ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1962)

Sur certaines suites de fonctions extrémales de plusieurs variables complexes

par F. LEJA (Kraków)

1. Fonction génératrice et écart d'un ensemble. Soient R un espace topologique quelconque, $p, q, z, \ldots$ des points de R et $\omega(p_1, p_2, \ldots, p_a)$ une fonction 1° non négative et continue de $a \geqslant 2$ points $p_1, p_2, \ldots, p_a$ variant dans R, 2° symétrique par rapport à toutes ses variables, c'est-à-dire satisfaisant identiquement à la relation

$$\omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_a}) = \omega(p_1, p_2, \ldots, p_a)$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_a$ est une permutation quelconque des indices $1, 2, \ldots, a$. Une telle fonction ω sera dite *fonction génératrice* de a variables $p_1, p_2, \ldots, p_a$.

Désignons par $p^{(n)}$ un système de $n \geqslant a$ points quelconques $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de R

$$p^{(n)} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, \tag{1}$$

par $V(p^{(n)})$ le produit de $\binom{n}{a}$ facteurs

$$V(p^{(n)}) = \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_a \leqslant n} \omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_a}) \tag{2}$$

et par $\Delta^{(j)}(p^{(n)})$ le produit de $\binom{n-1}{a-1}$ facteurs

$$\Delta^{(j)}(p^{(n)}) = \prod_{\substack{1 \leqslant i_2 < i_3 < \ldots < i_a \leqslant n \\ (i_\nu \neq j)}} \omega(p_j, p_{i_2}, \ldots, p_{i_a}), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

On constate que ces produits satisfont aux relations

$$V(p^{(n)}) = \Delta^{(j)}(p^{(n)}) V(p_1, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$\prod_{j=1}^{n} \Delta^{(j)}(p^{(n)}) = [V(p^{(n)})]^a. \tag{5}$$

Soit E un ensemble compact non vide de points de R. Lorsque les points du système (1) varient dans E, le produit (2) et, de même, le plus petit des n produits (3) restent bornés et atteignent leurs bornes supérieures qui seront désignées

$$(6)\qquad V_n(E)=\sup_{p^{(n)}\in E} V(p^{(n)})\,,\qquad \Delta_n(E)=\sup_{p^{(n)}\in E}\{\min_{(j)} \Delta^{(j)}(p^{(n)})\}\,.$$

Formons les moyennes

$$v_n(E)=[V_n(E)]^{1/\binom{n}{a}},\qquad \delta_n(E)=[\Delta_n(E)]^{1/\binom{n-1}{a-1}}$$

et faisons varier $n=a,\ a+1,\ a+2,\dots$

On démontre [4] que les suites $\{v_n(E)\}$ et $\{\delta_n(E)\}$ convergent toujours vers une même limite non négative qui sera désignée par $v(E,\omega)$, ou plus brièvement par $v(E)$, et appelée *écart* de l'ensemble E par rapport à la fonction génératrice ω

$$(7)\qquad \lim_{n\to\infty} v_n(E)=\lim_{n\to\infty}\delta_n(E)=v(E,\omega)=v(E)\,.$$

Chaque système de $n\geqslant a$ points de E

$$(8)\qquad q^{(n)}=\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$$

pour lesquels $V_n(E)=V(q^{(n)})$ sera dit n-ième système de *points extrémaux de E par rapport à ω.*

Exemple 1. Soit R_2 l'espace de deux variables complexes x et y. Soit $a=3$ et $\omega(p_1,p_2,p_3)$ la valeur absolue du déterminant

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\omega(p_1,p_2,p_3)\,,$$

où x_k, y_k sont les coordonnées du point p_k, $k=1,2,3$. Posons

$$x=\xi+i\xi'\,,\qquad y=\eta+i\eta'$$

où ξ,η sont les parties réelles et ξ',η' les parties imaginaires respectivement de x et y. Nous allons calculer l'écart $v(C,\omega)$ de la circonférence $C\{\xi^2+\eta^2=r^2\}$ située dans le plan réel de l'espace R_2 par rapport à la fonction génératrice (9). Cet écart s'exprime par la formule

$$(10)\qquad v(C,\omega)=r^2/2\,.$$

En effet, la borne $V_n(C)$ est atteinte par le n-ième système de points extrémaux

$$q_k=\left(r\cos\frac{2\pi}{n}k\,,\ r\sin\frac{2\pi}{n}k\right),\qquad k=1,2,\dots,n\,,$$

sommets d'un polygone régulier inscrit dans C. Puisque

$$\omega(q_i,q_k,q_n)=r^2|J|\,,\qquad J=\begin{vmatrix}\cos\frac{2\pi}{n}i & \sin\frac{2\pi}{n}i & 1\\ \cos\frac{2\pi}{n}k & \sin\frac{2\pi}{n}k & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

et que le second membre de cette formule est égal à la valeur absolue de l'expression

$$4r^2 \sin\frac{\pi}{n} i \cdot \sin\frac{\pi}{n} k \cdot \sin\frac{\pi}{n}(k-i) \quad \text{pour} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

on trouve pour $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\Delta^{(j)}(q^{(n)}) = \Delta^{(n)}(q^{(n)}) = (4r^2)^{\binom{n-1}{2}} \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n-1} \sin\frac{\pi}{n} i \cdot \sin\frac{\pi}{n} k \cdot \sin\frac{\pi}{n}(k-i)$$

et

$$\Delta^{(j)}(q^{(n)}) = (4r^2)^{\binom{n-1}{2}} \left(\sin\frac{\pi}{n} \sin 2\frac{\pi}{n} \ldots \sin\left[\frac{n}{2}\right]\frac{\pi}{n}\right)^{3(n-2)}$$

où $[n/2]$ désigne l'entier de $n/2$. Par suite

$$v_n(C) = [V(q^{(n)})]^{1/\binom{n}{2}} = [\Delta^{(n)}(q^{(n)})]^{1/\binom{n-1}{2}} = 4r^2 \left(\prod_{k=1}^{[n/2]} \sin k\frac{\pi}{n}\right)^{6/(n-1)}$$

$$= 4r^2 \exp\left(\frac{6n}{n-1} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{n} \log\sin k\frac{\pi}{n}\right)$$

d'où il vient lorsque $n \to \infty$

$$v(C) = 4r^2 \exp\left(6 \int_0^{1/2} \log\sin \pi x dx\right) = 4r^2 \exp\left(\frac{6}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log\sin t dt\right)$$

et comme

$$\int_0^{\pi/2} \log\sin t dt = -\frac{\pi}{2}\log 2,$$

on a

$$v(C) = 4r^2 e^{-3\log 2} = \frac{r^2}{2}.$$

Remarquons que si la circonférence C est située dans le plan $y = 0$, la fonction (9) s'annule lorsque p_1, p_2 et p_3 sont situés dans ce plan et, par suite, on a dans ce cas $v(C, \omega) = 0$.

Exemple 2. Soit R_m l'espace des m variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_m$ et $P_\nu(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ un polynôme homogène du degré ν de la forme

$$P_\nu(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_m = \nu} a_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_m^{\nu_m},$$

où $0 \leqslant \nu_k \leqslant \nu$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Le nombre des termes de ce polynôme est égal à

$$a = \binom{\nu + m - 1}{m - 1}.$$

Considérons un système de a points $p_1, p_2, \ldots, p_a$ de R_m tels que p_i ait les coordonnées

$$p_i = (z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{mi}), \quad i = 1, 2, \ldots, a;$$

formons le déterminant d'ordre a

$$(11) \qquad |c_{ik}|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, a,$$

où
$$c_{ik} = z_{1i}^{\nu_{1k}} z_{2i}^{\nu_{2k}} \dots z_{mi}^{\nu_{mk}}, \quad i, k = 1, 2, \dots, a,$$
les exposants ν_{jk} étant des nombres entiers non négatifs remplissant les conditions $0 \leqslant \nu_{jk} \leqslant \nu$, $\nu_{1k} + \nu_{2k} + \dots + \nu_{mk} = \nu$. La valeur absolue de ce déterminant est une fonction génératrice $\omega(p_1, p_2, \dots, p_a)$ de a points variables dans R_m.

À chaque ensemble fermé et borné E de points de R_m correspond son écart $v(E, \omega)$. Il est évident que si E est situé sur la variété définie par une équation de la forme $P(z_1, z_2, \dots, z_m) = 0$, où $P(z_1, z_2, \dots, z_m)$ est un polynôme homogène du degré ν alors $v(E, \omega) = 0$.

Exemple 3. Le nombre des termes du polynôme
$$Q_\nu(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=0}^{\nu} P_k(z_1, \dots, z_m),$$
où $P_k(z_1, \dots, z_m)$ est un polynôme homogène du degré k, est égal à
$$\beta = \binom{\nu + m}{m}.$$
Soit $p_1, p_2, \dots, p_\beta$ un système de β points de l'espace R_m tel que p_i ait les coordonnées $z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{mi}$, $i = 1, 2, \dots, \beta$. Le module du déterminant $|d_{ik}|$ d'ordre β, où $d_{ik} = z_{1i}^{\nu_{1k}} z_{2i}^{\nu_{2k}} \dots z_{mi}^{\nu_{mk}}$, $i, k = 1, 2, \dots, \beta$, et ν_{jk} sont des entiers remplissant les conditions
$$0 \leqslant \nu_{jk} \leqslant \nu, \quad 0 \leqslant \nu_{1k} + \nu_{2k} + \dots + \nu_{mk} \leqslant \nu,$$
est une nouvelle fonction génératrice ω de β points $p_1, p_2, \dots, p_\beta$. Le déterminant $|d_{ik}|$ est un polynôme non homogène du degré ν des coordonnées de chacun des points p_i.

2. Quatre suites liées à un ensemble de points. Soit z un point variable dans l'espace R et $p^{(n)}$ un système de $n \geqslant a$ points (1) de R tels que la fonction génératrice $\omega(p_1, p_2, \dots, p_a)$ soit différente de zéro en chaque système de a points différents de $p^{(n)}$. Formons les 4 produits suivants:

$$(12) \quad \begin{aligned} A(z, p^{(n)}) &= \prod_{j=1}^{n} \prod_{\substack{1 \leqslant i_2 < \dots < i_a \leqslant n \\ (i_\nu \neq j)}} \frac{\omega(z, p_{i_2}, \dots, p_{i_a})}{\omega(p_j, p_{i_2}, \dots, p_{i_a})}, \\ B^{(j)}(z, p^{(n)}) &= \prod_{\substack{1 \leqslant i_2 < \dots < i_a \leqslant n \\ (i_\nu \neq j)}} \frac{\omega(z, p_{i_2}, \dots, p_{i_a})}{\omega(p_j, p_{i_2}, \dots, p_{i_a})}, \\ C^{(j)}(z, p^{(n)}) &= \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^{n} \prod_{\substack{1 \leqslant i_3 < i_4 < \dots < i_a \leqslant n \\ (i_\nu \neq j, k)}} \frac{\omega(z, p_j, p_{i_3}, \dots, p_{i_a})}{\omega(p_k, p_j, p_{i_3}, \dots, p_{i_a})}, \\ D^{(j)}(z, p^{(n)}) &= B^{(j)}(z, p^{(n)}) C^{(j)}(z, p^{(n)}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Le nombre des facteurs de ces produits s'exprime respectivement par les formules
$$(13) \quad a_n = a\binom{n}{a}, \quad \beta_n = \binom{n-1}{a-1}, \quad \gamma_n = (a-1)\binom{n-1}{a-1}, \quad \delta_n = a\binom{n-1}{a-1}.$$

Remarquons que les expressions (12), que je désigne plus brièvement par A, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$ et $D^{(j)}$, sont liées par les relations

$$(14)\qquad \prod_{j=1}^{n} B^{(j)} = A\,,\qquad \prod_{j=1}^{n} C^{(j)} = A^{a-1}\,,\qquad \prod_{j=1}^{n} D^{(j)} = A^{a}$$

et par les suivantes

$$(15)\qquad A(z, p^{(n)}) = \begin{cases} D^{(j)}(z, p^{(n)})\, A(z, p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n) & \text{si} \quad n > a\,, \\ D^{(j)}(z, p^{(n)}) & \text{si} \quad n = a\,. \end{cases}$$

Ceci posé, soit E un ensemble compact de points de R. Faisons varier les points du système $p^{(n)}$ dans les formules (12) et désignons par

$$A_n(z, E)\,,\ B_n(z, E)\,,\ C_n(z, E)\,,\ D_n(z, E)\,,$$

ou plus brièvement par

$$(16)\qquad A_n(z)\,,\ B_n(z)\,,\ C_n(z)\,,\ D_n(z)\,,$$

les bornes inférieures respectivement des fonctions

$$A(z, p^{(n)})\,,\ \max_{(j)} B^{(j)}(z, p^{(n)})\,,\ \max_{(j)} C^{(j)}(z, p^{(n)})\,,\ \max_{(j)} D^{(j)}(z, p^{(n)})$$

lorsque, z étant fixé arbitrairement dans R, les points du système $p^{(n)}$ varient arbitrairement dans E. Les fonctions (16) sont définies dans l'espace R tout entier pour chaque $n \geqslant a$ pourvu que l'ensemble E contienne pour chaque $n \geqslant a$ un système de n points $p_1, p_2, \dots, p_n$ tels que $\omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_a}) \neq 0$ pour tout système de a indices $i_1, i_2, \dots, i_a$ remplissant la condition $1 \leqslant i_1 < \dots < i_a \leqslant n$, ce que nous supposerons dans la suite. Cette hypothèse est toujours remplie si $v(E, \omega) > 0$.

Formons maintenant les moyennes

$$(17)\qquad a_n(z) = A_n(z)^{1/\alpha_n}\,,\qquad d_n(z) = D_n(z)^{1/\delta_n}\,,\qquad n = a, a+1, \dots,$$

$$(17')\qquad b_n(z) = B_n(z)^{1/\beta_n}\,,\qquad c_n(z) = C_n(z)^{1/\gamma_n}\,,\qquad n = a, a+1, \dots$$

Chacune de ces quatre moyennes est définie dans R, dépend de l'ensemble E et de la fonction génératrice ω et jouit d'une propriété extrémale par rapport à E et à ω. Si R est l'espace R_m de m variables complexes, les moyennes (17) et (17′) sont des fonctions de m variables complexes.

3. Existence de deux limites. Soient $n > a$, z un point quelconque, mais fixe, de l'espace R et $q^{(n)} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ un système de n points de l'ensemble donné E (dépendant de n et de z) tels que

$$A_n(z) = A(z, q^{(n)}) = \inf_{p^{(n)} \in E} A(z, p^{(n)})\,.$$

D'après (15) on a

$$(18)\qquad \begin{aligned} A_n(z) &= D^{(j)}(z, q^{(n)}) A(z, q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_n) \\ &\geqslant D^{(j)}(z, q^{(n)}) A_{n-1}(z) \end{aligned}$$

pour $j = 1, 2, \dots, n$. Multiplions ces inégalités membre à membre et appliquons la dernière des formules (14); on trouve

$$[A_n(z)]^n \geqslant [A_n(z)]^a [A_{n-1}(z)]^n .$$

Par suite, si $A_n(z) \neq 0$, $A_n(z) \geqslant [A_{n-1}(z)]^{n/(n-a)}$ et comme $\binom{n}{a} = \frac{n}{n-a}\binom{n-1}{a}$ on a

$$a_n(z) \geqslant a_{n-1}(z) \qquad \text{pour} \qquad n = a+1, a+2, \dots$$

ce qui prouve que la limite

$$(19)\qquad \lim_{n\to\infty} a_n(z) = a(z) = a(z, E) ,$$

finie ou infinie, existe quel que soit z.

Je dis que, si $v(E, \omega) > 0$, la limite (19) est finie en tout point de R. Désignons, à cet effet, par $M = M(z)$ la plus grande des valeurs de $\omega(z, p_2, \dots, p_a)$ lorsque, z étant fixé, les points $p_2, \dots, p_a$ parcourent l'ensemble E. D'après la première des formules (12) on a

$$A_n(z) = \inf_{p^{(n)} \in E} A(z, p^{(n)}) \leqslant \inf_{p^{(n)} \in E} \frac{M^{a_n}}{[V(p^{(n)})]^a} = \frac{M^{a_n}}{[V_n(E)]^a},$$

d'où suit l'inégalité $a_n(z) \leqslant M/v_n(E, \omega)$ et finalement $a(z) \leqslant M(z)/v(E, \omega)$. On a donc le

THÉORÈME 1. *La suite $\{a_n(z)\}$ est monotone non décroissante et tend en tout point de R vers une limite $a(z, E)$ finie ou infinie. La limite $a(z, E)$ est partout finie si $v(E, \omega) > 0$.*

Nous allons examiner la suite $\{d_n(z)\}$. Si $n > a$, on a d'après (18)

$$A_n(z) \geqslant [\max_{(j)} D^{(j)}(z, q^{(n)})] A_{n-1}(z) \geqslant D_n(z) A_{n-1}(z)$$

et si $n = a$, la seconde des formules (15) donne $A_a(z) = D_a(z)$ donc

$$A_n(z) \geqslant D_a(z) D_{a+1}(z) \dots D_n(z) ,$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$(20)\qquad a_n(z) \geqslant [d_a^{\delta_a} d_{a+1}^{\delta_{a+1}} \dots d_n^{\delta_n}]^{1/a_n} ,$$

où l'on a posé $d_\nu = d_\nu(z)$, $\nu = a, a+1, \dots$

D'autre part, soit $y^{(n)}$ un système de n points de E tels qu'on ait $D_n(z) = \max\limits_{(j)} D^{(j)}(z, y^{(n)})$. La dernière des relations (14) donne

$$[D_n(z)]^n \geqslant \prod_{j=1}^{n} D^{(j)}(z, y^{(n)}) = [A_n(z, y^{(n)})]^a \geqslant [A_n(z)]^a$$

et cette inégalité entraîne la suivante

$$d_n(z) \geqslant a_n(z) \qquad (n = a, a+1, \ldots)\,. \tag{21}$$

En appliquant maintenant les inégalités (20) et (21) et la relation

$$a_n = \delta_a + \delta_{a+1} + \ldots + \delta_n$$

on déduit du théorème 1 le lemme suivant:

Lemme. *La suite des moyennes*

$$[d_a(z)^{\delta_a} d_{a+1}(z)^{\delta_{a+1}} \ldots d_n(z)^{\delta_n}]^{1/a_n}\,, \qquad n = a, a+1, \ldots \tag{22}$$

tend en tout point de R vers la limite $a(z, E) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n(z)$.

Soit, comme plus haut, $y^{(n)} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ un système de n points de E tels qu'on ait

$$D_n(z) = \max_{(j)} D^{(j)}(z, y^{(n)})\,. \tag{23}$$

Le système $y^{(n)}$ peut naturellement dépendre du point z et de n. Désignons par $y^{(n-1)}$ le système de $n-1$ points $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ et remarquons que, d'après les formules (12), on a identiquement pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$B^{(j)}(z, y^{(n)}) = B^{(j)}(z, y^{(n-1)}) J_1\,, \qquad C^{(j)}(z, y^{(n)}) = C^{(j)}(z, y^{(n-1)}) J_2\,, \tag{24}$$

où l'on a posé

$$J_1 = \prod_{\substack{1 \leqslant i_2 < \ldots < i_a \leqslant n-1 \\ (i_\nu \neq j)}} \frac{\omega(z, y_n, y_{i_2}, \ldots, y_{i_a})}{\omega(y_j, y_n, y_{i_2}, \ldots, y_{i_a})}\,,$$

$$J_2 = \left[\prod_{\substack{1 \leqslant i_2 < \ldots < i_a \leqslant n-1 \\ (i_\nu \neq j)}} \frac{\omega(z, y_j, y_{i_2}, \ldots, y_{i_a})}{\omega(y_n, y_j, y_{i_2}, \ldots, y_{i_a})}\right] \times$$

$$\times \left[\prod_{\substack{k=1 \\ (k\neq j)}}^{n-1} \prod_{\substack{1 \leqslant i_2 < \ldots < i_{a-1} \leqslant n-1 \\ (i_\nu \neq j, k)}} \frac{\omega(z, y_j, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{a-1}}, y_n)}{\omega(y_k, y_j, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{a-1}}, y_n)}\right].$$

Pour évaluer les expressions J_1 et J_2 désignons par $l(z)$ la valeur du plus petit des quotients

$$\frac{\omega(z, y_{i_2}, \ldots, y_{i_a})}{\omega(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_a})}$$

lorsque, z étant fixé dans l'espace R, les indices $i_1, i_2, \ldots, i_a$ parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$ pour $n = a+1, a+2, \ldots$; alors

$$J_1 \geqslant l(z)^{\binom{n-2}{a-2}}, \quad J_2 \geqslant l(z)^{(a-1)\binom{n-2}{a-2}}.$$

Les formules (23) et (24) donnent

$$D_n(z) \geqslant D^{(j)}(z, y^{(n-1)})\, l(z)^{a\binom{n-2}{a-2}} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, n-1;$$

par suite

$$D_n(z) \geqslant D_{n-1}(z)\, l(z)^{a\binom{n-2}{a-2}}$$

et comme

$$D_k(z) = d_k(z)^{a\binom{k-1}{a-1}}, \quad k = a, a+1, \ldots,$$

on trouve finalement l'inégalité

$$d_n(z) \geqslant d_{n-1}(z)^{1-\frac{a-1}{n-1}}\, l(z)^{\frac{a-1}{n-1}}, \quad n = a, a+1, \ldots \tag{25}$$

Le lemme précédent et les inégalités (21) et (25) permettent de démontrer le

Théorème 2. *La suite $\{d_n(z)\}$ tend en tout point de R vers une limite*

$$\lim_{n\to\infty} d_n(z) = d(z, E), \tag{26}$$

finie ou infinie, et on a identiquement $d(z, E) = a(z, E)$.

En effet, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(z) = \infty$, il suit de (21) que $\lim\limits_{n\to\infty} d_n(z) = \infty$. D'autre part, si $a_n(z)$ tend vers une limite finie la suite $\{d_n(z)\}$ tend vers la même limite en vertu des résultats précédents et du lemme connu [1] suivant:

Si une suite $\{d_n\}$ à termes positifs remplit les conditions (k, l et a — nombres positifs quelconques):

1° $d_n \geqslant d_{n-1}^{1-\frac{k}{n-1}}\, l^{\frac{k}{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$,

2° $\sqrt[n]{d_1 d_2 \ldots d_n} \to a$

3° $\liminf\limits_{n\to\infty} d_n \geqslant a$,

alors d_n converge vers a.

Pour indiquer que la fonction $a(z, E)$ dépend de $\omega(p_1, \ldots, p_a)$, nous la désignerons aussi par $a(z, E, \omega)$.

4. Le cas particulier $a = 2$. Dans le cas $a = 2$ la fonction génératrice ω ne dépend que de deux points p_1 et p_2 variables dans R. Dans ce cas j'ai démontré ailleurs (cf. [4], p. 261 ou [2] et [3]) que:

1° Si $v(E, \omega)$ est positif, les suites (17'), $\{b_n(z)\}$ et $\{c_n(z)\}$ convergent, comme les suites (17), en tout point de R vers des limites finies

$$\lim_{n\to\infty} b_n(z) = b(z, E), \quad \lim_{n\to\infty} c_n(z) = c(z, E)\ (^1)\,. \tag{27}$$

2° Lorsque R est le plan et $\omega(p_1, p_2)$ se réduit à la distance $|p_1p_2|$ des points p_1 et p_2, le logarithme de la fonction limite $b(z, E)$ est identique à la fonction de Green (classique ou généralisée) du domaine non borné $D(E)$ contenu dans l'ensemble complémentaire de E; par suite $b(z, E)$ tend vers 1 lorsque z tend vers la frontière du domaine $D(E)$.

Les propriétés des fonctions $a(z, E)$, $b(z, E)$ et $c(z, E)$ dépendent naturellement de l'espace R, de l'ensemble E et de la fonction $\omega(p_1, p_2)$. De nombreuses propriétés de $b(z, E)$ ont été découvertes par J. Górski, W. Kleiner, J. Siciak, et A. Szybiak (cf. Ann. Soc. Pol. Math., années 1949-1952 et Ann. Pol. Math., années 1954-1961). La fonction $b(z, E)$ a été appliquée à la représentation conforme des domaines dans le plan et à la résolution du problème de Dirichlet dans des espaces euclidiens quelconques.

Dernièrement W. Bach a réussi à prouver que si R est le plan et si $\omega(p_1, p_2)$ se réduit à la distance $|p_1p_2|$ des points p_1 et p_2 les fonctions limite (27) sont identiques

$$b(z, E) = c(z, E) \tag{28}$$

et les fonctions $a(z, E)$ et $b(z, E)$ satisfont partout à l'inégalité

$$a(z, E) < b(z, E)\,.\ (^2) \tag{29}$$

5. Problèmes à résoudre. Dans le cas $a > 2$ les problèmes suivants se posent:

1° Les suites (17') sont-elles convergentes aussi pour $a > 2$, au moins si $v(E, \omega) > 0$? La méthode de démonstration de la convergence dont je me suis servi dans le cas $a = 2$ ne s'applique pas au cas $a > 2$.

2° Si les limites (27) existent pour $a > 2$, dans quelles conditions l'égalité (28) a-t-elle lieu?

3° Si la première des limites (27) existe pour $a > 2$, peuton affirmer que l'inégalité (29) a lieu au moins dans le cas où ω est le module du déterminant défini dans l'exemple 1 ou 3?

4° Supposons que R soit l'espace de $m \geqslant 2$ variables complexes, que la fonction ω soit définie comme dans l'exemple 3 et que

---

(1) L'existence de la limite $c(z, E)$ n'a été démontrée que dans le cas où R est le plan et $\omega(p_1, p_2)$ se réduit à la distance des points p_1 et p_2, mais la démonstration dans le cas général est analogue.

(2) Les résultats de Bach ne sont pas encore publiés.

$q^{(n)} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ soit un système de points extrémaux de l'ensemble E tels que

$$\Delta^{(1)}(q^{(n)}) = \min_{(j)} \Delta^{(j)}(q^{(n)}) .$$

L'expression $B^{(1)}(z, q^{(n)})$ est alors le module d'un polynôme de m variables complexes. Examiner si la suite

$$[B^{(1)}(z, q^{(n)})]^{1/\binom{n-1}{a-1}}, \qquad n = a, a+1, \dots$$

est convergente et si sa limite est égale à $b(z, E)$ lorsque la première des limites (27) existe.

5° Soit $q^{(n)}$ un système de points extrémaux de l'ensemble E par rapport à la fonction génératrice $\omega(p_1, \dots, p_a)$. Alors pour tout point z de E on a $B^{(j)}(z, q^{(n)}) \leqslant 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, car si l'on avait $B^{(j)}(z, q^{(n)}) > 1$ en un point $z = q_j'$ de E, on aurait

$$\prod_{\substack{1 \leqslant i_2 < \dots < i_a \leqslant n \\ (i_\nu \neq j)}} \omega(q_j', q_{i_2}, \dots, q_{i_a}) > \prod_{\substack{1 \leqslant i_2 < \dots < i_a \leqslant n \\ (i_\nu \neq j)}} \omega(q_j, q_{i_2}, \dots, q_{i_a})$$

d'où il suivrait que $V(q_1, \dots, q_{j-1}, q_j', q_{j+1}, \dots, q_n) > V(q^{(n)})$ ce qui reste en contradiction avec le fait que le produit $V(q^{(n)})$ est le plus grand. Par suite $B_n(z) \leqslant \max_{(j)} B^{(j)}(z, q^{(n)}) \leqslant 1$ et enfin

$$b_n(z, E) \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad z \in E . \tag{30}$$

Supposons que la première des limites (27) existe; alors on a $b(z, E) \leqslant 1$ dans E. Examiner dans quelles conditions

$$b(z, E) = 1 \quad \text{pour} \quad z \in E \quad \text{et} \quad \lim_{z \to z_0 \in E} b(z, E) = 1?$$

Travaux cités

[1] F. Leja, *Sur certaines limites relatives aux polynômes de Lagrange et aux ensembles fermés*, Bull. de l'Acad. Polon. des Sc. et des Lettres, Sc. Math. 1933, p. 281-289.

[2] — *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 57-71.

[3] — *Sur une suite de fonctions liées aux ensembles plans fermés*, Ann. Soc. Pol. Math. 13 (1935), p. 53-58.

[4] — *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957.

Reçu par la Rédaction le 9. 9. 1961