ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

# Sur un problème de S. Gołąb

par E. SIWEK (Katowice) et A. ZAJTZ (Kraków)

**§ 1. Introduction.** Soit $S$ une surface fermée de classe $C^2$ de régularité dans l'espace euclidien à trois dimensions, donnée par les équations paramétriques de la forme

$$(1) \qquad x^k = x^k(\sigma, \tau), \quad (\sigma, \tau) \in D, \quad k = 1, 2, 3,$$

et soient $\varkappa_1(\sigma, \tau)$ et $\varkappa_2(\sigma, \tau)$ les courbures principales de la surface $S$ en un point correspondant aux valeurs $(\sigma, \tau)$ des paramètres. S'il existe un critère invariant de numérotage des fonctions $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ sur toute la surface $S$, on peut considérer les intégrales

$$(2) \qquad I_i \stackrel{\text{df}}{=} \iint_S \varkappa_i d\omega, \quad i = 1, 2,$$

où $d\omega$ désigne l'élément d'aire de la surface $S$. Comme $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ n'expriment pas des quantités intrinsèques, les intégrales $I_1$ et $I_2$ doivent dépendre de la forme géométrique de la surface $S$. En effet, on a

$$I_1 + I_2 = \iint_S (\varkappa_1 + \varkappa_2) d\omega = \iint_S H d\omega,$$

où $H$ désigne la courbure moyenne de la surface $S$. La dernière intégrale, comme l'a montré H. Minkowski, exprime la distance moyenne des plans tangents à la surface $S$ en un point fixe situé à l'intérieur de la surface $S$ et, par conséquent, la somme $I_1 + I_2$ ainsi que les intégrales $I_1$ et $I_2$ dépendent de la forme géométrique et de la grandeur de la surface $S$.

Gołąb (1) à posé le problème de l'évaluation des intégrales $I_1$ et $I_2$ par le diamètre $d$ et largeur $h$ de la surface $S$, ou bien par d'autres quantités globales liées à cette surface. Le problème dépend évidemment de la définition des fonctions $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ sur toute la surface $S$.

---

(1) S. Gołąb, *Sur un théorème de la géométrie différentielle globale*, Ann. Polon. Math. 12 (1962), pp. 39-47.

Dans le cas où $S$ est une surface de révolution on peut définir les fonctions $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ de la façon suivante:

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\varkappa_1 \text{ est la courbure dans le sens des parallèles,}\\ &\varkappa_2 \text{ est la courbure dans le sens des méridiens.}\end{aligned}$$

En supposant que $S$ est une surface de révolution de genre 0 et que les fonctions $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ sont définies par (3), M. S. Gołąb a donné les formules suivantes

$$(4)\qquad I_1 = 2\pi h\,,$$

$$(5)\qquad \frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\frac{s}{h} < I_2 < \pi^2 s\,,$$

où $h$ désigne la largeur de la surface $S$ dans le sens de l'axe de révolution et $s$ est la largeur dans le sens perpendiculaire à celui-ci. L'évaluation (5) a été obtenue sous l'hypothèse supplémentaire de la convexité de la surface $S$. Pourtant l'évaluation $\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\frac{s}{h}$ n'est pas exacte.

Le but de cette note est de donner des formules analogues à (4) et (5) aussi pour les surfaces de révolution de genre 1; cependant les évaluations que nous donnerons pour l'intégrale $I_2$ seront exactes. Nous utiliserons naturellement la définition (3) des fonctions $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$.

**§ 2. Théorèmes sur l'intégrale $I_1$.** Comme $S$ est une surface de révolution nous pouvons désigner par $\sigma$ l'arc de son méridien, par $\tau$ l'angle de révolution et présenter les équations (1) sous la forme

$$(6)\qquad x = x(\sigma)\cos\tau\,,\quad y = x(\sigma)\sin\tau\,,\quad z = z(\sigma)\,,$$

où $0 \leqslant \sigma \leqslant L$ et $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$. Alors il est facile de calculer les courbures $\varkappa_1(\sigma,\tau)$ et $\varkappa_2(\sigma,\tau)$, qui s'expriment par les formules

$$(7)\qquad \varkappa_1(\sigma,\tau) = \frac{z'(\sigma)}{x(\sigma)}\,,\quad \varkappa_2(\sigma,\tau) = x'(\sigma)z''(\sigma) - z'(\sigma)x''(\sigma) = \varkappa(\sigma),$$

où $\varkappa(\sigma)$ est en même temps la courbure du méridien de la surface $S$. On a aussi

$$(8)\qquad d\omega = \sqrt{x^2(\sigma)}\,d\sigma\,d\tau = x(\sigma)\,d\sigma\,d\tau\,.$$

D'après (7) et (8) on obtient

$$(9)\qquad I_1 = \iint_S \varkappa_1\,d\omega = \iint_R z'(\sigma)\,d\sigma\,d\tau$$

et

$$(10)\qquad I_2 = \iint_S \varkappa_2\,d\omega = \iint_R x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma\,d\tau\,,$$

où

$$R = \{(u, v)\colon\ 0 \leqslant \sigma \leqslant L,\ 0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi\}\ . \tag{11}$$

D'après (9) et (11) on a

$$I_1 = 2\pi[z(L) - z(0)]\ . \tag{12}$$

Dans le cas où $S$ est une surface de genre 1 son méridien est une courbe simple fermée, on a donc

$$z(0) = z(L)$$

et nous obtenons, en vertu de la formule (12), le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour toute surface de révolution $S$ de classe $C^2$ et de genre* 1 *on a*

$$I_1 = \iint\limits_S \varkappa_1 d\omega = 0\ .$$

Remarquons que dans le cas où $S$ est une surface de genre 0 la formule (12) n'implique pas en général la formule (4), parce que dans ce cas on a

$$0 < z(L) - z(0) \leqslant h\ .$$

La condition

$$z(L) - z(0) = h$$

exige une hypothèse supplémentaire. Par exemple, la convexité du méridien de la surface $S$ est une telle hypothèse suffisante.

Ainsi nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Pour toute surface de révolution $S$ de classe $C^2$ et de genre* 0 *on a*

$$0 < I_1 = \iint\limits_S \varkappa_1 d\omega \leqslant 2\pi h\ ,$$

*où $h$ est la largeur de la surface $S$ dans le sens de l'axe de révolution. Si, en outre, la surface est convexe, on a*

$$I_1 = \iint\limits_S \varkappa_1 d\omega = 2\pi h\ .$$

**§ 3. Deux lemmes.** Maintenant nous allons établir certains lemmes. Soit $\Gamma$ un arc plan représenté, dans un système de coordonnées $u, v$, par l'équation $v = v(u)$, $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$. Désignons par $\eta(u)$ l'angle entre l'axe $v$ des $v$ et le vecteur $\boldsymbol{t}(u)$ tangent à $\Gamma$ au point $\big(u, v(u)\big)$. Supposons la fonction $\eta(u)$ croissante dans l'intervale $[u_1, u_2]$, satisfaisant à l'inégalité

$$0 \leqslant \eta(u) \leqslant \pi/2 \qquad \text{pour } u_1 \leqslant u \leqslant u_2\ ,$$

et admettons les notations suivantes:

$$u_0 = \tfrac{1}{2}(u_1 + u_2)\,,$$

$P_i$ — point de coordonnées $(u_i, v(u_i))$ pour $i = 0, 1, 2$;

$$\alpha_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \sphericalangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0)\,, \quad \alpha_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \sphericalangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)\,, \quad \alpha_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \sphericalangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)\,.$$

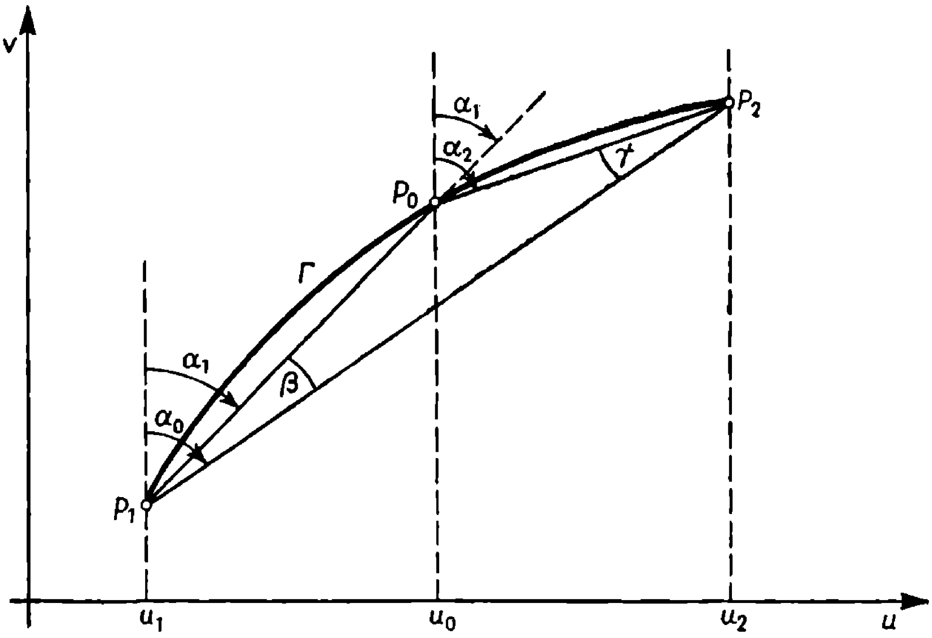


Fig. 1

Lemme 1. *On a*

$$\alpha_1 + \alpha_2 > 2\alpha_0\,.$$

Démonstration. Posons encore

$$\beta \overset{\mathrm{df}}{=} \sphericalangle(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2) \quad \text{et} \quad \gamma \overset{\mathrm{df}}{=} \sphericalangle(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2)\,.$$

Comme $\alpha_2 - \alpha_1$ est un angle extérieur du triangle $P_1P_0P_2$, on a

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \beta + \gamma\,,$$

donc aussi

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1 + \beta + \gamma\,. \tag{13}$$

Sous nos hypothèses sur la fonction $\eta(u)$ on doit avoir

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \pi/2\,.$$

Cela entraîne, en vertu des définitions de $u_0$ et $P_0$, l'inégalité

$$|P_1P_0| \geqslant |P_0P_2|\,,$$

donc aussi

$$\gamma \geqslant \beta\,.$$

D'après (13) il s'ensuit

$$a_1 + a_2 \geqslant 2a_1 + 2\beta .$$

Puisque $a_1 + \beta = a_0$, notre lemme se trouve ainsi démontré.

LEMME 2. *Avec les notations et les hypothèses précédentes on a*

$$\int_{u_1}^{u_2} \eta(u)\,du \geqslant (u_2 - u_1)\,a_0 .$$

Démonstration. Posons

$$\Delta \overset{\mathrm{df}}{=} u_2 - u_1 , \quad \Delta^n \overset{\mathrm{df}}{=} 2^{-n}\Delta , \quad u_k^n \overset{\mathrm{df}}{=} u_1 + k\Delta_n \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, 2^n ,$$

$$a_n^i \overset{\mathrm{df}}{=} \sphericalangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{P}_{i-1}^n \boldsymbol{P}_i^n) \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, 2^n ,$$

où $P_k^n$ est le point de $\Gamma$ de coordonnées $\big(u_k^n, v(u_k^n)\big)$.

D'après le lemme 1 on a

$$a_1^1 \Delta^1 + a_2^1 \Delta^1 = (a_2^1 + a_2^1)\Delta^1 \geqslant a_0 2\Delta^1 = a_0 \Delta .$$

En appliquant le lemme 1 à chaque intervalle $[u_{i-1}^{n-1}, u_i^{n-1}]$ on obtient par récurrence les inégalités

$$\sum_{i=1}^{2^n} a_i^n \Delta^n \geqslant \sum_{i=1}^{2^{n-1}} a_i^{i-1} \Delta^{n-1} \geqslant a_0 \Delta .$$

Puisque

$$\inf_{[u_{i-1}^n, u_i^n]} \eta(u) \leqslant a_i^n \leqslant \sup_{[u_{i-1}^n, u_i^n]} \eta(u)$$

et que la fonction $\eta(u)$ est intégrable dans l'intervalle $[u_1, u_2]$, on a

$$a_0 \Delta \leqslant \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} a_i^n \Delta^n = \int_{u_1}^{u_2} \eta(u)\,du$$

et notre lemme se trouve ainsi démontré.

**§ 4. Évaluations pour l'intégrale $I_2$ dans le cas où $S$ est de genre 0.** Comme l'intégrale $I_2$ peut être mise, en vertu de (10) et (11), sous la forme

$$(14) \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^L x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma = 2\pi \int_0^L x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma$$

il s'agit de donner des évaluations pour l'intégrale

$$I \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^L x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma \tag{15}$$

qui ne dépend que du méridien $C$ de la surface $S$.

La surface $S$ étant donnée par les équations (6), son méridien $C$ s'exprime par les équations de la forme

$$x = x(\sigma)\,, \quad z = z(\sigma) \quad \text{où } 0 \leqslant \sigma \leqslant L\,.$$

Comme la surface $S$ est fermée, le méridien $C$ est borné et nous le supposons en outre *convexe*.

Dans le cas où $S$ est une surface de genre 0 on a

$$x(0) = x(L) = 0\,, \quad \max_{0\leqslant\sigma\leqslant L} x(\sigma) = s/2\,,$$

où $s$ désigne la largeur de la surface $S$ dans le sens perpendiculaire à l'axe de révolution. En outre, nous pouvons supposer (sans nuire à la généralité des considérations) que la fonction $z(\sigma)$ satisfait aux conditions

$$z(0) = \max_{0\leqslant\sigma\leqslant L} x(\sigma)\,, \quad z(L) = \min_{0\leqslant\sigma\leqslant L} z(\sigma)\,,$$

et poser

$$h = z(0) - z(L)\,, \quad h_1 = z(0) - z(L_1)\,, \quad h_2 = z(L_2) - z(L)\,,$$

où $L_1$ et $L_2$ sont des valeurs de $\sigma$ déterminées par les conditions

$$x(L_1) = x(L_2) = s/2\,, \quad x(\sigma) < s/2 \quad \text{pour } \sigma < L_1 \text{ et } \sigma > L_2\,.$$

Désignons encore par $\Theta(\sigma)$ l'angle entre l'axe des $z$ et le vecteur $t(\sigma)$ tangent à $C$ et partageons le méridien $C$ en trois arcs $C_1$, $C^*$, et $C_2$ correspondant aux intervalles resp. $[0, L_1]$, $[L_1, L_2]$, et $[L_2, L]$ pour $\sigma$. Comme dans chaque intervalle $[0, L_1]$ et $[L_2, L]$ la fonction $x(\sigma)$ admet une inverse, les arcs $C_i$ pour $i = 1, 2$ peuvent être représentés par les équations de la forme

$$z = f_i(x) = z[\sigma_i(x)]\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{16}$$

où $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont les fonctions inverses de la fonction $x(\sigma)$ resp. dans les intervalles $[0, L_1]$ et $[L_2, L]$.

Comme on a

$$\Theta'(\sigma) = \varkappa(\sigma)\,,$$

l'intégrale $I$ peut être transformée de la manière suivante:

$$I = \int_0^L x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma = x(\sigma)\varkappa(\sigma)\Big|_0^L - \int_0^L \Theta(\sigma)x'(\sigma)\,d\sigma = -\int_0^L \Theta(\sigma)x'(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Comme $x'(\sigma) = 0$ dans l'intervalle $[L_1, L_2]$, il s'ensuit

$$I = \int_0^{s/2} \Theta_2(x)\,dx - \int_0^{s/2} \Theta_1(x)\,dx \,, \tag{17}$$

où nous avons posé

$$\Theta_i(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \Theta[\sigma_i(x)] \,.$$

En changeant dans les équations (16) les variables par les formules

$$x = s/2 - u \,, \quad z = v \text{ pour } i = 1 \quad \text{et} \quad z = -v \text{ pour } i = 2$$

nous constatons que les arcs $C_1$ et $C_2$ satisfont aux hypothèses faites sur l'arc $\Gamma$ au paragraphe 3, où les fonctions $\eta_i(u)$, $i = 1, 2$, s'expriment par les formules

$$\eta_1(u) = \pi - \Theta_1(s/2 - u) \,, \qquad \eta_2(u) = \Theta_2(s/2 - u) - \pi \,.$$

En utilisant notre lemme 2 nous obtenons les inégalités suivantes:

$$\int_0^{s/2} \eta_1(u)\,du = \frac{s\pi}{2} - \int_0^{s/2} \Theta_1(x)\,dx \geqslant \frac{s}{2}\operatorname{arc tg}\frac{s}{2h_1} \,,$$

$$\int_0^{s/2} \eta_2(u)\,du = \int_0^{s/2} \Theta_2(x)\,dx - \frac{s\pi}{2} \geqslant \frac{s}{2}\operatorname{arc tg}\frac{s}{2h_2} \,,$$

et par suite

$$\int_0^{s/2} \Theta_1(x)\,dx \leqslant \frac{s}{2}\left(\pi - \operatorname{arc tg}\frac{s}{2h_1}\right) ,$$

$$\int_0^{s/2} \Theta_2(x)\,dx \geqslant \frac{s}{2}\left(\pi + \operatorname{arc tg}\frac{s}{2h_2}\right) .$$

En égard à la formule (17) il en résulte l'inégalité

$$I \geqslant \frac{s}{2}\left(\operatorname{arc tg}\frac{s}{2h_1} + \operatorname{arc tg}\frac{s}{2h_2}\right) . \tag{18}$$

Comme $h_1$ et $h_2$ doivent satisfaire à la condition

$$h_1 + h_2 \leqslant h \,,$$

nous pouvons remplacer dans (18) l'expression

$$\operatorname{arc tg}\frac{s}{2h_1} + \operatorname{arc tg}\frac{s}{2h_2}$$

par sa valeur minimale sous cette condition. Ainsi nous obtenons l'inégalité

$$I \geqslant s \operatorname{arc tg} \frac{s}{h} . \tag{19}$$

D'autre part, on a évidemment

$$I = \int_0^L x(\sigma) \varkappa(\sigma) d\sigma \leqslant \frac{s}{2} \int_0^L \varkappa(\sigma) d\sigma = \frac{s\pi}{2} . \tag{20}$$

Les formules (14), (15), (19) et (20) nous permettent d'énoncer le théorème suivant:

Théorème 3. *Pour toute surface de révolution $S$ de classe $C^2$, convexe et de genre,* 0 *on a*

$$2\pi s \operatorname{arc tg} \frac{s}{h} \leqslant I_2 \leqslant s\pi^2 ,$$

*où $h$ est la largeur de la surface $S$ dans le sens de l'axe de révolution et $s$ la largeur dans la direction perpendiculaire à cet axe.*

Remarquons encore qu'on peut remplacer dans le théorème 3 les inégalités faibles par des inégalités fortes, car dans les formules (19) et (20) les égalités ne sont réalisées que dans le cas où le méridien $C$ est un arc polygonal, ce qui n'est pas conforme à l'hypothèse de classe $C^2$ faite sur la surface $S$.

**§ 5. Évaluation de l'intégrale $I_2$ dans le cas où $S$ est de genre 1.** Dans le cas où la surface $S$ est de genre 1 son méridien $C$ est une courbe fermée et nous la supposons aussi *convexe.* Admettant les notations indiquées sur la figure 2, nous supposons (sans nuire à la généralité des considérations) qu'au point $P_0$ correspondent les valeurs 0 et $L$ du paramètre $\sigma$ et nous désignons par $L_i$ les valeurs du paramètre correspondant resp. aux points $P_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Comme dans les intervalles $[0, L_1]$ et $[L_3, L_4]$ [2] on a

$$\varkappa(\sigma) \equiv 0 ,$$

l'intégrale $I$ peut être représentée par la formule

$$I = \int_{L_1}^{L_3} x(\sigma) \varkappa(\sigma) d\sigma + \int_{L_4}^{L} x(\sigma) \varkappa(\sigma) d\sigma . \tag{21}$$

---

[2] Comme les points $P_0$ et $P_1$, ainsi que $P_3$ et $P_4$, peuvent naturellement coïncider, les intervalles $[0, L_1]$ et $[L_3, L_4]$ peuvent se réduire à des points.

Comme la fonction $x(\sigma)$ admet une inverse dans chaque intervalle $[L_1, L_3]$ et $[L_4, L]$, nous pouvons calculer les intégrales figurant dans la formule (21). Pour la première intégrale nous obtenons

$$\int_{L_1}^{L_3} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma = x(\sigma)\Theta(\sigma)\Big|_{L_1}^{L_3} - \int_a^{a+s} \Theta(x)\,dx \tag{22}$$

$$= (a+s)\pi - \int_a^{a+s_1} \Theta(x)\,dx - \int_{a+s_1}^{a+s} \Theta(x)\,dx\,.$$

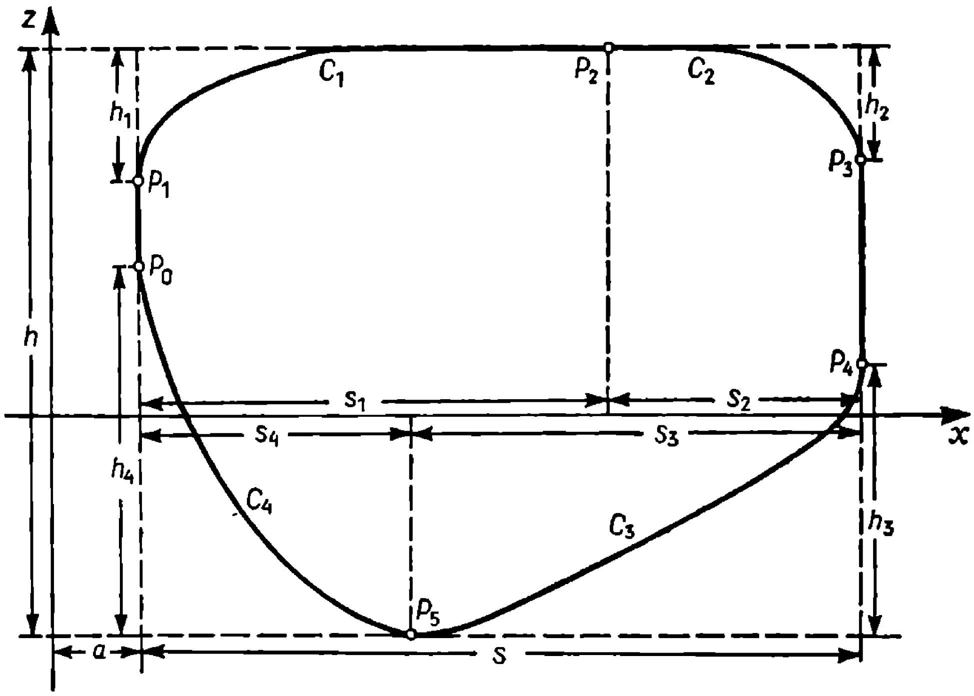


Fig. 2

Comme $0 \leqslant \Theta(x) \leqslant \pi/2$ pour $a \leqslant x \leqslant a+s_1$, on a

$$\int_a^{a+s_1} \Theta(x)\,dx \leqslant s_1 \frac{\pi}{2}\,. \tag{23}$$

A l'intégrale

$$\int_{a+s_1}^{a+s} \Theta(x)\,dx\,,$$

correspondant à l'arc $C_2$, nous pouvons appliquer un raisonnement tout à fait analogue à celui du paragraphe précédent concernant l'intégrale

$$\int_0^{s/2} \Theta_1(x)\,dx$$

et nous obtenons l'inégalité

$$(24) \qquad \int_{a+s_1}^{a+s} \Theta(x)\,dx \leqslant (s-s_1)\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{s_2}{h_2}\right).$$

Des inégalités (22), (23) et (24) on tire

$$(25) \qquad \int_{L_1}^{L_3} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma \geqslant a\pi + s_1\frac{\pi}{2} + (s-s_1)\operatorname{arctg}\frac{s_2}{h_2} \geqslant a\pi + s\operatorname{arctg}\frac{s}{h_2}.$$

D'un façon tout à fait analogue on obtient

$$(26) \qquad \int_{L_4}^{L} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma \geqslant a\pi + s_4\frac{\pi}{2} + (s-s_4)\operatorname{arctg}\frac{s_3}{h_3} \geqslant a\pi + s\operatorname{arctg}\frac{s}{h_3}.$$

En vertu des formules (21), (25) et (26) nous pouvons écrire

$$I \geqslant 2a\pi + s\left(\operatorname{arctg}\frac{s}{h_2} + \operatorname{arctg}\frac{s}{h_3}\right),$$

mais, comme $h_2 + h_3 \leqslant h$, on doit avoir

$$\operatorname{arctg}\frac{s}{h_2} + \operatorname{arctg}\frac{s}{h_3} \geqslant 2\operatorname{arctg}\frac{2s}{h}$$

et, par conséquent, nous avons l'évaluation

$$(27) \qquad I \geqslant 2\left(a\pi + s\operatorname{arctg}\frac{2s}{h}\right).$$

Pour trouver la borne supérieure de l'intégrale $I$ nous utiliserons les formules (21) et (22). Maintenant nous profiterons de la relation

$$\pi/2 \leqslant \Theta(x) \leqslant \pi \qquad \text{pour } a+s_1 \leqslant x \leqslant a+s$$

et nous obtenons

$$(28) \qquad \int_{a+s_1}^{a+s} \Theta(x)\,dx \geqslant (s-s_1)\frac{\pi}{2}.$$

En appliquant le lemme 2 à l'arc $C_1$ correspondant à l'intervalle $[L_1, L_2]$ pour $\sigma$, nous obtenons

$$(29) \qquad \int_{a}^{a+s_1} \Theta(x)\,dx \geqslant s_1\operatorname{arctg}\frac{s_1}{h_1}.$$

Les formules (22), (28) et (29) nous fournissent l'inégalité

$$\int_{L_1}^{L_3} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma \leqslant a\pi + s\frac{\pi}{2} + s_1\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{s_1}{h_1}\right).$$

Il est facile de vérifier que l'expression

$$s_1\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{s_1}{h_1}\right)$$

est une fonction croissante de la variable $s_1$, donc nous avons

$$\int_{L_1}^{L_3} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma \leqslant (a+s)\pi - s\operatorname{arc\,tg}\frac{s}{h_1}. \tag{30}$$

D'un façon analogue nous pouvons obtenir l'inégalité

$$\int_{L_4}^{L} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma \leqslant (a+s)\pi - s\operatorname{arc\,tg}\frac{s}{h_4}. \tag{31}$$

Comme la valeur $2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2s}{h}$ est le minimum de l'expression

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{s}{h_1} + \operatorname{arc\,tg}\frac{s}{h_4}$$

sous la condition $h_1 + h_4 \leqslant h$, nous obtenons, en vertu de (21), (30) et (31) l'inégalité

$$I \leqslant 2\left[a\pi + s\left(\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{2s}{h}\right)\right]. \tag{32}$$

Les formules (14), (27) et (32) nous permettent d'énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Pour toute surface de révolution $S$ de classe $C^2$, de genre* 1 *et de méridien convexe on a*

$$4\pi\left(a\pi + s\operatorname{arc\,tg}\frac{2s}{h}\right) \leqslant I_2 \leqslant 4\pi\left[(a+s)\pi - s\operatorname{arc\,tg}\frac{2s}{h}\right],$$

*où $h$ désigne la largeur de la surface $S$ dans la direction de l'axe de révolution, $s$ la largeur du méridien dans la direction perpendiculaire à cet axe et $a$ est le minimum des rayons des parallèles de la surface $S$.*

La même remarque que nous avons faite après le théorème 3 permet de remplacer ici les inégalités faibles par des inégalités fortes.

**§ 6. Remarques finales.** Remarquons avant tout que les évaluations données par les théorèmes 3 et 4 sont exactes dans ce sens que pour toutes valeurs $h$ et $s$ resp. $h$ et $a$ fixées et pour tout nombre positif $\varepsilon$ on peut construire des surfaces $S'$ et $S''$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 3 resp. 4 et telles que l'on ait

$$I_2(S') < 2\pi s \operatorname{arc\,tg}\frac{s}{h} + \varepsilon ,$$

$$I_2(S'') > s\pi^2 - \varepsilon$$

resp.

$$I_2(S') < 4\pi\left(a\pi + s\operatorname{arc\,tg}\frac{2s}{h}\right) + \varepsilon ,$$

(33)

$$I_2(S'') > 4\pi\left[(a+s)\pi - s\operatorname{arc\,tg}\frac{2s}{h}\right] - \varepsilon .$$

Les méridiens $C'$ et $C''$ correspondant aux surfaces $S'$ et $S''$ sont représentées sur les figures 3 (pour le cas où $S'$ et $S''$ sont de genre 0) et 4 (pour le cas où $S'$ et $S''$ sont de genre 1).

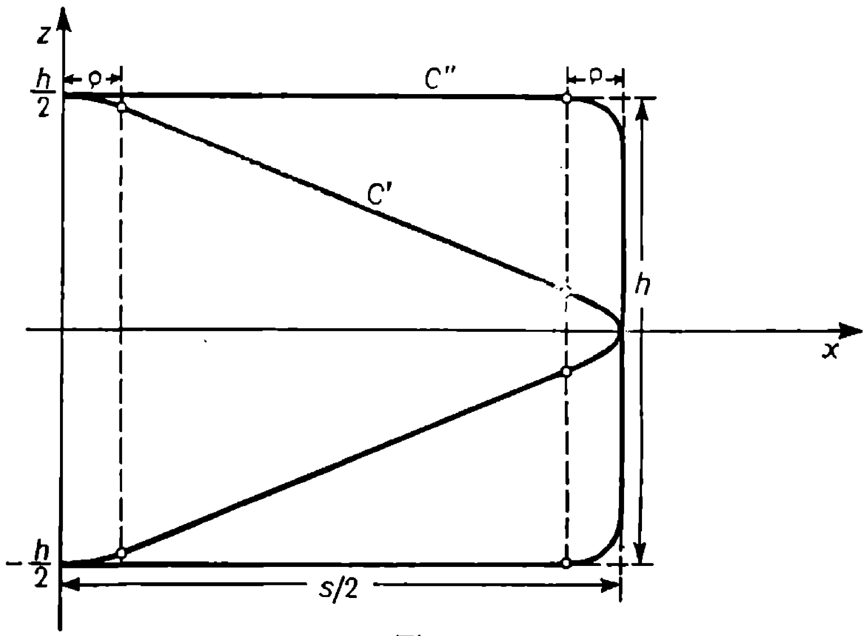


Fig. 3

Nous démontrerons par exemple l'inégalité (33). Dans ce but nous désignerons par $\sigma_1$ et $\sigma_2$ les valeurs du paramètre $\sigma$ correspondant aux points resp. $Q_1$ et $Q_2$ (voir fig. 4) et nous calculons d'abord l'intégrale $I$ (voir (15)). Nous obtenons

$$I(S') = \int_0^L x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma = 2\int_0^{L/2} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma$$

$$= 2\left(\int_0^{\sigma_1} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_2}^{L/2} x(\sigma)\varkappa(\sigma)\,d\sigma\right) .$$

Mais comme pour $C'$ (fig. 4) on a

$$\begin{array}{lll} x(\sigma) \leqslant a+\varrho & \text{pour} & 0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1\,, \\ x(\sigma) \leqslant a+s & \text{pour} & \sigma_2 \leqslant \sigma \leqslant L/2\,, \\ \varkappa(\sigma) = 0 & \text{pour} & \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2\,, \end{array}$$

nous avons aussi

$$\int_0^{\sigma_1} x(\sigma)\varkappa(\sigma)d\sigma \leqslant (a+\varrho)\int_0^{\sigma_1} \varkappa(\sigma)d\sigma = (a+\varrho)\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2s}{h}\right),$$

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} x(\sigma)\varkappa(\sigma)d\sigma = 0\,,$$

$$\int_{\sigma_2}^{L/2} x(\sigma)\varkappa(\sigma)d\sigma \leqslant (a+s)\int_{\sigma_2}^{L/2} \varkappa(\sigma)d\sigma = (a+s)\operatorname{arctg}\frac{2s}{h}\,,$$

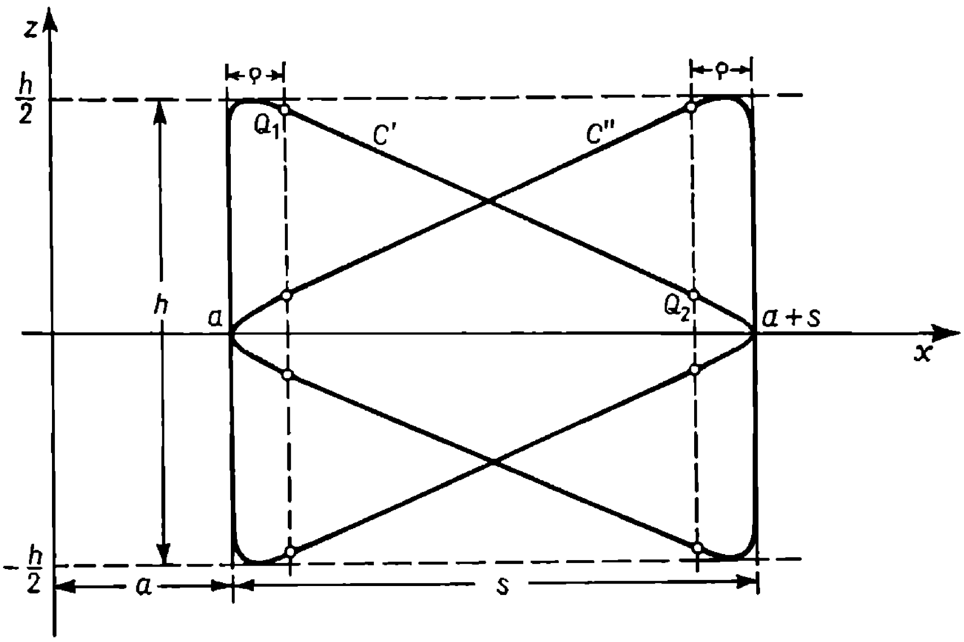


Fig. 4

et, par conséquent, on a

$$I(S') \leqslant 2\left(a\pi + s\operatorname{arctg}\frac{2s}{h}\right) + 2\varrho\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2s}{h}\right).$$

D'après (14) on obtient de là

$$I_2(S') \leqslant 4\pi\left(a\pi + s\operatorname{arctg}\frac{2s}{h}\right) + 4\pi\varrho\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2s}{h}\right).$$

Comme poır $\varrho$ suffisamment petit on a

$$4\pi\varrho\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2s}{h}\right) < \varepsilon ,$$

l'inégalité (33) se trouve ainsi démontrée.

En analysant les évaluations données par les théorèmes 3 et 4 nous voyons que l'intégrale $I_2$, ainsi que la somme

$$I_1 + I_2 = \iint\limits_S H d\omega ,$$

dépendent non seulement du raport $s/h$ (c'est-à-dire de la forme géométrique de la surface $S$), mais aussi de $s$ resp. de $s$ et $a$ (c'est-à-dire de la grandeur de la surface $S$); fallait s'y attendre en égard à l'interprétation géométrique de l'intégrale $\iint\limits_S H d\omega$ donnée par H. Minkowski (voir le § 1). Les valeurs minimales ainsi que les valeurs maximales de l'intégrale $I_2$ sont des fonctions croissantes de la variable $s$ resp. de $s$ et $a$ indépendamment et tendent vers l'infini avec $s$ resp. avec $s$ et $a$ indépendamment.

La différence $\delta(h, s)$ entre la valeur maximale de l'intégrale $I_2$ et la valeur minimale (dans le cas où $S$ est une surface de genre 1 elle ne dépend pas de $a$) est aussi une fonction croissante de la variable $s$ et tendant vers l'infini avec $s$. Par contre, la différence $\delta(h, s)$ tend vers zéro pour $h \to 0$ et $s$ fixe (la surface $S$ prend alors la forme d'un disque) ainsi que pour $s \to 0$ et $h$ fixe (la surface $S$ prend alors la forme d'une aiguille). Dans le dernier cas l'intégrale $I_2$, comme on le voit, doit tendre vers 0.

*Reçu par la Rédaction le 12. 2. 1968*