cap (t = t_0)] \cup S$. Nous admettons que pour chaque t_1, $t_0 \leqslant t_1 < t_0 + T$, l'intersection σ_{t_1} de la fermeture de D avec le plan $t = t_1$ est non vide et non bornée. Pour chaque t_1, σ_{t_1} est identique avec l'intersection de cette partie de la fermeture de D, qui est contenue dans la couche $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

DÉFINITION 2. Nous disons qu'une *fonction* $f(t, x)$ *est de classe* $\bar{E}_A$ (ou bien *de classe* $\underline{E}_A$) *dans un domaine* D, s'il existe des constantes positives K, M et une fonction $A(y)$ de classe C^1, telles que

$$f(t, x) \leqslant M \exp\left[K\left(\int_1^{r_1} \frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\right)^2\right] \quad \left(-M \exp\left[K\left(\int_1^{r_1} \frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\right)^2\right] \leqslant f(t, x)\right),$$

où $r_1^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 = |x|^2 + 2$ et la fonction $A(y)$ vérifie les conditions suivantes:

(a) $A(y) > 0$ pour $y \geqslant 1$, (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{A(y)}} = \infty$,

(c) $\displaystyle\sqrt{A(r_1)} \leqslant M_1 r_1 \int_1^{r_1} \frac{dy}{\sqrt{A(y)}}$, (d) $\displaystyle\left|\frac{d}{dr_1}\sqrt{A(r_1)}\right| \leqslant M_2 \int_1^{r_1} \frac{dy}{\sqrt{A(y)}}$

(M_1 et M_2 sont des constantes positives). Posons $E_A = \underline{E}_A \cap \bar{E}_A$.

DÉFINITION 3. Nous disons que la fonctions $\varphi(t, x)$ est *régulière* dans $\bar{D}$, si elle admet des dérivées $\varphi_{x_i}, \varphi_{x_i x_j}, \varphi_t$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ continues dans D et si elle continue dans $\bar{D}$.

Nous allons utiliser la définition donnée par J. Szarski (voir [4] et [5]).

DÉFINITION 4. La fonction $F^i(t, x, Z, Q, R)$, où $Z = (z^1, \ldots, z^m)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $R = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn})$, définie pour $(t, x) \in D$; Z, Q, R arbitraire, est dite *elliptique* par rapport à une suite de fonctions $u^j(t, x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ de classe C^1 dans D, lorsque pour toute suite de nombres $r_{jk}, \bar{r}_{jk}$ $(j, k = 1, \ldots, m)$, où $r_{jk} = r_{kj}$, $\bar{r}_{jk} = \bar{r}_{kj}$, telle que la forme quadratique

$$\sum_{j,k=1}^{n} (r_{jk} - \bar{r}_{jk}) \lambda_j \lambda_k$$

est non positive, on a l'inégalité

$$F^i\big(t, x, U(t, x), u_x^i(t, x), R\big) \leqslant F^i\big(t, x, U(t, x), u_x^i(t, x), \bar{R}\big)$$

pour $(t, x) \in D$.

DÉFINITION 5. Nous disons que la suite de fonctions $F^i(t, x, Z, Q, R)$ satisfait à la condition W, lorsque l'indice i_0 étant fixé arbitrairement les relations $z^j \leqslant \bar{z}^j$ $(j \neq i_0)$, $z^{i_0} = \bar{z}^{i_0}$ impliquent l'inégalité

$$F^{i_0}(t, x, Z, Q, R) \leqslant F^{i_0}(t, x, \bar{Z}, Q, R)\,.$$

§ 2. Les définitions du paragraphe 1 étant adoptées, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Nous supposons que*

1° *Les fonctions* $F^i(t, x, Z, Q, R)$ *sont définies pour* $(t, x) \in D$ *et* Z, Q, R *arbitraires et satisfont à la condition* W (cf. définition 5).

2° $$[F^i(t,x,Z,Q,R)-F^i(t,x,\bar{Z},\bar{Q},\bar{R})]\operatorname{sgn}(z^i-\bar{z}^i) \leqslant L_1 A(r_1)\sum_{j,k=1}^{n}|r_{jk}-\bar{r}_{jk}|+$$

$$+L_2\sqrt{A(r_1)}\int_1^{r_1}\frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\sum_{i=1}^{n}|q_i-\bar{q}_i|+L_3\left[\int_1^{r_1}\frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\right]^2\sum_{i=1}^{m}|z^i-\bar{z}^i| \quad (i=1,\ldots,m),$$

où L_1, L_2, L_3 *sont des constantes positives* (*nous admettons que* $\operatorname{sgn} 0 = 1$).

3° *Les fonctions* $u^i(t, x)$, $v^i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ *sont régulières, de classe* $\bar{E}_A$ *et* $\underline{E}_A$ *dans* D *respectivement* (cf. définition 2).

4° *Pour chaque indice* i *la fonction* F^i *est elliptique par rapport à la suite* $u^j(t, x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ (cf. définition 4).

5° *Les inégalités différentielles*

$$u_t^i \leqslant F^i(t, x, U, u_x^i, u_{xx}^i)\,,$$

$$v_t^i \geqslant F^i(t, x, V, v_x^i, v_{xx}^i) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

sont remplies en tout point $(t, x) \in \bar{D} - \partial D$.

6° $u^i(t, x) \leqslant v^i(t, x)$ *pour* $(t, x) \in \partial D$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Dans toutes ces hypothèses les inégalités

$$u^i(t, x) \leqslant v^i(t, x) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.1}$$

ont lieu dans $\bar{D}$.

Démonstration. Nous introduisons une fonction auxiliare des variables t, x et du paramètre ν de la forme suivante:

$$H(t, x) = \exp\left\{(K+1)\left[\int_1^{r_1}\frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\right]^2 e^{\nu(t-t_0)}\right\}.$$

Posons

$$(2.2)\quad F(H)=L_1A(r_1)\sum_{i,j=1}^{n}|H_{x_ix_j}|+L_2\sqrt{A(r_1)}\int_1^{r_1}\frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\sum_{i=1}^{n}|H_{x_i}|+ \\ +L_3m\left[\int_1^{r_1}\frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\right]^2H-H_t\,.$$

Puisque $r_1-1\geqslant\sqrt{2}-1$, nous pouvons supposer que $\int_1^{r_1}dy/\sqrt{A(y)}\geqslant 1$. En utilisant la définition 2 on peut vérifier par un calcul simple que la fonction $H(t,x)$ satisfait à l'inégalité

$$F(H)\leqslant L_1[4(K+1)n^2e^{\nu(t-t_0)}+2n^2(K+1)+4n^2(K+1)M_1+ \\ +2n^2(K+1)M_2]\left[\int_1^{r_1}\frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\right]^2e^{\nu(t-t_0)}H+2L_2(K+1)e^{\nu(t-t_0)}n\left[\int_1^{r_1}\frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\right]^2H+ \\ +L_3m\left[\int_1^{r_1}\frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\right]^2He^{\nu(t-t_0)}-\nu e^{\nu(t-t_0)}\left[\int_1^{r_1}\frac{dy}{\sqrt{A(y)}}\right]^2H\,.$$

Désignons par D_r l'ensemble ouvert séparé de D par la surface $\Omega_r=\{(t,x),\sum_{i=1}^{n}x_i^2=r^2\}$, par S_r la surface latérale de D_r, $\partial D_r=S_r\cup [D_r\cap(t=t_0)]$, par D^{T_1}, $D_r^{T_1}$, $\partial D_r^{T_1}$, $S_r^{T_1}$ les parties des ensembles D, D_r, ∂D_r, S_r situées dans la couche $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T_1$. Nous choisissons un nombre ν dépendant de K, n, M_1, M_2, L_1, L_2, L_3 de façon que

$$(2.3)\qquad F(H)<0\quad \text{pour } (t,x)\in D^{1/\nu}\,.$$

Nous montrerons que les inégalités (2.1) sont valables dans $D^{1/\nu}$. Dans ce but posons

$$(2.4)\qquad u^i=\bar u^iH\,,\qquad v^i=\bar v^iH\,.$$

Les inégalités (2.1) dans $D^{1/\nu}$ sont évidemment équivalentes aux inégalités

$$(2.5)\qquad \bar u^i\leqslant\bar v^i\quad \text{pour } (t,x)\in D^{1/\nu}\,.$$

Selon l'hypothèse 3° la différence u^i-v^i appartient à la classe $\bar E_A$, donc il résulte de la définition 2 (la condition (b)) que pour chaque $\varepsilon>0$ il existe un nombre R_0 assez grand, tel que pour chaque $r\geqslant R_0$ et pour $(t,x)\in\bar D^{1/\nu}-D_r^{1/\nu}$ on a

$$(2.6)\qquad \bar u^i-\bar v^i\leqslant\varepsilon\,.$$

Nous montrerons que les inégalités (2.6) sont remplies dans $D_r^{1/r}$ pour $r \geqslant R_0$. Dans le cas contraire il existe un point $(t^*, x^*) \in D_r^{1/r}$ et un index j tels que

$$\varepsilon < \bar{u}^j(t^*, x^*) - \bar{v}^j(t^*, x^*) = \max_l \{\max_{\bar{D}_r^{1/r}} [\bar{u}^l(t, x) - \bar{v}^l(t, x)]\} .$$

D'après l'inégalité (2.6) le point (t^*, x^*) est un point intérieur de $D_r^{1/r}$, donc

$$\bar{u}_t^j(t^*, x^*) - \bar{v}_t^j(t^*, x^*) \geqslant 0 , \qquad \bar{u}_{x_k}^j(t^*, x^*) = \bar{v}_{x_k}^j(t^*, x^*) \qquad (k = 1, \ldots, n) ,$$

$$\sum_{l,k=1}^{n} [\bar{u}_{x_k x_l}^j(t^*, x^*) - \bar{v}_{x_k x_l}^j(t^*, x^*)] \lambda_l \lambda_k \leqslant 0$$

pour tout système $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Posons encore

$$Q^{\bar{u}} = \{\bar{u}_{x_k}^j(t^*, x^*) H(t^*, x^*) + \bar{u}^j(t^*, x^*) H_{x_k}(t^*, x^*)\}_{k=1}^n ,$$

$$Q^{\bar{v}} = \{\bar{v}_{x_k}^j(t^*, x^*) H(t^*, x^*) + \bar{v}^j(t^*, x^*) H_{x_k}(t^*, x^*)\}_{k=1}^n ,$$

$$R^{\bar{u}} = \{\bar{u}_{x_l x_k}^j(t^*, x^*) H(t^*, x^*) + \bar{u}_{x_l}^j(t^*, x^*) H_{x_k}(t^*, x^*) + \\ + \bar{u}_{x_k}^j(t^*, x^*) H_{x_l}(t^*, x^*) + \bar{u}^j(t^*, x^*) H_{x_l x_k}(t^*, x^*)\}_{l,k=1}^n ,$$

$$R^{\bar{v}} = \{\bar{v}_{x_l x_k}^j(t^*, x^*) H(t^*, x^*) + \bar{v}_{x_l}^j(t^*, x^*) H_{x_k}(t^*, x^*) + \\ + \bar{v}_{x_k}^j(t^*, x^*) H_{x_l}(t^*, x^*) + \bar{v}^j(t^*, x^*) H_{x_l x_k}(t^*, x^*)\}_{l,k=1}^n ,$$

$$R^{\bar{v}\bar{u}} = \{\bar{v}_{x_l x_k}(t^*, x^*) H(t^*, x^*) + \bar{u}_{x_l}^j(t^*, x^*) H_{x_k}(t^*, x^*) + \\ + \bar{u}_{x_k}^j(t^*, x^*) H_{x_l}(t^*, x^*) + \bar{u}^j(t^*, x^*) H_{x_k x_l}(t^*, x^*)\}_{l,k=1}^n$$

$$W(t^*, x^*) = w^l(t^*, x^*) \qquad (l = 1, \ldots, m) , \\ w^l(t^*, x^*) = \max[\bar{u}^l(t^*, x^*), \bar{v}^l(t^*, x^*)] .$$

D'après 2° nous avons

$$(2.7) \qquad [\bar{u}_t^j(t^*, x^*) - \bar{v}_t^j(t^*, x^*)] H(t^*, x^*) + [\bar{u}^j(t^*, x^*) - \bar{v}^j(t^*, x^*)] H_t(t^*, x^*) \\ \leqslant \big[F^j\big(t^*, x^*, \bar{U}(t^*, x^*) H(t^*, x^*), Q^{\bar{u}}, R^{\bar{u}}\big) - \\ - F^j\big(t^*, x^*, \bar{U}(t^*, x^*) H(t^*, x^*), Q^{\bar{u}}, R^{\bar{v}\bar{u}}\big)\big] + \\ + \big[F^j\big(t^*, x^*, \bar{U}(t^*, x^*) H(t^*, x^*), Q^{\bar{u}}, R^{\bar{v}\bar{u}}\big) -$$

$$-F^j\big(t^*, x^*, W(t^*, x^*)H(t^*, x^*), Q^{\bar u}, R^{\bar v\bar u}\big)\big]+$$
$$+\big[F^j\big(t^*, x^*, W(t^*, x^*)H(t^*, x^*), Q^{\bar u}, R^{\bar v\bar u}\big)-$$
$$-F^j\big(t^*, x^*, \bar V(t^*, x^*)H(t^*, x^*), Q^{\bar v}, R^{\bar v}\big)\big]\,.$$

Selon 4° la première différence du second membre de cette inégalité est non positive, en vertu de l'hypothèse 1° la deuxième différence est aussi non positive. D'autre part, nous avons

$$(2.8)\qquad |w^l(t^*, x^*)-v^l(t^*, x^*)| = w^l(t^*, x^*)-\bar v^l(t^*, x^*)$$
$$\leqslant \max\big(0, \bar u^l(t^*, x^*)-\bar v^l(t^*, x^*)\big) \leqslant \bar u^j(t^*, x^*)-\bar v^j(t^*, x^*)$$

pour $l = 1, \ldots, m$, donc d'après la définition de $F(H)$, l'hypothèse 2° et (2.3) l'inégalité (2.7) peut être écrite sous la forme

$$[\bar u_t^j(t^*, x^*)-\bar v_t^j(t^*, x^*)]H(t^*, x^*) \leqslant F(H)[\bar u^j(t^*, x^*)-\bar v^j(t^*, x^*)] < 0$$

ce qui est impossible. Pour démontrer les inégalités (2.1) dans un point arbitraire $(t, x) \in D$ on divise le domaine D en domaines partiels par les plans $t = t_0+s\frac{1}{\nu}$ $(s = 1, \ldots, n_1)$ et on établit de proche en proche ces inégalités dans ces domaines.

Exemple. La fonction $A(r_1) = r_1^{2-\lambda}$ $(\lambda \geqslant 0)$ satisfait aux conditions de la définition 2. Pour $\lambda > 0$ l'hypothèse 2° prend la forme

$$[F^i(t, x, Z, Q, R)-F^i(t, x, \bar Z, \bar Q, \bar R)]\operatorname{sgn}(z^i-\bar z^i)$$
$$\leqslant L_1 r_1^{2-\lambda}\sum_{j,k=1}^{n}|r_{jk}-\bar r_{jk}|+L_2 r_1\sum_{i=1}^{n}|q_i-\bar q_i|+L_3 r_1^{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|z_i-\bar z_i|\,,$$

par contre pour $\lambda = 0$ nous avons

$$[F^i(t, x, Z, Q, R)-F^i(t, x, \bar Z, \bar Q, \bar R)]\operatorname{sgn}(z^i-\bar z^i)$$
$$\leqslant L_1 r_1^{2}\sum_{j,k=1}^{n}|r_{jk}-\bar r_{jk}|+L_2 r_1\ln r_1\sum_{i=1}^{n}|q_i-\bar q_i|+L_3\ln^2 r_1\sum_{i=1}^{n}|z_i-\bar z_i|\,.$$

Ces cas ont été considérés par Bodanko [2], mais dans le cas $\lambda = 0$ notre hypothèse est plus faible.

§ 3. Considérons le système d'équations

$$(3.1)\qquad u_t^i = F^i(t, x, U, u_x^i, u_{xx}^i)\qquad (i = 1, \ldots, m)$$

et une solution $u^i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ de (3.1) définie dans l'ensemble D.

DÉFINITION 6. La solution $u^i(t, x)$ sera dite *solution parabolique régulière* du système (3.1), lorsque chaque fonction F^i est elliptique par rapport à la suite de fonctions $v^l(t, x)$ $(l = 1, \ldots, m)$ (cf. définition 4) et fonctions u^i sont régulières dans D.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème qui vient d'être démontré:

THÉORÈME 2. *Dans les hypothèses* 1°, 2° (1), 3° *du théorème* 1 *le premier problème de Fourier*

$$(3.2)\qquad u^i(t, x) = \varphi^i(t, x) \quad \textit{pour}\ (t, x) \in \partial D\,,\ i = 1, \ldots, m\,,$$

où les fonctions $\varphi^i(t, x)$ *sont données d'avance sur* ∂D, *relatif au système* (3.1), *admet dans* D *au plus une solution parabolique, régulière et de classe* E_A.

§ 4. Maintenant nous démontrerons le théorème analogue à 1, mais dans la classe des fonctions convergeant vers zéro lorsque $|x| \to \infty$.

THÉORÈME 3. *Nous admettons que les hypothèses* 1°, 4°, 5°, 6° *du théorème* 1 *sont vérifiées et*

2°′ $[F^i(t, x, Z, Q, R) - F^i(t, x, \bar{Z}, Q, R)]\operatorname{sgn}(z^i - \bar{z}^i) \leqslant L \sum_{i=1}^{n} |z^i - \bar{z}^i|$, $i = 1, \ldots, m$.

3° $\lim\limits_{|x|\to\infty} [u^i(t, x) - v^i(t, x)] = 0$ *uniformément par rapport* $i = 1, \ldots, m$.

Dans ces hypothèses les inégalités (2.1) *ont lieu dans* $\bar{D}$.

Démonstration. Nous introduisons les fonctions

$$u^l = \bar{u}^l e^{a(t-t_0)}\,,\qquad v^l = \bar{v}^l e^{a(t-t_0)}\,,\qquad l = 1, \ldots, m\,,$$

où $a > mL$. En vertu de 3°′ pour chaque nombre $\varepsilon > 0$ il existe un nombre r_0 tel que

$$(4.1)\qquad \bar{u}^l(t, x) - \bar{v}^l(t, x) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour}\ (t, x) \in \bar{D} - D_r\,,\ r \geqslant r_0\,.$$

Pour prouver que l'inégalité 2.1 est valable il suffit de montrer que l'inégalité (4.1) est vérifiée dans D_r, $r \geqslant r_0$. Dans le cas contraire il existe un index j et un point (t^*, x^*) tels que

$$\bar{u}^j(t^*, x^*) - \bar{v}^j(t^*, x^*) = \max_l \{\max_{D_r^{T_1}} [\bar{u}^l(t, x) - \bar{v}^l(t, x)]\} > \varepsilon\,,$$

(1) La classe $E_{2+\varepsilon}$ correspond à la fonction $A(r_1) = r_1^{-\varepsilon}$ pour laquelle on a $\lim\limits_{|x|\to\infty} A(r_1) = 0$. L'équation de la propagation de la chaleur ne satisfait donc pas à l'hypothèse 2° avec $A(r_1) = r_1^{-\varepsilon}$ et notre théorème 2 n'est pas en contradiction avec l'exemple bien connu de Tychonov [6].

où $T^1 = t_0 + T$ si $t_0 + T < \infty$ et $T^1 < t_0 + T$ si $t_0 + T = \infty$. D'après les inégalités (4.1) le point (t^*, x^*) appartient à $D_r^{T^1} - \partial D_r^{T^1}$, donc

$$\bar{u}_t^j(t^*, x^*) - \bar{v}_t^j(t^*, x^*) \geqslant 0 , \qquad \bar{u}_{x_k}^j(t^*, x^*) = \bar{v}_{x_k}^j(t^*, x^*) \qquad (k = 1, \ldots, n) ,$$

$$\sum_{l,k=1}^{n} [\bar{u}_{x_k x_l}^j(t^*, x^*) - \bar{v}_{x_k x_l}^j(t^*, x^*)] \lambda_l \lambda_k \leqslant 0$$

pour tout système $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

D'après $2^{\circ\prime}$ nous avons

$$\begin{aligned}
&[\bar{u}_t^j(t^*, x^*) - \bar{v}_t^j(t^*, x^*)] e^{a(t^*-t_0)} + [\bar{u}^j(t^*, x^*) - \bar{v}^j(t^*, x^*)] a e^{a(t^*-t_0)} \\
&\leqslant \big[F^j\big(t^*, x^*, \bar{U}(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{u}_x^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{u}_{xx}^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}\big) - \\
&\qquad - F^j\big(t^*, x^*, \bar{U}(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{u}_x^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{v}_{xx}^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}\big)\big] + \\
&\quad + \big[F^j\big(t^*, x^*, \bar{U}(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{u}_x^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{v}_{xx}^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}\big) - \\
&\qquad - F^j\big(t^*, x^*, W(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{v}_x^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{v}_{xx}^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}\big)\big] + \\
&\quad + \big[F^j\big(t^*, x^*, W(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{v}_x^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{v}_{xx}^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}\big) - \\
&\qquad - F^j\big(t^*, x^*, \bar{V}(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{v}_x^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}, \bar{v}_{xx}^j(t^*, x^*) e^{a(t^*-t_0)}\big)\big] .
\end{aligned}$$

En vertu de 1° et 4° la première et deuxième différences du second membre de cette inégalité sont non positives, donc en appliquant l'hypothèse $2^{\circ\prime}$ et la relation (2.8) on obtient l'inégalité

$$[\bar{u}_t^j(t^*, x^*) - \bar{v}_t^j(t^*, x^*)] e^{a(t^*-t_0)} \leqslant (mL - a)[\bar{u}^j(t^*, x^*) - \bar{v}^j(t^*, x^*)] e^{a(t^*-t_0)} < 0 ,$$

ce qui est impossible.

Pour prouver les inégalités (2.1) dans un point arbitraire $(t, x) \in D$ (dans le cas $T^1 < t_0 + T = \infty$) on divise le domaine D en domaines partiels par les planes $t = t_0 + sT^1$ $(s = 1, \ldots, n_1)$ et on établit de proche en proche ces inégalités dans ces domaines.

§ **5.** Le théorème suivant est une conclusion immédiate du théorème 3:

Théorème 4. *Supposons que les hypothèses* 1° *et* $2^{\circ\prime}$ *du théorème* 3 *soient satisfaites. Alors le premier problème* (3.1), (3.2) *admet dans* D *au plus une solution parabolique régulière convergeant vers zéro lorsque* $|x| \to \infty$.

Travaux cités

[1] P. Besala, *On solution of Fourier's first problem for a system of non linear parabolic equations in an unbounded domain*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), pp. 247-263.

[2] W. Bodanko, *Sur le problème de Cauchy et les problèmes de Fourier pour les équations paraboliques dans un domaine non borné*, ibidem 18 (1966), pp. 79-94.

[3] Г. Н. Смирнова. *Задачи Коши для параболических уравнений вырождающихся на бесконечности*, Мат. Сб. 70 (112); 4, 1966, pp. 591-604.

[4] J. Szarski, *Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non linéaire d'équations paraboliques aux derivées partielles du second ordre*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), pp. 237-249.

[5] — *Sur la limitation et l'unicité des solutions des problèmes de Fourier pour un système non linéaire d'équations paraboliques*, ibidem 6 (1959), pp. 211-216.

[6] А. Н. Тихонов, *Теорема единственности для уравнения теплопроводности*, Мат. Сб. 2 (1935), pp. 199-216.

Reçu par la Rédaction le 27. 1. 1967