ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVIII (1973)

Sur une classe de fonctions univalentes

par Cz. Bucka et K. Ciozda (Lublin)

Résumé. Dans le travail on étudie la classe S_a^γ des fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle unité K_1 et satisfaisant aux conditions:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} = [(1-a)p^\gamma(z)+a],$$

où $p(z) \in P$, $0 \leqslant a < 1$, $0 < \gamma \leqslant 1$.

Pour $\gamma = 1$ et $a = 0$ on obtient la classe S^*, pour $\gamma = 1$ et $a \in \langle 0, 1)$ — la classe S_a^* enfin pour $a = 0$ et $\gamma \in (0, 1\rangle$ la classe S_γ [3].

Dans la classe S_a^γ on donne la formule structurelle, on détermine le domaine de variation de la fonctionnelle $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ et on trouve les limitations supérieure et inférieure des modules de la fonction et de la dérivée. On détermine aussi la fonction extrémale et on trouve les limitations de a_2 et a_3 dans cette classe. Ces résultats sont contenus respectivement dans les théorèmes 1, 2, 3, 4, 5. Les limitations obtenues sont exactes.

1. Notations. Désignons par S la classe des fonctions $f(z)$ de la forme

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \tag{1.1}$$

régulières et univalentes dans le cercle K_1, où $K_r = \{z\colon |z| < r\}$. Soit $S^* \subset S$ la classe des fonctions étoilées par rapport à l'origine, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \quad \text{pour} \quad z \in K_1. \tag{1.2}$$

Par $S_a \subset S$ nous désignerons la classe des fonctions $f(z)$ de la forme (1.1) qui satisfont à la condition

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqslant a\cdot\frac{\pi}{2}, \quad z \in K_1,\ 0 < a \leqslant 1. \tag{1.3}$$

Cette classe a été étudiée par D. A. Brannan et W. E. Kirwan [1], ainsi que par J. Stankiewicz [3].

Désignons encore par $S_\alpha^* \subset S$ la classe des fonctions α-étoilées, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad z\in K_1,\ 0\leqslant \alpha < 1. \tag{1.4}$$

Soit P la classe des fonctions $p(z) = 1+p_1 z+p_2 z^2+\ldots$ régulières dans K_1 et satisfaisant à la condition

$$\mathrm{Re}\, p(z) > 0 \quad \text{pour} \quad z\in K_1. \tag{1.5}$$

Désignons enfin par $S^*_{(\alpha,\beta)}$ la classe des fonctions $f(z) = z+a_2z^2+\ldots$ égulières dans K_1 et satisfaisant à la condition

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left[(1-\alpha)\frac{1+z}{1-z}+\alpha\right]^{2\beta/\pi}, \quad 0<\alpha\leqslant 1,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi/2,\ z\in K_1. \tag{1.6}$$

Cette classe a été étudiée par A. Wesołowski [4].

2. La classe S_α^γ. Dans les définitions des classes S_α^*, S_α, $S^*_{(\alpha,\beta)}$ on demande que l'expression $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ soit dans un domaine univalent contenant le point $w = 1$ et contenu dans le demi-plan droit. Considérons donc la classe S_α^γ des fonctions $f(z) = z+a_2z^2+\ldots$ telles que l'expression $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ soit dans le domaine $F(K_1)$, où

$$F(z) = \left[(1-\alpha)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\gamma+\alpha\right]\in P$$

est une fonction univalente dans K_1 et telle que $0\leqslant\alpha<1$, $0<\gamma\leqslant 1$, $z\in K_1$. Le domaine $F(K_1)$ est un angle symétrique par rapport à l'axe réel, de sommet α et d'ouverture $\gamma\pi$. Cette définition de la classe S_α^γ semble plus naturelle que celle de la classe $S^*_{(\alpha,\beta)}$ et son étude présente un certain intérêt, car dans les cas limites cette classe se confond avec les classes étudiées jusqu'à présent par différents auteurs. On a, en effet:

$$S_0^\gamma = S_\gamma,$$
$$S_\alpha^1 = S_\alpha^*,$$
$$S_0^1 = S^*.$$

3. Limitations de quelques fonctionnelles dans la classe S_α^γ.

THÉORÈME 1. *La fonction $f(z)$ appartient à la classe S_α^γ si et seulement s'il existe une fonction $p(z)$ de la classe P telle que*

$$f(z) = z\exp\int_0^z \frac{1-\alpha}{z}[p^\gamma(z)-1]\,dz. \tag{3.1}$$

Démonstration. En effet, la définition de la classe S_α^γ implique directement que $f(z) \in S_\alpha^\gamma$ si et seulement s'il existe une fonction $p(z) \in P$ telle que

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = (1-\alpha)p^\gamma(z) + \alpha.$$

De là on tire

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z}[(1-\alpha)p^\gamma(z) + \alpha - 1],$$

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \int_0^z \frac{1}{z}[(1-\alpha)p^\gamma(z) + \alpha - 1]dz,$$

$$f(z) = z\exp\left\{\int_0^z \frac{1}{z}(1-\alpha)[p^\gamma(z) - 1]dz\right\}.$$

La formule (3.1) sera appelée formule structurelle de la classe S_α^γ.

Théorème 2. *Dans la classe S_α^γ, pour tout z fixé, $|z| = r$, $r < 1$, le domaine de variation de l'expression $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ est un domaine fermé, convexe, limité par la courbe:*

$$w = (1-\alpha)\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)^\gamma + \alpha, \quad où \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{3.2}$$

Démonstration. Cela résulte directement du fait que

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \alpha + (1-\alpha)p^\gamma(z)$$

et que le domaine de variation de $p(z)$, $|z| = r$, est l'image du cercle $|z| \leqslant r$ dans la transformation $w = \frac{1+z}{1-z}$, $|z| = r$.

Les considérations précédentes mènent ainsi aux limitations exactes suivantes:

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\gamma (1-\alpha) \leqslant \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha\right| \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\gamma (1-\alpha), \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\gamma (1-\alpha) + \alpha \leqslant \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\gamma (1-\alpha) + \alpha. \tag{3.4}$$

Dans les cas limites on en tire les limitations connues dans les classes des fonctions correspondantes.

THÉORÈME 3. *Pour les fonctions* $f(z)\in S_a^\gamma$, $|z| = r < 1$, *on a la limitation exacte:*

$$r\exp\int_0^r \frac{1-a}{r}\left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\gamma-1\right]dr \leqslant |f(z)| \leqslant r\exp\int_0^r \frac{1-a}{r}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\gamma-1\right]dr, \tag{3.5}$$

$$\left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\gamma(1-a)+a\right]\exp\int_0^r \frac{1-a}{r}\left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\gamma-1\right]dr \leqslant |f'(z)| \tag{3.6}$$

$$\leqslant \left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\gamma(1-a)+a\right]\exp\int_0^r \frac{1-a}{r}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\gamma-1\right]dr.$$

La fonction extrémale est la fonction donnée par la formule

$$f(z) = z\exp\int_0^z \frac{1-a}{z}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\gamma-1\right]dz. \tag{3.7}$$

Démonstration. En dérivant et en multipliant par r les deux membres de l'égalité

$$\ln\frac{f(z)}{z} = \ln\left|\frac{f(z)}{z}\right| + i\arg\frac{f(z)}{z}$$

on obtient

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1+r\frac{\partial}{\partial r}\ln\left|\frac{f(z)}{z}\right| + ir\frac{\partial}{\partial r}\arg\frac{f(z)}{z}, \qquad \text{où} \qquad z = re^{i\theta},$$

donc

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1+r\frac{\partial}{\partial r}\ln\left|\frac{f(z)}{z}\right|.$$

En profitant de (3.4) on trouve

$$(1-a)\left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\gamma-1\right] \leqslant r\frac{\partial}{r\partial}\ln\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant (1-a)\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\gamma-1\right].$$

Divisant les deux membres par r et intégrant de 0 à r on obtient les inégalités (3.5). La seconde partie du théorème résulte directement de (3.3) et (3.5).

Dans le cas où $a = 0$, $\gamma\in(0, 1\rangle$ on obtient les limitations connues dans la classe S_γ [3]:

$$r\exp\left\{\int_0^r \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\gamma-1\right]dr\right\} \leqslant |f(z)| \leqslant r\exp\left\{\int_0^r \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\gamma-1\right]dr\right\},$$

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\gamma\exp\left\{\int_0^r \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\gamma-1\right]dr\right\} \leqslant |f'(z)|$$

$$\leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\gamma\exp\left\{\int_0^r \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\gamma-1\right]dr\right\}.$$

Si $\alpha = 0$, $\gamma = 1$, les limitations (3.5) et (3.6) fournissent les limitations connues dans la classe S:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}; \quad \frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Enfin, dans le cas où $\gamma = 1$ on en tire les limitations dans la classe S_α^*:

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}; \quad \frac{r}{(1+r)^{3(1-\alpha)}} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^{3(1-\alpha)}}.$$

THÉORÈME 4. *Si* $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \in S_\alpha^\gamma$, *on a*

$$|a_2| \leqslant 2\gamma(1-\alpha).$$

La fonction extrémale est la fonction donnée par la formule (3.7).

Démonstration. Soit $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots \in P$. De la formule (3.1) on tire

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = (1-\alpha)[p(z)]^\gamma + \alpha;$$

d'où

$$f''(0) = 2(1-\alpha)\gamma[p(0)]^{\gamma-1}p'(0).$$

Comme $a_2 = f''(0)/2$, $p(0) = 1$ et $p'(0) = p_1$, on a $a_2 = (1-\alpha)\gamma p_1$. Puisque $|p_1| \leqslant 2$, il s'ensuit

$$|a_2| \leqslant 2\gamma(1-\alpha).$$

Pour la fonction (3.7) $p(z) = (1+z)/(1-z)$ et $p_1 = 2$, la limitation de $|a_2|$ est donc exacte, c.q.f.d.

Par un raisonnement analogue au précédent on tire de la formule structurelle

$$a_3 = \frac{(1-\alpha)\gamma}{4}\{(3\gamma - 2\gamma\alpha - 1)p_1^2 + 2p_2\}.$$

THÉORÈME 5. *Si* $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \in S_\alpha^\gamma$, *on a la limitation exacte*:

(a) $$|a_3| \leqslant (1-\alpha)(3-2\alpha)\gamma^2 \quad \textit{pour} \quad \frac{1}{3-2\alpha} < \gamma < 1,$$

(b) $$|a_3| \leqslant (1-\alpha)\gamma \quad \textit{pour} \quad 0 < \gamma < \frac{1}{3-2\alpha}.$$

Les fonctions extrémales sont dans les cas (a) *et* (b) *respectivement les fonctions*:

$$f_1(z) = z\exp\left\{\int_0^z \frac{1-\alpha}{z}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\gamma - 1\right]dz\right\},$$

$$f_2(z) = z\exp\left\{\int_0^z \frac{1-\alpha}{z}\left[\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^\gamma - 1\right]dz\right\}.$$

Démonstration. Dans le cas où l'expression $(3\gamma-2\gamma\alpha-1)$ est positive, c'est-à-dire si $1/(3-2\alpha)<\gamma<1$, la limitation (a) résulte directement de l'expression obtenue pour a_3 en profitant de l'inégalité $|p_n|\leqslant 2$.

Si, au contraire, l'expression $(3\gamma-2\gamma\alpha-1)$ est négative, c'est-à-dire si $0<\gamma<1/(3-2\alpha)$, la limitation (b) s'obtient comme il suit: si $w(z) = w_1z+w_2z^2+\ldots$ est une fonction régulière dans K_1 et satisfaisant aux hypothèses du lemme de Schwarz, on sait qu'il existe une fonction $p(z) = 1+p_1z+p_2z^2+\ldots$, de partie réelle positive, telle que

$$w(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1}.$$

Par un simple calcul on trouve: $p_1 = 2w_1, p_2 = 2(w_1^2+w_2)$. Le coefficient a_3 s'exprime donc sous la forme:

$$\begin{aligned}|a_3| &= \frac{(1-\alpha)\gamma}{4}\,|(3\gamma-2\gamma\alpha-1)4w_1^2+4(w_1^2+w_2)|\\ &= (1-\alpha)\gamma\,|(3\gamma-2\gamma\alpha-1)w_1^2+w_1^2+w_2|\\ &= (1-\alpha)\gamma\,|w_2+(1+3\gamma-2\gamma\alpha-1)w_1^2|\\ &= (1-\alpha)\gamma\,|w_2+(3\gamma-2\gamma\alpha)w_1^2|,\end{aligned}$$

où $3\gamma-2\gamma\alpha>0$.

En profitant de l'inégalité connue [2]:

$$|w_2|\leqslant 1-|w_1|^2$$

on obtient

$$\begin{aligned}|w_2+(3\gamma-2\gamma\alpha)w_1^2| &\leqslant |w_2|+(3\gamma-2\gamma\alpha)|\,|w_1|^2\\ &\leqslant 1-|w_1|^2+(3\gamma-2\gamma\alpha)\,|w_1|^2\\ &\leqslant 1-(1-3\gamma+2\gamma\alpha)\,|w_1|^2.\end{aligned}$$

Mais $(1-3\gamma+2\gamma\alpha)<1$, donc $|w_2+(3\gamma-2\gamma\alpha)w_1^2|\leqslant 1$, d'où

$$|a_3|\leqslant(1-\alpha)\gamma.$$

Dans les cas limites on obtient: dans la classe S^*: $|a_3|\leqslant 3$, dans la classe $S\gamma$: $|a_3|\leqslant\gamma$ pour $0<\gamma<\frac{1}{3}$ et $|a_3|\leqslant 3\gamma^2$ pour $\frac{1}{3}<\gamma<1$, enfin dans la classe S_α^*: $|a_3|\leqslant(1-\alpha)(3-2\alpha)$.

Références

[1] D. A. Brannan, W. E. Kirwan, *On some classes of bounded univalent functions*, J. London Math. Soc., Second series, 1 (1969), p. 431–433.

[2] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва 1966.

[3] J. Stankiewicz, *Some remarks concerning starlike functions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), p. 721–734.

[4] A. Wesołowski, *Sur les sous-classes de la classe des fonctions étoilées*, ibidem 19 (1971), p. 577–585.

Reçu par la Rédaction le 12. 4. 1972