ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVI (1979)

Sur une méthode des differences finies pour une équation non linéaire différentielle fonctionnelle aux dérivées mixtes

par MARIAN MALEC (Cracovie)

Résumé. On étudie un schéma explicite pour une équation de la forme

$$(*) \qquad u_t = f(t, x, u, u_x, u_{xx}, u(t, \cdot)), \qquad (t, x) \in [0, \tau) \times \operatorname{Int} E$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = u(t, x)$, $u_x = \{u_{x_i}\}$, $u_{xx} = \{u_{x_i x_j}\}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots \ldots, n)$, $u(t, \cdot)$ est une fonction scalaire de la variable x appartenant à l'espace $B(E)$ de fonctions bornées sur E pour chaque $t \in [0, \tau)$, $E = [0, \sigma]^n$ avec des conditions aux limites correspondant aux conditions de Dirichlet pour des équations différentielles du type parabolique.

On démontre, sous certaines conditions, que le schéma explicite mentionné est convergent. On estime aussi l'erreur de la méthode des différences finies proposée et on démontre un théorème sur l'unicité des solutions de l'équation $(*)$.

1. L'objet de cette étude est un schéma explicite des différences finies pour une équation de la forme

$$(1.1) \qquad u_t = f(t, x, u, u_x, u_{xx}, u(t, \cdot))$$

où $t \in [0, \tau)$, $\tau < +\infty$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (0, \sigma)^n$, $\sigma < +\infty$, $u = u(t, x)$, $u_x = \{u_{x_i}\}$, $u_{xx} = \{u_{x_i x_j}\}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$, $u(t, \cdot)$ est une fonction scalaire de la variable x définie sur l'ensemble $E = [0, \sigma]^n$ pour chaque $t \in [0, \tau)$.

On obtient le schéma explicite mentionné en remplaçant dans l'équation (1.1) la dérivée par rapport à t par le quotient ascendant des différences finies, les autres dérivées du premier ordre par les quotients centraux, les dérivées du second ordre par les quotients de la forme:

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} u^{-Mij} &= \frac{1}{2h^2}\left(u^{i(M)} + u^{j(M)} + u^{-i(M)} + u^{-j(M)} - 2u^M - u^{i(-j(M))} - u^{-i(j(M))}\right), \\ u^{+Mij} &= \frac{1}{2h^2}\left(-u^{i(M)} - u^{j(M)} - u^{-i(M)} - u^{-j(M)} + 2u^M + u^{i(j(M))} + u^{-i(-j(M))}\right) \end{aligned}$$

$$(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$$

(voir Fig. I et Fig. II) suivant le signe de la dérivée de la fonction f par rapport à $u_{x_i x_j}$, tandis que la fonction $u(t, \cdot)$ est remplacée par une fonction à segments stable.

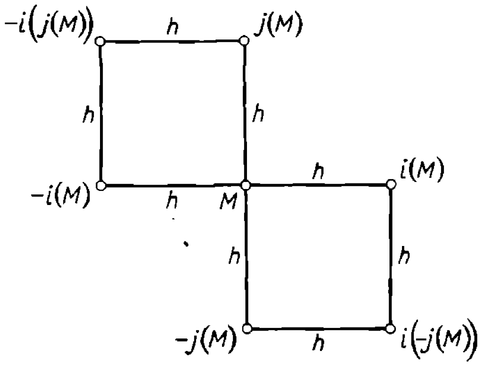

Fig. I

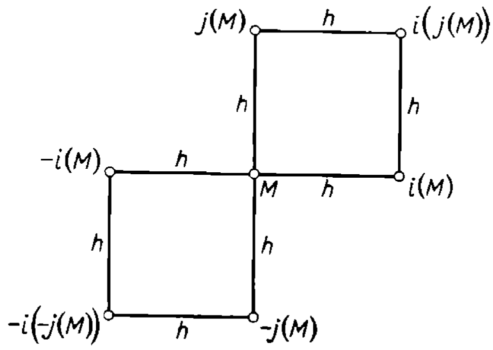

Fig. II

Dans la présente note nous prouverons que, sous certaines hypothèses, un tel schéma explicite pour l'équation (1.1) avec la condition aux limites de la forme

$$
\begin{aligned}
& u(0, x) = \varphi_0(x), \\
(1.3) \qquad & u(t, x) = \varphi_i(t, x) \quad \text{pour } x_i = 0, \\
& u(t, x) = \psi_i(t, x) \quad \text{pour } x_i = \sigma, \\
& \qquad (t, x) \in (0, \tau] \times E, \; i = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

est convergent (Théorème 1).

La démonstration de la convergence du schéma mentionné, ainsi que l'estimation de l'erreur de la méthode approchée, reposent sur des inégalités aux différences finies.

Il est à noter que le théorème 1 est une généralisation des résultats obtenus auparavant pour les équations partielles non linéaires du type parabolique (voir, par exemple, [1], [2]) et que les équations du type (1.1) comportent les équations intégro-différentielles. Les schémas explicites pour les équations (1.1) ont été étudiés plus tôt, mais seulement pour le cas particulier où l'équation (1.1) est une équation sans dérivées mixtes (voir [3]), bien que dans [3] les conditions aux limites soient plus générales que celles considérées dans cette note.

Dans la derière partie de la note on démontre un certain théorème sur l'unicité des solutions de l'équation (1.1) avec une condition aux limites de la forme (1.3) (Théorème 2).

Le théorème 2 est une simple conséquence du théorème 1 et nous l'avons présenté $\varphi(2x)$ uniquement pour montrer que les théorèmes sur l'unicité sont très souvent des „sous-produits" des théorèmes sur la convergence des schémas des différences finies. Le théorème 2 n'est pas nouveau, l'unicité des solutions du problème (1.1), (1.3) ayant été déjà démontrée plus tôt par Szarski dans [4], sous des hypothèses plus faibles que celles que nous venons d'admettre dans la présente note.

2. Considérons dans l'espace R^{1+n} l'ensemble de points nodaux dont les coordonnées sont

$$t^{\mu} = \mu\cdot k, \quad x_i^{m_i} = m_i h \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

où $\mu = 0, 1, \ldots, N_1$, $m_i = 0, 1, \ldots, N$, $0 < k = \tau/N_1$, $0 < h = \sigma/N$, N_1 et N étant des nombres naturels.

Désignons la suite des indices $(\mu, m_1, \ldots, m_n)$ du point nodal (2.1) par

$$M = (\mu, m) \quad \text{où } m = (m_1, \ldots, m_n) \tag{2.2}$$

et les coordonnées du point nodal (2.1) par

$$(t^{\mu}, x^{m}) \quad \text{où } x^{m} = (x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n}). \tag{2.3}$$

Introduisons les ensembles des multi-indices suivants

$$\begin{aligned} Z &= \{M\colon\ 0 \leqslant \mu \leqslant N_1,\ 0 \leqslant m_i \leqslant N,\ i = 1, \ldots, n\}, \\ Z_1 &= \{M\colon\ 0 \leqslant \mu \leqslant N_1 - 1,\ 0 \leqslant m_i \leqslant N-1,\ i = 1, \ldots, n\}, \\ Z_2 &= \{M\colon\ 0 \leqslant \mu \leqslant N_1 - 1,\ 1 \leqslant m_i \leqslant N,\ i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Envisagons encore les points nodaux générés par les suites des indices suivantes

$$+M = (\mu+1, m), \quad i(M) = \big(\mu, i(m)\big), \quad -i(M) = \big(\mu, -i(m)\big) \quad (M \in Z_1 \cap Z_2,\ i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

où

$$\begin{aligned} i(m) &= (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i + 1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \\ -i(m) &= (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \end{aligned} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.6}$$

Faisons correspondre à chaque point nodal (2.3) généré par le multi-indice $M \in Z$ un nombre réel v^M et posons

$$\begin{aligned} v^{M\sim} &= \frac{1}{k}(v^{+M} - v_M), \\ v^{Mi} &= \frac{1}{2h}(v^{i(M)} - v^{-i(M)}), \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$v^{-Mij} = \frac{1}{2h^2}\left(v^{i(M)} + v^{j(M)} + v^{-i(M)} + v^{-j(M)} - 2v^M - v^{i(-j(M))} - v^{-i(j(M))}\right),$$

$$(2.7')\quad v^{+Mij} = \frac{1}{2h^2}\left(-v^{i(M)} - v^{j(M)} - v^{-i(M)} - v^{-j(M)} + 2v^M + v^{i(j(M))} + v^{-i(-j(M))}\right),$$

$$v^{\mu}(x) = \sum_{M(\mu)=(\mu,m)\in Z_1} \chi_m(x)\cdot v^{M(\mu)}$$

$$(M \in Z_1 \cap Z_2,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ x \in [0, \sigma]^n)$$

où

$$(2.8)\qquad \chi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in J_m, \\ 0 & \text{pour } x \notin J_m, \end{cases}$$

$$(2.9)\qquad J_m = \{x = (x_1, \ldots, x_n):\ m_i h \leqslant x_i < (m_i + 1)h,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

3. Dans toute cette note nous admettons que

(1) pour chaque $\tilde{t} \in [0, \tau)$, le symbole $u(\tilde{t}, \cdot)$ désigne une fonction scalaire $x \to u(\tilde{t}, \cdot)$ appartenant à l'espace $B(E)$ des fonctions $z(x)$ bornées dans l'ensemble

$$(3.1)\qquad E = [0, \sigma]^n$$

avec la norme

$$(3.2)\qquad \|z\| = \sup_{x\in E} |z(x)|,$$

(2) la fonction scalaire $f(t, x, u, q, w, z)$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $w = (w_{11}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nn})$ est continue dans l'ensemble

$$(3.3)\qquad D = [0, \tau) \times (0, \sigma)^n \times R^{1+n+n^2} \times B(E),$$

(3) si (t, x, u, q, w, z) et $(t, x, \tilde{u}, \tilde{q}, \tilde{w}, \tilde{z})$ appartiennent à D, alors

$$(3.4a)\qquad f(t, x, u, q, w, z) - f(t, x, \tilde{u}, \tilde{q}, \tilde{w}, \tilde{z}) \leqslant a^{(1)}(u - \tilde{u}) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(1)}(q_i - \tilde{q}_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij}^{(1)}(w_{ij} - \tilde{w}_{ij}) + \delta^{(1)}\|z - \tilde{z}\|,$$

$$(3.4b)\qquad f(t, x, u, q, w, z) - f(t, x, \tilde{u}, \tilde{q}, \tilde{w}, \tilde{z}) \geqslant a^{(2)}(u - \tilde{u}) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(2)}(q_i - \tilde{q}_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij}^{(2)}(w_{ij} - \tilde{w}_{ij}) + \delta^{(2)}\|z - \tilde{z}\|$$

où, en général, les coefficients $a^{(p)}$, $\beta_i^{(p)}$, $\gamma_{ij}^{(p)}$, $\delta^{(p)}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ p = 1, 2)$ sont des fonctions scalaires de points de l'ensemble D,

(4) il existe des constantes L, Γ, g et K telles que les inégalités

$$(3.5)\qquad |a^{(p)}| \leqslant L, \quad |\beta_i^{(p)}| \leqslant \Gamma, \quad 0 < g \leqslant \gamma_{ii}^{(p)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\gamma_{ij}^{(p)}|, \quad |\delta^{(p)}| \leqslant K$$

$$(i = 1, \ldots, n,\ p = 1, 2)$$

sont vèrifiées dans D,

(5) pour les indices fixés i et j ($i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$), les fonctions $\gamma_{ij}^{(p)}$ sont, pour $p = 1$ et pour $p = 2$, soit toujours non négatives, soit toujours non positives, dans l'ensemble D,

(6) les égalités

$$\gamma_{ij}^{(p)} = \gamma_{ji}^{(p)} \quad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ p = 1, 2) \tag{3.6}$$

sont satisfaites en chaque point de l'ensemble D,

(7) la fonction scalaire $u(t, x)$ est continue dans l'ensemble $[0, \tau] \times E$, étant de classe C^2 dans $[0, \tau) \times \operatorname{Int} E$, et satisfait à l'équation

$$u_t = f\big(t, x, u, u_x, u_{xx}, u(t, \cdot)\big) \quad \text{pour } (t, x) \in [0, \tau) \times \operatorname{Int} E \tag{3.7}$$

où $u_x = \{u_{x_i}\}$, $u_{xx} = \{u_{x_i x_j}\}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$, et aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} &u(0, x) = \varphi_0(x), \\ &u(t, x) = \varphi_i(t, x), \quad x_i = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ((t, x) \in (0, \tau] \times E,\ i = 1, \ldots, n), \\ &u(t, x) = \psi_i(t, x), \quad x_i = \sigma \end{aligned} \tag{3.8}$$

(8) les constantes L et K sont telles que

$$L + K > 0, \tag{3.9}$$

(9) les nombres v^M satisfont au système d'équations aux différences finies

$$\begin{aligned} v^M &= f\big(t^\mu, x^m, v^M, v^{MI}, v^{MIJ}, v^\mu(\cdot)\big) \quad \text{pour } M \in Z_1 \cap Z_2, \\ v^M &= \varphi_0(x^m) \quad \text{pour } \mu = 0,\ M \in Z, \\ v^M &= \varphi_i(t^\mu, x^m) \quad \text{pour } m_i = 0,\ \mu = 1, \ldots, N_1, \\ v^M &= \psi_i(t^\mu, x^m) \quad \text{pour } m_i = N,\ \mu = 1, \ldots, N_1 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned} v^{MI} &= (v^{M1}, \ldots, v^{Mn}), \\ v^{MIJ} &= (v^{M11}, \ldots, v^{M1n}, \ldots, v^{Mn1}, \ldots, v^{Mnn}), \\ v^{Mij} &= \begin{cases} v^{-Mij} & \text{pour } i = j \text{ ou } \gamma_{ij}^{(1)} \leqslant 0, \\ v^{+Mij} & \text{pour } i \neq j \text{ et } \gamma_{ij}^{(1)} \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.11}$$

(voir (2.7), (2.7′), (3.4a), (3.4b) et l'hypothèse (5)).

4. Désignons par u^M la valeur de la solution $u(t, x)$ du problème (3.7), (3.8) au point nodal $(t^\mu, x^m) \in [0, \tau] \times E$. Les valeurs u^M satisfont alors aux conditions aux limites

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} u^M &= \varphi_0(x^m) && \text{pour } \mu = 0,\ M \in Z, \\ u^M &= \varphi_i(t^\mu, x^m) && \text{pour } m_i = 0,\ \mu = 1, \ldots, N_1, \\ u^M &= \psi_i(t^\mu, x^m) && \text{pour } m_i = N,\ \mu = 1, \ldots, N_1 \end{aligned}$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

LEMME 1. *Si les hypothèses* (1), (2) *et* (7) *de* 2 *sont satisfaites et* $k \to 0$ *lorsque* $h \to 0$, *alors*

$$(4.2)\qquad \begin{gathered} u^{M\sim} = f\big(t^\mu, x^m, u^M, u^{MI}, u^{MIJ}, u^\mu(\cdot)\big) + \eta^M \qquad (M \in Z_1 \cap Z_2), \\ \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0, \qquad \varepsilon(h) = \max_{M \in Z_1 \cap Z_2} |\eta^M| \end{gathered}$$

où les grandeurs $u^{M\sim}$, u^{MI}, u^{MIJ} *et* $u^\mu(\cdot)$ *pour* u^M *sont définies de la même manière que les grandeurs* $v^{M\sim}$, v^{MI}, v^{MIJ} *et* $v^\mu(\cdot)$ *le sont pour* v^M (*voir* (3.11) *et* (2.7′) (2.7)).

La formule (4.2) résulte de (3.7) puisque f est continue dans D et $u(t, x)$ est de classe C^2 dans l'ensemble $[0, \tau) \times \operatorname{Int} E$.

5. LEMME 2. *Supposons que les hypothèses de* 2 *sont satisfaites et que les pas* h *et* k *sont tels que*

$$(5.1)\qquad \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0, \qquad \frac{2}{h^2} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}^{(p)} - \frac{1}{k} \leqslant 0 \qquad \textit{sur } D \ (p = 1, 2)$$

et soit

$$(5.2)\qquad r^M = u^M - v^M, \qquad s^\mu = \max_m r^M, \qquad z^\mu = \min_m r^M, \qquad R^\mu = \max_m |r^M| \qquad (M \in Z)$$

où u^M *et* v^M *sont définies par les formules* (4.1), (4.2) *et* (3.9) *respectivement.*

Sous ces hypothèses, les nombres s^μ, z^μ, R^μ *satisfont aux conditions*

$$(5.3)\qquad s^0 = z^0 = R^0 = 0,$$

$$(5.4)\qquad s^{\mu\sim} \leqslant (L+K)R^\mu + \varepsilon(h), \qquad z^{\mu\sim} \geqslant -(L+K)R^\mu - \varepsilon(h) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, N_1 - 1)$$

où

$$s^{\mu\sim} = \frac{1}{k}(s^{\mu+1} - s^\mu), \qquad z^{\mu\sim} = \frac{1}{k}(z^{\mu+1} - z^\mu)$$

et $\varepsilon(h)$ *est défini par la formule* (4.2).

Démonstration. De (4.1) et de (3.10) résulte la formule (5.3). Nous prouverons la première des inégalités (5.4). Soit

$$s^{\mu+1} = r^{+A}, \quad s^{\mu} = r^{B}. \tag{5.5}$$

Nous pouvons supposer que $A = (\mu, a_1, \ldots, a_n) = (\mu, a) \in Z_1 \cap Z_2$ car la première des inégalités (5.4) est valable pour $a_i = 0$ et pour $a_i = N$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (voir (3.10) et (4.1)).

De la définition $s^{\mu\sim}$ et de (5.5), nous tirons

$$s^{\mu\sim} = \frac{1}{k}(r^{+A} - r^{A}) + \frac{1}{k}(r^{A} - r^{B}) = u^{A\sim} - v^{A\sim} + \frac{1}{k}(r^{A} - r^{B}). \tag{5.6}$$

Donc,

$$\begin{aligned} s^{\mu\sim} = \eta^{A} + f\big(t^{\mu}, x^{a}, u^{A}, u^{AI}, u^{AIJ}, u^{\mu}(\cdot)\big) - \\ - f\big(t^{\mu}, x^{a}, v^{A}, v^{AI}, v^{AIJ}, v^{\mu}(\cdot)\big) + \frac{1}{k}(r^{A} - r^{B}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

(voir (4.2), (3.10)).

En appliquant l'inégalité (3.4a) au second membre de (5.7), on obtient

$$\begin{aligned} s^{\mu\sim} \leqslant \eta^{A} + a^{(1)} r^{A} + \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(1)} (r^{i(A)} - r^{-i(A)}) + \\ + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}^{(1)} (r^{i(A)} - 2r^{A} + r^{-i(A)}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} |\gamma_{ij}^{(1)}| \cdot (-r^{i(A)} - r^{j(A)} - r^{-i(A)} - \\ - r^{-j(A)} + 2r^{A} + r^{i(s(i,j)j(A))} + r^{-i(-s(i,j)j(A))}) + \delta^{(1)} \|u^{\mu}(\cdot) - v^{\mu}(\cdot)\|, \end{aligned} \tag{5.8}$$

où

$$s(i,j) = \begin{cases} +1 & \text{pour } \gamma_{ij}^{(p)} \geqslant 0 \\ -1 & \text{pour } \gamma_{ij}^{(p)} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (p = 1, 2)$$

(voir l'hypothèse (5)).

Or il résulte de (3.2) et de (2.7)–(2.9) que

$$\begin{aligned} \|u^{\mu}(\cdot) - v^{\mu}(\cdot)\| &= \max_{s \in E} \Big| \sum_{M(\mu) = (\mu, m) \in Z_1} \chi_m(s)(u^{M(\mu)} - v^{M(\mu)}) \Big| \\ &= \max_{M(\mu) = (\mu, m) \in Z_1} |r^{M(\mu)}|. \end{aligned} \tag{5.9}$$

En tenant compte de (5.9) et en regroupant convenablement les termes du second membre de l'inégalité (5.8), on obtient

$$(5.10)\qquad \begin{aligned} s^{\mu\sim} \leqslant\ & \eta^A + a^{(1)} r^A + \\ & + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h}\Big(\gamma_{ii}^{(1)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\gamma_{ij}^{(1)}|\Big) + \frac{1}{2}\beta_i^{(1)}\right]\cdot (r^{i(A)} - r^B) + \\ & + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h}\Big(\gamma_{ii}^{(1)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\gamma_{ij}^{(1)}|\Big) - \frac{1}{2}\beta_i^{(1)}\right]\cdot (r^{-i(A)} - r^B) + \\ & + \frac{1}{2h^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} |\gamma_{ij}^{(1)}|\cdot\big[(r^{i(s(i,j)j(A))} - r^B) + (r^{-i(-s(i,j)j(A))} - r^B) + 2(r^A - r^B)\big] + \\ & + \Big(\frac{2}{h^2}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii}^{(i)} - \frac{1}{k}\Big)(r^B - r^A) + \delta^{(1)} \max_{M(\mu)=(\mu,m)\in Z_1} |r^{M(\mu)}|. \end{aligned}$$

Des hypothèses (3.5) et (5.1) il résulte que

$$(5.11)\qquad \begin{aligned} & \frac{1}{h}\Big(\gamma_{ii}^{(1)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\gamma_{ij}^{(1)}|\Big) + \frac{1}{2}\beta_i^{(1)} \geqslant \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0, \\ & \frac{1}{h}\Big(\gamma_{ii}^{(1)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\gamma_{ij}^{(1)}|\Big) - \frac{1}{2}\beta_i^{(1)} \geqslant \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0 \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et à partir de (5.5), on obtient

$$(5.12)\qquad \begin{aligned} & r^{i(A)} - r^B \leqslant 0, \quad r^{-i(A)} - r^B \leqslant 0, \quad r^{i(s(i,j)j(A))} - r^B \leqslant 0, \\ & r^{-i(-s(i,j)j(A))} - r^B \leqslant 0, \quad r^A - r^B \leqslant 0 \\ & (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ i \neq j). \end{aligned}$$

Les inégalités (5.10)–(5.12) ainsi que l'hypothèse (5.1) nous menent à

$$(5.13)\qquad s^{\mu\sim} \leqslant \eta^A + a^{(1)} r^A + \delta^{(1)} \max_{M(\mu)=(\mu,m)\in Z_1} |r^{M(\mu)}|$$

d'où en vertu de (4.2), (3.5) et (5.2), nous avons

$$(5.14)\qquad s^{\mu\sim} \leqslant \varepsilon(h) + L\cdot R^\mu + K\cdot R^\mu = (L+K)R^\mu + \varepsilon(h)$$

ce qui termine la démonstration de la première des inégalités (5.4).

En introduisant les notations

$$(5.15)\qquad z^{\mu+1} = r^{+C}, \quad z^\mu = r^D$$

et en appliquant l'inégalité (3.4b) on parvient, d'une façon analogue, à la seconde inégalité de la formule (5.4).

6. LEMME 3. *Si les nombres* R^μ *sont définis par la formule* (5.2) *et si les hypothèses du lemme* 2 *sont satisfaites, alors*

$$R^{\mu\sim} \leqslant (L+K)R^\mu + \varepsilon(h) \quad (\mu = 0, 1, \ldots, N_1 - 1) \tag{6.1}$$

où $\varepsilon(h)$ *est défini par la formule* (4.2).

Démonstration. Pour démontrer (6.1) notons que $R^\mu = \max(s^\mu, -z^\mu)$ pour $\mu = 0, 1, \ldots, N_1$. Donc, à partir du lemme 2 on a

$$R^{\mu\sim} \leqslant \max(s^{\mu\sim}, -z^{\mu\sim}) \leqslant (L+K)R^\mu + \varepsilon(h) \quad (\mu = 0, 1, \ldots, N_1 - 1) \tag{6.2}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.

7. LEMME 4. *Si les nombres* R^μ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ *satisfont aux inégalités aux différences finies*

$$R^{\mu\sim} \leqslant a \cdot R^\mu + \varepsilon \quad (\mu = 0, 1, \ldots) \tag{7.1}$$

et à la condition $R^0 = 0$ *où* $R^{\mu\sim} = \dfrac{1}{\beta}(R^{\mu+1} - R^\mu)$ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ *et* $0 < a = \text{const}$, $0 < \beta = \text{const}$, *alors*

$$R^\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{a}(e^{a\beta\mu} - 1) \quad (\mu = 0, 1, \ldots). \tag{7.2}$$

Le lemme 4 est facile à démontrer par l'induction complète.

8. THÉORÈME 1. *Si les hypothèses du lemme* 2 *sont satisfaites, alors*

1) *l'erreur de la méthode des différences finies* (3.10) *peut être estimée de la façon suivante:*

$$|r^M| \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{L+K} \cdot [e^{(L+K)k\mu} - 1] \quad (\mu = 0, 1, \ldots, N_1) \tag{8.1}$$

dans tous les points nodaux de l'ensemble $[0, \tau] \times [0, \sigma]^n$,

2) *la méthode des différences finies* (3.10) *est convergente, c'est-à-dire*

$$\lim_{h\to 0} r^M = 0 \quad (M \in Z) \tag{8.2}$$

(voir (2.4)).

Démonstration. Vu que (8.2) résulte de (8.1) il suffit de prouver (8.1).

On obtient des lemmes 3 et 4

$$R^\mu \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{L+K} \cdot [e^{(L+K)k\mu} - 1] \quad (\mu = 0, 1, \ldots, N_1). \tag{8.3}$$

Mais la définition (5.2) entraîne $|r^M| \leqslant R^\mu$ pour $M \in Z$, donc

$$|r^M| \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{L+K} \cdot [e^{(L+K)k\mu} - 1] \qquad (M \in Z) \tag{8.4}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

9. THÉORÈME 2. *Si les hypothèses de* 3 *sont satisfaites et si le problème* (3.7), (3.8) *a une solution dans la classe Ω de fonctions continues dans l'ensemble* $[0, \tau] \times E$ *et ayant des dérivées du second ordre dans* $[0, \tau) \times \operatorname{Int} E$, *cette solution est unique dans la classe Ω.*

Démonstration. Soient $u(t, x) \in \Omega$ et $\tilde{u}(t, x) \in \Omega$ deux solutions du problème (3.7), (3.8). Les approximations v^M $(M \in Z)$ satisfaisant au système d'équations aux différences finies (3.10) sont déterminées par le second membre de l'équation (3.7) ainsi que par les fonctions φ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ et ψ_i $(i = 1, \ldots, n)$ qui figurent dans les conditions aux limites (3.8). Les nombres v^M $(M \in Z)$ ne dépendent donc pas de la solution du problème (3.7), (3.8). Mais il résulte du théorème 1 que la suite $\{v^M\}$ a pour un point fixé $M \in Z$ la limite u^M lorsque $h \to 0$ (voir (8.2)). De la même égalité (8.2) l'on obtient que $v^M \to \tilde{u}^M$ pour $h \to 0$; tout ceci en vertu de l'unicité de la limite conduit à $u^M = \tilde{u}^M$ pour chaque $M \in Z$, ce qui signifie que $u \equiv \tilde{u}$ sur $[0, \tau] \times E$.

La démonstration du théorème 2 est donc terminée.

Travaux cités

[1] Z. Kowalski, *A difference method for non-linear parabolic differential equation without mixed derivatives*, Ann. Polon. Math. 20 (1968), p. 167–177.

[2] M. Malec, *Méthode des différences finies pour une équation différentielle partielle avec dérivées mixtes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), p. 561–567.

[3] W. Niedoba, *Metoda różnicowa rozwiązywania równań różniczkowo-funkcjonalnych*, Thèse de doctorat, Université Jagellon., Cracovie 1974.

[4] J. Szarski, *Uniqueness of solutions of a mixed problem for parabolic differential-functional equations*, Ann. Polon. Math. 28 (1973), p. 57–65.

Reçu par la Rédaction le 1. 9. 1975