ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIV (1970)

Une remarque sur la méthode des approximations successives dans la recherche des solutions périodiques des équations différentielles à paramètre retardé

by Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Nous avons démontré(¹) l'existence d'une solution périodique de l'équation difféo-différentielle

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big), \qquad h > 0 \tag{1}$$

dans le cas où $f(t, x, y)$ est continue et croissante par rapport à x ou y, périodique par rapport à t avec la période h. Dans la présente note nous démontrons une autre condition suffisante pour l'existence d'une solution (1) périodique, avec la période T (qui peut être différente de h). Nous ne supposons plus que $f(t, x, y)$ est croissante par rapport à x ou y, mais nous admettons qu'elle est de classe C^1 par rapport à x, y et nous utilisons certaines évaluations de $|f_x|$, $|f_y|$ et $|f_x+f_y|$. La méthode des approximations successives dont nous nous servirons dans cette note est plus commode que celle employée dans(¹).

1. HYPOTHÈSES H. 1. *La fonction $f(t, x, y)$ est de classe C^1 par rapport à (x, y), continue par rapport à (t, x, y) et périodique par rapport à t, de période $T > 0$, pour tous les (t, x, y).*

2. *Il existe une constante $m > 0$ telle que pour chaque couple de fonctions périodiques $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ de période T on a*

$$\Big|\int_0^T \big\{f_x\big(t, \sigma_1(t), \sigma_2(t)\big)+f_y\big(t, \sigma_1(t), \sigma_2(t)\big)\big\}\,dt\Big| \geqslant m > 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} |f_x(t, x, y)| \leqslant M, \qquad |f_y(t, x, y)| \leqslant M, \\ |f_x(t, x, y)+f_y(t, x, y)| \leqslant N, \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\frac{MNT^2}{m} < 1. \tag{1.3}$$

(¹) Z. Mikołajska, *Sur l'existence d'une solution périodique d'une équation différentielle du premier ordre avec paramètre retardé*, Ann. Polon. Math. 23 (1970), p. 25-36.

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses H il existe une solution périodique $x(t)$ de l'équation* (1), *de période T. La solution en question peut être obtenue comme la limite uniforme de la suite*

$$x_n(t) = a_n + \varphi_n(t), \tag{1.4}$$

où les constantes a_n et les fonctions $\varphi_n(t)$ sont definies par les relations suivantes:

$$\varphi_0(t) = 0 \quad pour \ -\infty < t < +\infty, \tag{1.5}$$

a_0 étant la solution de l'équation numérique

$$\int_0^T f(t, a_0, a_0)\,dt = 0. \tag{1.6}$$

D'une façon analogue on définit a_n et $\varphi_n(t)$

$$\varphi_n(t) = \int_0^t f\big(s, a_{n-1}+\varphi_{n-1}(s), a_{n-1}+\varphi_{n-1}(s-h)\big)\,ds, \tag{1.7}$$

a_n est une solution de l'équation

$$\int_0^T f\big(s, a_n+\varphi_n(s), a_n+\varphi_n(s-h)\big)\,ds = 0. \tag{1.8}$$

Démonstration. Nous allons démontrer que:

I. Les fonctions $\varphi_n(t)$ sont périodiques de période T.

II. Pour chaque $n = 0, 1, 2, \ldots$ l'équation (1.8) a une solution unique a_n.

III. La suite $\{a_n, \varphi_n(t)\}$ converge uniformément dans l'intervalle $[0, T]$.

IV. La $\lim x_n(t) = x(t)$ est une solution périodique de l'équation (1).

Démonstration de I. $\varphi_0(t)$ est par définition périodique de période T. $f(t, x, y)$ étant périodique, en vertu de (1.6) et (1.7), $\varphi_1(t)$ est aussi périodique. Dans le cas où $\varphi_{n-1}(t)$ est périodique et a_{n-1} satisfait à (1.8), la fonction f étant périodique, $\varphi_n(t)$ définie par (1.7) l'est aussi. Dans le cas où tous les a_n existent, $\varphi_0(t)$ étant périodique, tous les $\varphi_n(t)$ sont périodiques de période T.

Démonstration de II. Introduisons la notation suivante:

$$\Gamma_n(a) = \int_0^T f[s, a+\varphi_n(s), a+\varphi_n(s-h)]\,ds.$$

On a

$$\Gamma_n'(a) = \int_0^T \{f_x[s, a+\varphi_n(s), a+\varphi_n(s-h)] + f_y[s, a+\varphi_n(s), a+\varphi_n(s-h)]\}\,ds.$$

En vertu de (1.1) on a $|\Gamma_n'(a)| \geqslant Tm > 0$. Soit par exemple $\Gamma_n'(a) \geqslant Tm > 0$, d'où $\Gamma_n(a) \geqslant ma + \Gamma_n(0)$ pour $a > 0$, $\Gamma_n(a) \leqslant ma + \Gamma_n(0)$ pour $a < 0$ et par suite il existe un $R_n > 0$ tel que $\Gamma_n(R_n) > 0$, $\Gamma_n(-R_n) < 0$ (pour $n = 0, 1, 2, \ldots$).

De la continuité de $\Gamma_n(a)$ il vient qu'il existe un $a_n \epsilon (-R_n, R_n)$ tel que $\Gamma_n(a_n) = 0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Démonstration de III. Pour démontrer la convergence de la suite $\{\varphi_n(t)\}$ envisageons la différence

$$\begin{aligned}
&|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \\
&= \Big| \int_0^t \big\{ f\big(s, a_{n-1} + \varphi_{n-1}(s), a_{n-1} + \varphi_{n-1}(s-h)\big) - \\
&\quad - f\big(s, a_{n-2} + \varphi_{n-2}(s), a_{n-2} + \varphi_{n-2}(s-h)\big) \big\} ds \Big| \\
&= \Big| \int_0^t \big\{ f_x\big(s, \sigma_n(s), \vartheta_n(s)\big) \big[\big(\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)\big) + (a_{n-1} - a_{n-2}) \big] + \\
&\quad + f_y\big(s, \sigma_n(s), \vartheta_n(s)\big) \big[\big(\varphi_{n-1}(s-h) - \varphi_{n-2}(s)\big) + (a_{n-1} - a_{n-2}) \big] \big\} ds \Big|,
\end{aligned}$$

où les fonctions $\sigma_n(s)$, $\vartheta_n(s)$, convenablement choisies, sont périodiques. En vertu de (1.8) on a

$$\begin{aligned}
(a_{n-1} - a_{n-2}) &\int_0^T \big[f_x\big(s, \sigma_n(s), \vartheta_n(s)\big) + f_y\big(s, \sigma_n(s), \vartheta_n(s)\big) \big] ds \\
&= -\int_0^T f_x\big(s, \sigma_n(s), \vartheta_n(s)\big) \big(\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)\big) ds - \\
&\qquad - \int_0^T f_y\big(s, \sigma_n(s), \vartheta_n(s)\big) \big(\varphi_{n-1}(s-h) - \varphi_{n-2}(s-h)\big) ds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| = \Bigg| &\left[1 - \frac{\int_0^t \big(f_x(s, \sigma_n, \vartheta_n) + f_y(s, \sigma_n, \vartheta_n)\big) ds}{\int_0^T \big(f_x(s, \sigma_n, \vartheta_n) + f_y(s, \sigma_n, \vartheta_n)\big) ds} \right] \times \\
&\times \Big\{ \int_0^t f_x(s, \sigma_n, \vartheta_n) \big(\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)\big) ds + \\
&\qquad + \int_0^t f_y(s, \sigma_n, \vartheta_n) \big(\varphi_{n-1}(s-h) - \varphi_{n-2}(s-h)\big) ds \Big\} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{\int\limits_0^t[f_x(s,\sigma_n,\vartheta_n)+f_y(s,\sigma_n,\vartheta_n)]\,ds}{\int\limits_0^T[f_x(s,\sigma_n,\vartheta_n)+f_y(s,\sigma_n,\vartheta^n)]\,ds}\int\limits_t^T\{f_x(s,\sigma_n,\vartheta_n)\big(\varphi_{n-1}(s)-\varphi_{n-2}(s)\big)+$$

$$+f_y(s,\sigma_n,\vartheta_n)\big(\varphi_{n-1}(s-h)-\varphi_{n-2}(s-h)\big)\}\,ds\Bigg|$$

$$\leqslant\left|\frac{\int\limits_t^T[f_x+f_y]\,ds}{\int\limits_0^T[f_x+f_y]\,ds}\right|\int\limits_0^t\{|f_x|\,|\varphi_{n-1}(s)-\varphi_{n-2}(s)|+|f_y|\,|\varphi_{n-1}(s-h)-$$

$$-\varphi_{n-2}(s-h)|\}\,ds+\left|\frac{\int\limits_0^t(f_x+f_y)\,ds}{\int\limits_0^T(f_x+f_y)\,ds}\right|\int\limits_t^T\{|f_x|\,|\varphi_{n-1}(s)-\varphi_{n-2}(s)|+$$

$$+|f_y|\,|\varphi_{n-1}(s-h)-\varphi_{n-2}(s-h)|\}\,ds.$$

En vertu de (1.2) on a

$$|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\leqslant\frac{2MN}{m}\big((T-t)t+t(T-t)\big)\varrho_{n-1}=\frac{4MN}{m}\varrho_{n-1}(T-t)t$$
$$\text{pour } 0<t<T,$$

où $\varrho_n=\max|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)|$ pour $0\leqslant t\leqslant T$. On vérifie facilement que le maximum de la fonction $(T-t)t$ dans l'intervalle $[0,T]$ est égal à $(T-\frac{1}{2}T)\frac{T}{2}=\frac{T^2}{4}$, d'où l'on tire

$$\varrho_n\leqslant\frac{MNT^2}{m}\varrho_{n-1},\qquad |a_n-a_{n-1}|\leqslant\frac{2MT}{m}\varrho_n.$$

De là, en vertu de (1.3), on obtient la convergence

$$\varphi_n(t)\to\varphi(t)\quad\text{pour } 0\leqslant t\leqslant T,\ a_n\to a,$$

et par suite

$$x_n(t)=a_n+\varphi_n(t)\to a+\varphi(t)=x(t).$$

La convergence obtenue est uniforme dans l'intervalle $[0,T]$. Les fonctions $\varphi_n(t)$ étant périodiques, la convergence uniforme a lieu dans tout l'intervalle $(-\infty,+\infty)$ et la fonction obtenue est périodique.

La démonstration de IV résulte immédiatement de la définition (1.4), de (1.7), de la convergence uniforme de φ_n et de la convergence de a_n. La démonstration du théorème 1 est ainsi terminée.

2. Remarque 1. Il est évident que dans la définition de la suite φ_n on peut remplacer la fonction $\varphi_0(t) = 0$ par une fonction quelconque périodique et continue $\bar{\varphi}(t)$.

Remarque 2. Dans le cas où $T = h$ les conditions (1.2) et (1.3) peuvent être remplacées par des conditions moins restrictives. Dans le cas envisagé on a le théorème suivant:

Hypothèses $\overline{\mathrm{H}}_1$. 1. *La fonction $f(t, x, y)$ est de classe C^1 par rapport à (x, y), continue par rapport à (t, x, y) et périodique par rapport à t, de période $T = h$.*

2. *Il existe une constante $m > 0$ telle que pour chaque couple de fonctions $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ périodique de période h on a*

$$\left|\int_0^h \{f_x(s, \sigma_1(s), \sigma_2(s)) + f_y(s, \sigma_1(s), \sigma_2(s))\}\, ds\right| \geqslant m > 0, \tag{2.1}$$

$$|f_x(s, x, y) + f_y(s, x, y)| \leqslant N, \tag{2.2}$$

$$\frac{(Nh)^2}{2m} < 1. \tag{2.3}$$

Théorème 2. *Sous les hypothèses $\overline{\mathrm{H}}$ il existe une solution périodique $x(t)$ de l'équation* (1) *de période h.*

Démonstration. On a, en vertu de la périodicité de $\varphi_n(t)$,

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \leqslant \int_0^t \{f_x(s, \sigma_n, \vartheta_n) + f_y(s, \sigma_n, \vartheta_n)\}(\varphi_{n-1}(s) -$$

$$-\varphi_{n-2}(s))\}\, ds \left|\frac{\int_t^T (f_x + f_y)\, ds}{\int_0^T (f_x + f_y)\, ds}\right| +$$

$$+\left|\frac{\int_0^t (f_x + f_y)\, ds}{\int_0^T (f_x + f_y)\, ds}\right| \left|\int_t^T (f_x + f_y)(\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s))\, ds\right|$$

$$\leqslant \frac{2N^2}{m} \varrho_{n-1}(T - t)t \leqslant \frac{(NT)^2}{m} \varrho_{n-1} = \frac{(Nh)^2}{m} \varrho_{n-1}$$

et

$$|a_{n-1} - a_{n-2}| \leqslant \frac{Nh}{m} \varrho_{n-1}.$$

3. Remarque 3. Chaque solution périodique de l'équation (1) peut être obtenue comme la limite d'une suite de la forme (1.4), où a_n

et $\varphi_n(t)$ sont définies par les relations (1.7) et (1.8) pour $n = 1, 2, \ldots$ Pour obtenir la solution $x(t)$ il suffit de poser

$$a_0 = x(0), \; \varphi_0(t) = \int_0^t f\big(s, x(s), x(s-h)\big)ds.$$

On obtient $a_n = a_0, \varphi_n(t) - \varphi_0(t)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et par suite $x_n(t) \to x(t)$ uniformément.

4. Théorème 3. *Dans les hypothèses* H *chaque solution périodique de l'équation* (1) *est égale à la solution* $x(t)$ *définie dans la démonstration du théorème* 1: $x(t) = a + \varphi(t)$, *c'est-à-dire il existe une solution unique périodique de période* T.

Démonstration. Envisageons une solution périodique $w(t)$ de l'équation (1). De la remarque 3 il vient qu'il existe une fonction $\tilde{\varphi}_0(t)$ périodique de période T telle que la suite $w_n(t) = \tilde{a}_n + \tilde{\varphi}_n(t)$ où $\tilde{a}_n$ et $\tilde{\varphi}_n(t)$ sont définis par (1.7) et (1.8) avec $\varphi_0(t) = \tilde{\varphi}_0(t)$ (au lieu de $\varphi_0(t) = 0$). On vérifie facilement que

$$|\tilde{\varphi}_n(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \frac{MNT}{m}\tilde{\varrho}_{n-1} \leqslant \tilde{\varrho}_0\left(\frac{NMT}{m}\right)^n,$$

où $\tilde{\varrho}_n = \max|\tilde{\varphi}_n(t) - \varphi_n(t)|$. On a donc

$$\tilde{\varrho}_n \leqslant \tilde{\varrho}_0\left(\frac{NMT}{m}\right)^n$$

et par suite $\tilde{\varrho}_n \to 0$. On vérifie facilement que l'on a aussi $|\tilde{a}_n - a_n| \to 0$ et par suite $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$, $\tilde{a} = a$ et $w(t) = x(t)$.

Remarque 4. Les hypothèses (1.1) et (1.3) du théorème 1 sont indispensables. Dans le cas où $[f_x + f_y]$ peut être égal à zéro on peut poser $f_x = f_y = 0$ et $f(t, x, y) = c > 0$. Une telle fonction est périodique et elle satisfait à (1.2) où $M > 0, N > 0$ sont quelconques. Cependant il n'existe pas de solutions périodiques de l'équation $x'(t) = c > 0$.

5. Remarque 5. Dans la suite nous construirons un exemple d'une équation de la forme (1) satisfaisant aux hypothèses 1 et (1.1), (1.2), mais telle qu'il n'existe pas de solution périodique de l'équation envisagée, c'est-à-dire nous démontrons que l'hypothèse (1.3) est indispensable.

Exemple. Envisageons une équation de la forme

$$x'(t) = p(t)x(t) + q\big(t, x(t-h)\big) + r(t) \tag{5.1}$$

où h est une constante positive $h > 0$ (quelconque) et les fonctions $p(t)$,

$q(t, y)$, $r(t)$ sont continues et périodiques par rapport à t de période $T = 4h$ et satisfont aux conditions suivantes

$$p(t) > 0 \quad \text{pour } 0 < t < h, \tag{5.2}$$

$$p(t) \equiv 0 \quad \text{pour } h \leqslant t \leqslant T = 4h, \tag{5.3}$$

$$p(t+nT) = p(t) \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.4}$$

$$\int_0^h p(t)dt = c = \ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}, \tag{5.5}$$

où ε est une constante positive

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{1+e^2} < \tfrac{1}{2}, \tag{5.6}$$

$$q(t, y) = \begin{cases} -kp(t-h)y & \text{pour } h \leqslant t \leqslant 2h, -\infty < y < +\infty, \\ \varepsilon p(t-2h)y & \text{pour } 2h \leqslant t \leqslant 3h, y \geqslant 0, \\ \dfrac{\varepsilon}{2} p(t-2h)(y+1)^2 & \text{pour } 2h \leqslant t \leqslant 3h, -1 \leqslant y \leqslant 0, \\ 0 & \text{pour } 2h \leqslant t \leqslant 3h, y \leqslant -1, \\ 0 & \text{pour } 3h \leqslant t \leqslant 4h = T, \\ 0 & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h; \end{cases} \tag{5.7}$$

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 3h, \\ p(t-3h) & \text{pour } 3h \leqslant t \leqslant 4h. \end{cases} \tag{5.8}$$

Dans (5.7) posons

$$k = \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}. \tag{5.9}$$

Démontrons que dans le cas envisagé il n'existe pas de solutions périodiques de l'équation (5.1) de période $T = 4h$.

Envisageons une solution quelconque $x(t)$ de l'équation (5.1) et posons par définition

$$x_0 = x(0).$$

Dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant h$ nous avons, en vertu de (5.7) et (5.8),

$$x'(t) = p(t)x(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h$$

et par suite

$$x(t) = x_0 \exp \int_0^t p(s)ds \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h, \tag{5.10}$$

$$x(h) = x_0 \exp \int_0^h p(s)ds = x_0 e^c = x_0 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{5.11}$$

Dans l'intervalle $h \leqslant t \leqslant 2h$ nous avons, en vertu de (5.3) et (5.8),

$$x'(t) = -kp(t-h)x(t-h) = \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}p(t-h)x(t-h)$$

d'où, en vertu de (5.10), (5.11) et (5.9), il vient

$$x(t) = x_0\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}x_0\int\limits_h^t p(\tau-h)\exp\int\limits_0^{\tau-h} p(s)\,ds\,d\tau$$

$$= x_0\left\{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}\int\limits_0^{t-h} p(\tau)\exp\int\limits_0^{\tau} p(s)\,ds\,d\tau\right\}$$

$$= x_0(1-\varepsilon)\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{1-2\varepsilon}[e^{\int_0^{t-h} p(s)ds} - 1]\right\}.$$

De là on obtient pour $t = 2h$,

$$x(2h) = x_0(1-\varepsilon)\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{1-2\varepsilon}[e^c - 1]\right\}$$

$$= x_0(1-\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\left[1 - \frac{1}{1-2\varepsilon}(1-2\varepsilon)\right] = 0,$$

c'est-à-dire que pour chaque solution de l'équation (5.1) définie dans tout l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant T$ on a $x(2h) = 0$ et dans l'intervalle $[0, 2h)$ on a

$$x(t) > 0 \quad \text{pour } x_0 > 0,$$
$$x(t) \equiv 0 \quad \text{pour } x_0 = 0,$$
$$x(t) < 0 \quad \text{pour } x_0 < 0.$$

Envisageons le cas $x_0 > 0$. Dans l'intervalle $[2h, 3h]$ nous avons $x(t-h) > 0$ et par suite

$$x'(t) = \varepsilon p(t-2h)x(t-h) \qquad \text{pour } 2h \leqslant t \leqslant 3h,$$

$$x(t) = x_0\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon(1-2\varepsilon)}\int\limits_{2h}^{t}\left\{(1-\varepsilon) - \varepsilon\left[\exp\int\limits_0^{\tau-2h} p(s)\,ds\right]\right\}p(\tau-2h)\,d\tau$$

$$= \frac{(1-\varepsilon)x_0}{\varepsilon(1-2\varepsilon)}\left\{(1-\varepsilon)\int\limits_0^{t-2h} p(s)\,ds - \varepsilon\left[\exp\int\limits_0^{t-2h} p(s)\,ds - 1\right]\right\}.$$

De (5.5) il vient

$$x(3h) = \frac{(1-\varepsilon)x_0}{\varepsilon(1-2\varepsilon)}\left\{(1-\varepsilon)\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}+\varepsilon-\varepsilon\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon)x_0}{1-2\varepsilon}\left\{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}-1\right)+1\right\}.$$

Posons

(5.12) $$\varepsilon < \frac{1}{1+e^2} < \tfrac{1}{2}.$$

Nous obtenons

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > \frac{1+e^2}{1+e^2}e^2 = e^2 > 1$$

et par suite

5.13) $$x(3h) > kx_0\{(\ln e^2-1)e^2+1\} = kx_0(e^2+1).$$

En vertu de (5.12) on a

$$\varepsilon < \frac{1}{1+e^2} = \frac{e^2-1}{e^4-1} < e^2\frac{(e^2+1)}{e^4-1} = \frac{e^2}{e^2-1}$$

et par suite

$$\left(\frac{2}{e^2+1}-1\right)\varepsilon = \frac{1-e^2}{1+e^2}\varepsilon > \frac{e^2}{e^2-1}\cdot\frac{1-e^2}{1+e^2} = \frac{1}{e^2+1}-1$$

d'où on a

$$1-\varepsilon > \frac{1}{e^2+1}-\frac{2\varepsilon}{e^2+1} = \frac{1-2\varepsilon}{e^2+1}, \qquad 2\varepsilon < 1;$$

$$\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} > \frac{1}{e^2+1}.$$

Donc, en vertu de (5.13) et (5.9),

$$x(3h) > \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}(e^2+1)x_0 > x_0.$$

Pour $3h \leqslant t \leqslant T = 4h$ (cf. (5.8) et (5.1)),

$$x'(t) = p(t-3h)$$

et

$$x(t) = x(3h)+\int_{3h}^{t} p(s-3h)ds = x(3h)+\int_{0}^{t-3h} p(s)ds,$$

$$x(T) = x(4h) = x(3h)+\int_{0}^{h} p(s)ds = x(3h)+c > x_0+c > x_0,$$

d'où il vient que pour chaque $x_0 > 0$ la solution $x(t)$ de l'équation envisagée n'est pas périodique. Pour $x_0 = 0$ aussi la solution $x(t)$ n'est pas périodique. Elle est égale à 0 dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 3h$ et $\int_0^{t-3h} p(s)\,ds$ pour $3h \leqslant t \leqslant 4h = T$, d'où $x(T) = \int_0^h p(s)\,ds = c > 0 = x(0)$.

Pour $x_0 \leqslant 0$ on a l'équation

$$x'(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [2h, 3h] \text{ telle que } x(t) \leqslant -1$$

et

$$x'(t) = \frac{\varepsilon}{2} p(t-2h)\big(x(t-h)+1\big)^2 > 0$$

$$\text{pour } t \text{ tels que } 0 > x(t-h) > -1,\ 2h \leqslant t \leqslant 3h,$$

c'est-à-dire

$$x(t) > x(2h) = 0 \quad \text{pour } 2h < t \leqslant 3h.$$

Dans l'intervalle $3h \leqslant t \leqslant 4h$

$$x'(t) = p(t-3h) \geqslant 0 \quad \text{pour } 3h \leqslant t \leqslant 4h$$

et par suite

$$x(T) \geqslant x(3h) > 0 > x_0.$$

Ainsi nous avons démontré que $x(t)$ n'est périodique ni pour $x_0 \geqslant 0$ ni pour $x_0 < 0$. Il reste à prouver que la fonction

$$f(t, x, y) = p(t)x + q(t, y) + r(t)$$

satisfait aux conditions 1, (1.1) et (1.2). La condition 1 est évidente. Envisageons $f_x + f_y$,

$$f_x(t, x, y) = p(t), \quad f_y(t, x, y) = q_y(t, y),$$

$$\int_0^T \{f_x(t, \sigma_1, \sigma_2) + f_y(t, \sigma_1, \sigma_2)\}\,dt = \int_0^h p(s)\,ds - k\int_0^h p(s)\,ds + \int_{2h}^{3h} q_y(s, \sigma_2)\,ds$$

$$\leqslant \int_0^h p(s)\,ds\,(1-k+\varepsilon) = \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} + \varepsilon\right)c = \frac{-2\varepsilon^2}{1-2\varepsilon}c,$$

et par suite

$$\left|\int_0^T f_x(s, \sigma_1, \sigma_2) + f_y(s, \sigma_1, \sigma_2)\,ds\right| \geqslant \frac{2\varepsilon^2}{1-2\varepsilon}c > 0$$

pour chaque couple de fonctions périodiques $\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(t)$.

Reçu par la Rédaction le 30. 6. 1969