ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXV (1978)

Étude d'une inégalité intégrale non linéaire en deux variables

par ROMAN GUTOWSKI (Warszawa)

Résumé. On considére l'inégalité suivante:

$$u(x,t) \leqslant c + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} k\big(u(r,s),r,s\big)\,dr\,ds,$$

où $u(x,t)$ est une fonction continue et non négative des variables $x \geqslant x_0$, $t \geqslant t_0$ et $k(u,x,t)$ une fonction continue et non négative des variables $u \geqslant 0$, $x \geqslant x_0$, $t \geqslant t_0$.

En supposant que les fonctions connues $v(x,t)$ et $g(u)$ sont respectivement continue, non négative et de classe C^1 non négative et non décroissante et telles que:

$$k(z,x,t) \leqslant v(x,t)\,g(z)$$

on démontre que l'inégalité suivante est satisfaite:

$$(*) \qquad u(x,t) \leqslant G^{-1}\Big[G(c) + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\,dr\,ds\Big],$$

où G^{-1} est la fonction inverse de la fonction

$$G(R) = \int_{R_0}^{R} \frac{ds}{g(s)}, \qquad 0 < R_0 \leqslant c \leqslant R.$$

On considére également les conditions suffisantes pour lesquelles l'inégalité $(*)$ est satisfaite pour: $x \in [x_0, \infty)$, $t \in [t_0, \infty)$.

Le but de cet article est de mettre en évidence une inégalité intégrale non linéaire relative à une fonction inconnue $u(x,t)$.

Soient $u(x,t)$ une fonction continue et non négative par rapport aux variables $x \geqslant x_0$, $t \geqslant t_0$ et $k(u,x,t)$ une fonction également continue et non négative par rapport aux variables $u \geqslant 0$, $x \geqslant x_0$, $t \geqslant t_0$.

Supposons satisfaite l'inégalité suivante:

$$(1) \qquad u(x,t) \leqslant c + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} k\big(u(r,s),r,s\big)\,dr\,ds.$$

On introduit encore les fonctions connues: $v(x,t)$ — continue et non négative par rapport aux variables $x \geqslant x_0$, $t \geqslant t_0$, $g(u) \in C^1$ — non négative et non décroissante par rapport à la variable $u \geqslant 0$, telles que

$$k(z, x, t) \leqslant v(x, t) g(z). \tag{2}$$

Théorème. *La fonction $u(x,t)$ satisfait pour $x \in [x_0, L)$, $t \in [t_0, T)$ à l'inégalité suivante:*

$$u(x,t) \leqslant G^{-1}\Big[G(c) + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\,dr\,ds\Big], \tag{3}$$

où G^{-1} est la fonction inverse de

$$G(R) = \int_{R_0}^{R} \frac{ds}{g(s)}, \qquad 0 < R_0 \leqslant c \leqslant R. \tag{4}$$

Les valeurs L et T satisfont à l'équation:

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} = G(c) + \int_{x_0}^{L}\int_{t_0}^{T} v(r,s)\,dr\,ds. \tag{5}$$

De plus, si nous supposons qu'il existe une valeur $\tilde{c} > 0$ satisfaisant à

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} v(r,s)\,dr\,ds \leqslant \int_{\tilde{c}}^{\infty} \frac{ds}{g(s)},$$

l'inégalité (3) *sera verifiée dans le domaine $x \in [x_0, \infty)$, $t \in [t_0, \infty)$ c'est-à-dire pour $L = \infty$, $T = \infty$ et $c \in (0, \tilde{c})$.*

Remarque 1. En particulier, si dans (2) nous prenons $g(z) = z$, ce qui entraîne $k(z, x, t) \leqslant v(x,t) z(x,t)$, nous retrouvons l'inégalite bien connue de Wendorff [1]: $u(x,t) \leqslant c \cdot \exp\big[\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\,dr\,ds\big]$.

Remarque 2. Le théorème présenté ci-dessus peut être appliqué à l'étude d'un problème de Darboux relatif à une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre du type hyperbolique [2], [3].

Démonstration. D'après l'inégalité (2) nous pouvons écrire l'inégalité (1) sous la forme

$$u(x,t) \leqslant c + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\, g\big(u(r,s)\big)\,dr\,ds. \tag{6}$$

Désignons par $R(x,t)$ l'expression:

$$R(x,t) = c + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\, g\big(u(r,s)\big)\,dr\,ds, \tag{7}$$

dont la dérivée est telle que

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t} = v(x,t) g\big(u(x,t)\big) \leqslant v(x,t) g\big(R(x,t)\big). \tag{8}$$

Considérons la fonction $G(R)$ définie par la formule (4); elle est de classe C^2, non négative et croissante, et sa dérivée par rapport à x et t s'écrit:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}[G(R)] = G'(R)\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t} + G''(R)\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Il en résulte que

$$G'(R)\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}[G(R)] - G''(R)\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}[G(R)] - G''(R)\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial t} \leqslant G'(R) v(x,t) g(R). \tag{9}$$

D'après la formule (4) on peut voir que

$$G'(R) = \frac{1}{g(R)}, \qquad G''(R) \leqslant 0.$$

De plus, en vertu de (7) les dérivées $\partial R/\partial x$ et $\partial R/\partial t$ sont non négatives et l'inégalité (9) peut être écrite sous la forme:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}[G(R)] \leqslant v(x,t). \tag{10}$$

Il en résulte que

$$G\big(R(x,t)\big) - G\big(R(x_0,t)\big) - G\big(R(x,t_0)\big) + G\big(R(x_0,t_0)\big) \leqslant \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\,dr\,ds.$$

Mais, d'après la formule (7), nous avons

$$R(x_0,t) = R(x,t_0) = R(x_0,t_0) = c;$$

alors nous obtenons

$$G(R) \leqslant G(c) + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\,dr\,ds,$$

d'où il découle:

$$R(x,t) \leqslant G^{-1}\Big[G(c) + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\,dr\,ds\Big]. \tag{11}$$

L'inégalité (11) est satisfaite pour $x \in [x_0, L)$, $t \in [t_0, T)$, où L et T satisfont à l'équation:

$$G(\infty) = \int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} = G(c) + \int_{x_0}^{L}\int_{t_0}^{T} v(r,s)\,dr\,ds.$$

Pour prolonger la fonction $R(x, t)$ à l'infini nous utilisons la condition suivante

$$G(c)+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r, s)\,dr\,ds \leqslant \int_{R_0}^{\infty}\frac{ds}{g(s)},$$

d'où selon (4) on déduit l'inégalité;

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} v(r, s)\,dr\,ds \leqslant -\int_{R_0}^{c}\frac{ds}{g(s)}+\int_{R_0}^{\infty}\frac{ds}{g(s)}=\int_{c}^{\infty}\frac{ds}{g(s)}.$$

Finalement, si l'inégalité suivante est satisfaite:

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} v(r, s)\,dr\,ds \leqslant \int_{\tilde{c}}^{\infty}\frac{ds}{g(s)},$$

où $\tilde{c} > c$, c'est-à-dire $c \in (0, \tilde{c})$, l'inégalité (11) l'est également pour $L = \infty$, $T = \infty$ c'est-à-dire pour $x \in [x_0, \infty)$, $t \in [t_0, \infty)$ et la démonstration du théorème est ainsi achevée

Exemple 1. Soit

$$k(u, x, t) = e^{[(x-x_0)+(t-t_0)]}u^2.$$

D'après (2) on a

$$v(x, t) = e^{[(x-x_0)+(t-t_0)]}, \qquad g(z) = z^2.$$

Calculons la fonction $G(R)$ selon la formule (4)

$$G(R)=\int_{R_0}^{R}\frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{R}+\frac{1}{R_0}=\lambda,$$

d'où il résulte:

$$R = G^{-1}(\lambda) = \frac{1}{-\lambda+1/R_0}.$$

Calculons maintenant l'expression:

$$G(c)+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r, s)\,dr\,ds = \int_{R_0}^{c}\frac{ds}{s^2}+\int_{x_0}^{x} e^{r-x_0}dr\int_{t_0}^{t} e^{s-t_0}\,ds$$

$$= -\frac{1}{c}+\frac{1}{R_0}+(e^{x-x_0}-1)(e^{t-t_0}-1),$$

d'où l'on déduit

$$G^{-1}\left[G(c)+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\,dr\,ds\right]=\frac{1}{\frac{1}{c}-\frac{1}{R_0}-(e^{x-x_0}-1)(e^{t-t_0}-1)+\frac{1}{R_0}},$$

et à partir de (3) l'inégalité suivante

$$u(x,t)\leqslant\frac{c}{1-c(e^{x-x_0}-1)(e^{t-t_0}-1)}.$$

Pour toute valeur $L=\text{const}<\infty$ donnée on peut calculer $T=\text{const}<\infty$ tel que à l'extérieur du rectangle $x_0\leqslant x<L$, $t_0\leqslant t<T$ l'inégalité n'est pas satisfaite. A titre d'exemple prenons $L=L_1$ et $c_1=e^{L_1-x_0}-1>0$; la valeur correspondante de T_1 donnée par la relation (5) s'écrit

$$T_1=t_0+\ln\frac{1+cc_1}{cc_1}.$$

Exemple 2. Soit

$$k(u,x,t)=\frac{e^{-t}}{x^2}u^2,\qquad x_0>0.$$

Suivant (2) on a:

$$v(x,t)=\frac{e^{-t}}{x^2},\qquad g(z)=z^2.$$

La fonction $G(R)$ est la même que dans l'exemple précédent. Il suffit donc de calculer l'expression

$$\begin{aligned}G(c)+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\,dr\,ds &= -\frac{1}{c}+\frac{1}{R_0}+\int_{x_0}^{x}\frac{dr}{r^2}\int_{t_0}^{t}e^{-s}\,ds\\ &= -\frac{1}{c}+\frac{1}{R_0}+\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right)e^{-t_0}[1-e^{-(t-t_0)}],\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$G^{-1}\left[G(c)+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} v(r,s)\,dr\,ds\right]=\frac{1}{\frac{1}{c}-\frac{1}{R_0}-\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right)e^{-t_0}[1-e^{-(t-t_0)}]+\frac{1}{R_0}}.$$

Ainsi d'après (3) on obtient l'inégalité suivante:

$$u(x,t)\leqslant\frac{c}{1-c\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right)e^{-t_0}[1-e^{-(t-t_0)}]}.$$

On peut voir que cette inégalité est satisfaite pour $x \in [x_0, \infty)$, $t \in [t_0, \infty)$ si le dénominateur est positif, c'est-à-dire pour $c \in (0, \tilde{c})$, où $\tilde{c}$ est donnée par la relation:

$$\tilde{c} = x_0 e^{t_0}.$$

Travaux cités

[1] E. F. Beckenbach et R. Bellman, *Inequalities*, Springer Verlag, 1961.
[2] M. Krzyżański, *Partial differential equations of second order*, Vol. II, Warszawa 1971.
[3] W. Walter, *Differential- und Integral-Ungleichungen*, Springer Verlag, 1964.

Reçu par la Rédaction le 25. 6. 1975