

Domaine de variation des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes bornées à coefficients réels

par L. MIKOŁAJCZYK (Łódź)

Introduction. Dans ce qui suit, nous étudions le domaine de variation du second et du troisième coefficients des fonctions univalentes à coefficients réels qui appartiennent à la classe des fonctions normalisées et bornées dans le cercle unité. La méthode qui y a été appliquée est pareille à celle qui a servi à Z. Charzyński et W. Janowski [1] pour l'étude du domaine de variation de A_2 et A_3 des fonctions univalentes bornées.

Notations. Nous allons considérer les classes suivantes de fonctions à coefficients réels:

$S(M)$ — la classe des fonctions univalentes de la forme

$$(1) \quad F(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

qui satisfont à la condition

$$(2) \quad |F(z)| < M \quad \text{pour} \quad |z| < 1,$$

où M est une constante supérieure à 1.

$S(\infty)$ — la classe de toutes les fonctions univalentes de la forme (1),

$S(1)$ — la classe des fonctions univalentes qui sont de la forme:

$$(3) \quad f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = a_1 (z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots)$$

et satisfont aux conditions:

$$(4) \quad a_1 > 0,$$

$$(5) \quad |f(z)| < 1 \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

$S(T)$ — la classe des fonctions de la forme (3) qui vérifient la condition (5) ainsi que la condition

$$(6) \quad a_1 \geq T,$$

$0 < T < 1$ étant donné.

Pour tout nombre entier positif $N \geq 2$ on peut associer à chaque fonction de la forme (1) le point

$$(7) \quad (A_2, A_3, \dots, A_N)$$

qui est un point de l'espace euclidien à $N-1$ dimensions.

L'ensemble de tous ces points, lorsque la fonction (1) parcourt toute la classe $S(M)$ ou la classe $S(\infty)$, sera dit domaine de variation des coefficients de fonctions de cette classe et sera désigné respectivement par $B_{N,M}$ et $B_{N,\infty}$.

De même, l'ensemble des points de la forme (7) correspondant aux fonctions de la classe $S(T)$ sera désigné par $D_{N,T}$ et dit domaine de variation de N coefficients des fonctions de cette classe.

On voit bien que pour $T = 1/M$ on a

$$(8) \quad B_{N,M} = D_{N,T}.$$

Ainsi l'étude du domaine $B_{N,M}$ se ramène à l'étude du domaine $D_{N,T}$.

§ 1. Propriétés du domaine $D_{N,T}$. Pour $N \geq 2$ et $0 < T < 1$ arbitraires, supposons donné le domaine respectif $D_{N,T}$. Comme dans le mémoire [6], nous prouverons d'abord trois lemmes.

LEMME 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que le point*

$$(1.1) \quad (A_2, A_3, \dots, A_N)$$

soit un point intérieur du domaine $D_{N,T}$ est que ce point appartienne à un ensemble D_{N,T_0} , où $T_0 > T$.

Démonstration. Supposons que le point (A_2, A_3, \dots, A_N) se trouve à l'intérieur de l'ensemble $B_{N,M}$ et que le point $(\varrho A_2, \varrho^2 A_3, \dots, \varrho^{N-1} A_N)$, où ϱ est un nombre plus grand que 1, a la même propriété. Admettons que la fonction $f(z) \in S(T)$ est de la forme

$$f(z) = a_1(z + A_2 \varrho z^2 + A_3 \varrho^2 z^3 + \dots + A_N \varrho^{N-1} z^N + \dots).$$

Il résulte du lemme de Schwarz que la fonction

$$g(z) = \varrho f(z/\varrho) = a_1(z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_N z^N + \dots)$$

vérifie dans le cercle $|z| < 1$ l'inégalité

$$|g(z)| < q < 1,$$

où q est un certain nombre.

Considérons la fonction

$$f_0(z) = 1/q g(z) = a_1^{(0)}(z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_N z^N + \dots).$$

On remarque facilement que la fonction ainsi définie, où $a_1^{(0)} = a_1/q$, appartient à la classe $S(T_0)$ avec $T_0 = T/q$. Par cela même nous avons démontré que la condition est nécessaire.

Afin de prouver que la condition est aussi suffisante, prenons la fonction

$$(1.2) \quad f_0(z) = a_1^{(0)}(z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_N z^N + \dots)$$

appartenent à la classe $S(T_0)$, où $T_0 > T$, et la fonction

$$(1.3) \quad f(z) = q f_0(z) = a_1(z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_N z^N + \dots),$$

où $q = T/T_0$. La fonction (1.3) est de la classe $S(T)$. Soit w_0 un point de l'extérieur de la circonférence $|w| = q$. Il existe alors un nombre $\delta > 0$ tel que cercle $|w - w_0| \leq \delta$ se trouve entièrement à l'extérieur du cercle $|w| < q$.

D'autre part il existe aussi un nombre $\eta > 0$ (cf. [6], p. 10) tel que la fonction

$$(1.4) \quad \varphi(w) = \frac{\eta_2 w^2 + \eta_3 w^3 + \dots + \eta_N w^N}{(1 - w/w_0)^N}$$

satisfait à l'inégalité

$$(1.5) \quad |\varphi'(w)| \leq \frac{1}{2\pi}$$

dans le domaine $|w - w_0| > \delta$, pourvu que

$$(1.6) \quad \sum_{\nu=2}^N |\eta_\nu| \leq \eta.$$

Choisissons dans le domaine $|w - w_0| > \delta$ deux points arbitraires w_1 et w_2 . Joignons ces points par un arc de longueur $L \leq \pi |w_1 - w_2|$. Il en résulte

$$|\varphi(w_1) - \varphi(w_2)| \leq \int_{w_2}^{w_1} |\varphi'(w)| dw \leq |w_1 - w_2|/2.$$

Formons la fonction

$$g(w) = w + \varphi(w)$$

qui est univalente dans le domaine $|w - w_0| > \delta$ à condition que l'inégalité (1.6) soit satisfaite et que les points w_1, w_2 soient des points arbitraires de ce domaine à distance finie. On a alors

$$|g(w_1) - g(w_2)| \geq |w_1 - w_2| - |w_1 - w_2|/2 > 0.$$

Si l'on développe la fonction $g(w)$ en série entière, on trouve

$$\begin{aligned} g(w) &= w + \eta_2(w^2 + C_{23}w^3 + C_{24}w^4 + \dots) \\ &\quad + \eta_3(w^3 + C_{34}w^4 + C_{35}w^5 + \dots) \\ &\quad + \dots \\ &= w + \eta_2 w^2 + (\eta_2 C_{23} + \eta_3) w^3 + \dots \end{aligned}$$

où les coefficients C_{ij} dépendent de w_0 et des nombres entiers i, j, N .

Le système d'équations

$$\begin{aligned} L_2 &= \eta_2, \\ L_3 &= \eta_2 C_{23} + \eta_3, \\ &\dots\dots\dots \\ L_N &= \eta_2 C_{2N} + \eta_3 C_{3N} + \dots + \eta_{N-1} C_{N-1,N} + \eta_N \end{aligned}$$

a une solution par rapport à $(\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_N)$ pour tout système de nombres (L_2, L_3, \dots, L_N) . En outre il existe un nombre positif C , qui dépend de w_0 et de N , tel que

$$\sum_{r=2}^N |\eta_r| \leq C \sum_{r=2}^N |L_r|.$$

Par conséquent, si l'on a L_2, L_3, \dots, L_N vérifiant la condition

$$(1.7) \quad \sum_{r=2}^N |L_r| \leq \eta/C,$$

on a la fonction

$$g(w) = w + L_2 w^2 + L_3 w^3 + \dots + L_N w^N + \dots$$

qui est holomorphe et univalente dans le domaine $|w - w_0| > q$, exception faite du point $w = \infty$ où la fonction a un pôle du premier ordre.

Désignons par $a_r^{(k)}$ le coefficient de z^r du développement, au voisinage du point $z = 0$, de la k^{e} puissance de la fonction représentée par (1.3), c'est-à-dire

$$[f(z)]^k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r^{(k)} z^r.$$

La fonction composée

$$\begin{aligned} h(z) &= g[f(z)] = f(z) + L_2 [f(z)]^2 + L_3 [f(z)]^3 + \dots \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} a_r z^r + L_2 \sum_{r=2}^{\infty} a_r^{(2)} z^r + L_3 \sum_{r=3}^{\infty} a_r^{(3)} z^r + \dots \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} a'_r z^r = a'_1 \sum_{r=1}^{\infty} A'_r z^r, \end{aligned}$$

où $a'_1 = a_1$, $A'_1 = 1$, est, comme on le voit bien, une fonction de la classe $S(T)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} a'_2 &= a_2 + L_2 a_1^2, \\ a'_3 &= a_3 + L_2 a_3^{(2)} + L_3 a_1^3, \\ &\dots\dots\dots \\ a'_{N+1} &= a_{N+1} + L_2 a_N^{(2)} + L_3 a_N^{(3)} + \dots + L_{N-1} a_N^{(N-1)} + L_N a_1^N. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Si les points (A_2, A_3, \dots, A_N) , $(A'_2, A'_3, \dots, A'_N)$, où $A'_2 = a'_2/a'_1$, $A'_3 = a'_3/a'_1, \dots, A'_N = a'_N/a'_1$ sont donnés, le système (1.8) a une solution par rapport à L_2, L_3, \dots, L_N et il existe un nombre C_1 , qui dépend uniquement de A_2, A_3, \dots, A_N , tel que

$$\sum_{r=2}^N |L_r| \leq C_1 \sum_{r=2}^N |A'_r - A_r|.$$

Ainsi, si l'on a la fonction (1.3) qui transforme le cercle $|z| < 1$ en un ensemble situé dans le domaine $|w - w_0| > \delta$, on choisit dans cet ensemble un point quelconque $(A'_2, A'_3, \dots, A'_N)$ qui vérifie l'inégalité

$$\sum_{r=2}^N |A'_r - A_r| \leq \eta C^{-1} C_1^{-1}.$$

Ensuite on détermine à partir des équations (1.8) les nombres L_2, L_3, \dots, L_N , satisfaisant à l'inégalité (1.7) et l'on construit la fonction $g(w)$ aux propriétés énoncées. Comme la fonction

$$h(z) = g[f(z)] = a'_1(z + A'_2 z^2 + A'_3 z^3 + \dots + A'_N z^N + \dots)$$

appartient à la classe $S(T)$ et le point $(A'_2, A'_3, \dots, A'_N)$ est un point arbitraire d'un ensemble compris dans le domaine $|w - w_0| > \delta$, le lemme se trouve démontré.

LEMME 2. *L'ensemble $D_{N,T}$ est un ensemble ⁽¹⁾ fermé et borné; il contient dans son intérieur le point $(A_2 = 0, A_3 = 0, \dots, A_N = 0)$. Dans la terminologie de la topologie le domaine $D_{N,T}$ équivaut à une sphère fermée à $(N-1)$ dimensions.*

Démonstration. D'après [2] on a $|A_n| \leq n$ ($n = 2, 3, \dots$). L'ensemble $D_{N,T}$ est donc borné. Cet ensemble est fermé, car la classe $S(T)$ est une classe compacte, étant donné qu'elle est un sous-ensemble de la classe compacte $S(\infty)$. Afin de prouver que le point $(A_2 = 0, A_3 = 0, \dots, A_N = 0)$ se trouve à l'intérieur du domaine $D_{N,T}$, considérons la fonction $f(z) = a_1 z$, où $a_1 \geq T$. La fonction considérée étant de la classe $S(T)$, on déduit facilement, d'après le lemme 1, que le point $(A_2 = 0, A_3 = 0, \dots, A_N = 0)$ se trouve à l'intérieur de l'ensemble $D_{N,T}$.

Considérons maintenant la fonction

$$(1.9) \quad f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r z^r,$$

⁽¹⁾ Nous entendons ici par domaine un ensemble ouvert et connexe, tandis que nous appelons domaine fermé la fermeture de ce domaine.

appartenant à la classe $S(T)$ et la fonction

$$(1.10) \quad 1/\varrho f(\varrho z) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \varrho^{r-1} z^r,$$

où ϱ est un nombre arbitraire, mais fixe, de l'intervalle fermé $\langle 0, 1 \rangle$. A la fonction (1.10) correspond le point

$$(1.11) \quad (A_2 \varrho, A_3 \varrho^2, \dots, A_N \varrho^{N-1})$$

qui, en vertu du lemme 1, est pour $0 \leq \varrho < 1$ un point intérieur de l'ensemble $D_{N,T}$.

Distinguons maintenant deux cas:

1° Le point (A_2, A_3, \dots, A_N) est un point intérieur du domaine $D_{N,T}$ et il est un point de la fonction (1.9). Dans ce cas la trace du point (1.11) lorsque ϱ varie d'une manière continue dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, joint le point (A_2, A_3, \dots, A_N) au point $(A_2 = 0, A_3 = 0, \dots, A_N = 0)$ et se trouve complètement à l'intérieur de l'ensemble $D_{N,T}$. L'ensemble $D_{N,T}$ est donc un domaine.

2° Le point (A_2, A_3, \dots, A_N) est un point de la frontière de l'ensemble $D_{N,T}$, tandis que les points de la forme (1.11) se trouvent à l'intérieur de l'ensemble $D_{N,T}$ lorsque $0 \leq \varrho < 1$. Chaque point de la frontière est alors limite d'une suite de points intérieurs; l'ensemble $D_{N,T}$ est donc un domaine fermé.

Afin de prouver que le domaine $D_{N,T}$ équivaut topologiquement à une sphère à $(N-1)$ dimensions, posons

$$\begin{aligned} |A_\nu| &= r_\nu \quad (\nu = 2, 3, \dots, N), \\ |c_\nu| &= r_\nu^{1/(\nu-1)} \quad (\nu = 2, 3, \dots, N). \end{aligned}$$

De cette manière on a associé le point $(|c_2|, |c_3|, \dots, |c_N|)$ au point (A_2, A_3, \dots, A_N) du domaine $D_{N,T}$. Lorsque le point (A_2, A_3, \dots, A_N) parcourt le domaine $D_{N,T}$, le point $(|c_2|, |c_3|, \dots, |c_N|)$ qui lui correspond, parcourt un certain ensemble C_N .

On vérifie aisément que transformation décrite est univoque et mutuellement continue; elle est donc une transformation topologique.

Elle transforme le point (1.11) en le point

$$(1.12) \quad (|c_2| \varrho, |c_3| \varrho, \dots, |c_N| \varrho).$$

Si le point $(|c_2|, |c_3|, \dots, |c_N|)$ appartient à l'ensemble C_N , le point (1.12) est un point intérieur de cet ensemble, pour $0 \leq \varrho < 1$. Il s'ensuit que C_N est un domaine étoilé par rapport au point $(|c_2| = 0, |c_3| = 0, \dots, |c_N| = 0)$, et par conséquent chaque demi-droite issue de ce point coupe la frontière C_N en un seul point. Ainsi chaque sphère à $(N-1)$ dimensions suffisamment petite et de centre $(|c_2| = 0, |c_3| = 0, \dots, |c_N| = 0)$ est entière-

ment contenue dans l'intérieur de C_N . Tout segment de droite joignant le point $(|c_2| = 0, |c_3| = 0, |c_4| = 0, \dots, |c_N| = 0)$ à un point arbitraire de la frontière du domaine C_N peut être transformé linéairement en le rayon d'une sphère-unité à $(N-1)$ dimensions de même direction que le segment donné. Une telle transformation de C_N en une sphère à $(N-1)$ dimensions est, bien entendu, biunivoque et mutuellement continue. Mais cela prouve déjà que C_N , et par cela même $D_{N,T}$, sont topologiquement équivalents à une sphère fermée à $(N-1)$ dimensions.

LEMME 3. *Etant donné un point*

$$(1.13) \quad (A_2^*, A_3^*, \dots, A_N^*)$$

de la frontière du domaine $D_{N,T}$, il existe une fonction $f^(z)$ appartenant à la classe $S(T)$ telle que*

$$(1.14) \quad \begin{aligned} f^*(z) &= a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \dots + a_N^* z^N + \dots \\ &= a_1^* (z + A_2^* z^2 + A_3^* z^3 + \dots + A_N^* z^N + \dots) . \end{aligned}$$

En outre, la fonction (1.14) satisfait à l'équation de la forme

$$(1.15) \quad \left[\frac{f^{*'}(z)}{f^*(z)} \right]^2 \mathfrak{B}[f^*(z)] = \frac{1}{z^2} \Re(z) , \quad 0 < |z| < 1 ,$$

où, en désignant par $\mathfrak{B}(w)$ l'expression $\mathfrak{B}[f^(z)]$, on a*

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \mathfrak{B}(w) &= \sum_{p=2}^N D_{p-1}^* \left(w^{p-1} + \frac{1}{w^{p-1}} \right) - 2P^* , \\ \Re(z) &= \sum_{p=1}^N E_{p-1}^* \left(z^{p-1} + \frac{1}{z^{p-1}} \right) - 2P^* , \\ f^*(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n , \\ [f^*(z)]^p &= \sum_{n=p}^{\infty} a_n^{*(p)} z^{(n)} \quad (p = 2, 3, \dots) , \\ D_{p-1}^* &= 2 \sum_{n=p}^N a_n^{*(p)} H_n^* \quad (p = 2, 3, \dots) , \\ E_0^* &= \sum_{n=2}^N (n-1) a_n^* H_n^* , \\ E_{p-1}^* &= 2 \sum_{n=p}^N (n-p+1) a_{n-p+1}^* H_n^* \quad (p = 2, 3, \dots) , \\ P^* &= \min_{0 \leq x \leq 2\pi} \left\{ \sum_{p=2}^N D_{p-1}^* \cos(p-1)x \right\} \end{aligned}$$

tandis que les H_n^* ($n = 2, \dots, N$) sont des nombres satisfaisant à la condition

$$\sum_{n=2}^N H_n^{*2} = 1.$$

Les fonctions $\mathfrak{W}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ admettent respectivement sur les circonférences $|w| = 1$ et $|z| = 1$ uniquement des valeurs réelles, non négatives et ont chacune sur ces circonférences une racine double. De plus $a_1^* = T$.

Démonstration. Pour la démonstration du lemme il suffit de s'appuyer sur les résultats, obtenus dans [3], qui prouvent l'existence d'une fonction de la forme (1.14) jouissant des propriétés énumérées dans l'énoncé du lemme. En outre, les mêmes résultats permettent de conclure que sur la frontière de $D_{N,T}$ il existe des points de la forme (1.13) constituant un ensemble dense et qui correspondent aux fonctions extrémales (1.14). En fermant cet ensemble dense de points, on obtient la conclusion du lemme.

§ 2. Equations paramétriques de la frontière du domaine

$D_{N,T}$. Supposons donnés $N = 3$, $M > 1$ et un domaine $B_{3,M}$. On a le théorème suivant:

THÉORÈME. La frontière du domaine $B_{3,M}$ est la somme de quatre ensembles K_1, K_2, K'_1, K'_2 définis par les équations paramétriques:

$$\begin{aligned} K_1: \\ (2.1) \quad A_2^* &= 2T - 2\cos\nu + 2\cos\nu \log \cos\nu, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos\nu - 4T \cos\nu + 2\cos^2\nu + 1 + T^2, \end{aligned}$$

où

$$T \leq \cos\nu \leq 1;$$

$$\begin{aligned} K_2: \\ (2.2) \quad A_2^* &= 2\cos\nu \log T, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos\nu - T^2 + 1, \end{aligned}$$

où

$$0 \leq \cos\nu \leq T;$$

$$\begin{aligned} K'_1: \\ (2.1') \quad A_2^* &= -2T - 2\cos\nu + 2\cos\nu \log(-\cos\nu), \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos\nu + 4T \cos\nu + 2\cos^2\nu + T^2 + 1, \end{aligned}$$

où

$$-1 \leq \cos\nu \leq -T;$$

$$\begin{aligned} K'_2: \\ (2.2') \quad A_2^* &= 2\cos\nu \log T, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos\nu - T^2 + 1, \end{aligned}$$

où

$$-T \leq \cos\nu \leq 0.$$

Démonstration. Comme $B_{3M} = D_{3T}$ pour $T = M^{-1}$, il suffit d'établir le théorème pour la frontière du domaine D_{3T} .

La démonstration se composera de deux parties. Dans la première on montrera que tout point de la frontière du domaine D_{3T} appartient à l'un des ensembles K_1, K_2, K'_1, K'_2 , c'est-à-dire que ses coordonnées peuvent être mises sous la forme (2.1) ou (2.2), soit (2.1') ou (2.2'). Dans la seconde partie de la démonstration il sera établi que les A_2^*, A_3^* , définis par (2.1), (2.2), (2.1'), (2.2') pour toute valeur du paramètre, sont les coefficients de la seconde et de la troisième puissance du développement en série de Maclaurin d'une certaine fonction à coefficients réels univalente dans le cercle unité. Cette fonction définit un point de la frontière.

Première partie de la démonstration. Soit (A_2^*, A_3^*) un point limite arbitraire du domaine D_{3T} et

$$w = f^*(z) = T(z + A_2^* z^2 + A_3^* z^3 + \dots)$$

une fonction appropriée de la classe $S(T)$, satisfaisant d'après le lemme 3 à l'équation

$$(2.3) \quad \frac{w'^2}{w^2} \mathfrak{W}(w) = \frac{1}{z^2} \mathfrak{N}(z),$$

dans laquelle

$$(2.4) \quad \mathfrak{W}(w) = \frac{1}{w^2} [D_2^* w^4 + D_1^* w^3 + \hat{D}_0 w^2 + D_1^* w + D_2^*],$$

$$(2.5) \quad \mathfrak{N}(z) = \frac{1}{z^2} [E_2^* z^4 + E_1^* z^3 + \hat{E}_0 z^2 + E_1^* z + E_2^*]$$

et où on a posé, pour des raisons de symétrie,

$$(2.6) \quad \hat{D}_0 = -2P^*,$$

$$(2.7) \quad \hat{E}_0 = 2E_0^* - 2P^*.$$

En vertu de (1.6), on a dans le cas $N = 3$

$$(2.8) \quad D_1^* = TE_1^*,$$

$$(2.9) \quad D_2^* = T^2 E_2^*.$$

Comme on ne peut avoir simultanément $D_1^* = 0$ et $D_2^* = 0$, on doit, pour procéder à la solution, considérer successivement trois cas:

$$(I) \quad D_1^* = TE_1^* \neq 0 \quad \text{et} \quad D_2^* = T^2 E_2^* = 0,$$

$$(II) \quad D_1^* = TE_1^* \neq 0 \quad \text{et} \quad D_2^* = T^2 E_2^* \neq 0,$$

$$(III) \quad D_1^* = TE_1^* = 0 \quad \text{et} \quad D_2^* = T^2 E_2^* \neq 0.$$

Dans le cas (I), l'équation (2.3) peut s'écrire

$$(2.10) \quad \frac{w'^2}{w^4} (D_1^* w^3 + \hat{D}_0 w^2 + D_1^* w) = \frac{1}{z^4} (E_1^* z^3 + \hat{E}_0 z^2 + E_1^* z) .$$

Lorsque $D_1^* > 0$, on a, conformément à la définition de P^* , $P^* = -D_1^*$ et si l'on tient compte de (2.6) ainsi que des propriétés des fonctions $\mathfrak{M}(w)$, $\mathfrak{N}(z)$, l'équation (2.10) prend la forme

$$(2.11) \quad T \frac{w'^2}{w^3} (w+1)^2 = \frac{1}{z^3} (z+1)^2 .$$

Si l'on extrait la racine carrée et l'on intègre les deux membres de (2.11), on trouve

$$T^{1/2} \frac{1-w}{w^{1/2}} = \varepsilon \frac{1-z}{z^{1/2}} + C ,$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et C est la constante d'intégration.

Comme $w = f^*(0) = 0$, il est facile de vérifier qu'on a nécessairement $C = 0$ et $\varepsilon = 1$.

En désignant par

$$g(z) = \frac{z}{(1-z)^2} ,$$

on a

$$w = g^{-1}[T^{-1}g(z)] = Tz + 2(1-T)z^2 + (5T^2 - 8T + 3)z^3 + \dots$$

d'où il vient

$$(2.12) \quad \begin{aligned} A_2^* &= 2(1-T) , \\ A_3^* &= 5T^2 - 8T + 3 . \end{aligned}$$

En on admettant $D_1^* < 0$ et en procédant, comme ci-dessus, on trouve

$$(2.13) \quad \begin{aligned} A_2^* &= -2(1-T) , \\ A_3^* &= 5T^2 - 8T + 3 . \end{aligned}$$

Dans le cas (II), les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ peuvent respectivement s'écrire sous la forme

$$(2.14) \quad \mathfrak{M}(w) = \frac{D_2^*}{w^2} \left(w^4 + \frac{D_1^*}{D_2^*} w^3 + \frac{\hat{D}_0}{D_2^*} w^2 + \frac{D_1^*}{D_2^*} w + 1 \right) ,$$

$$(2.15) \quad \mathfrak{N}(z) = \frac{E_2^*}{z^2} \left(z^4 + \frac{E_1^*}{E_2^*} z^3 + \frac{\hat{E}_0}{E_2^*} z^2 + \frac{E_1^*}{E_2^*} z + 1 \right) .$$

On déduit de la forme de la fonction $\mathfrak{W}(w)$ donnée par la formule (2.14) que l'expression entre parenthèses, égale à zéro, représente une équation symétrique du quatrième degré à coefficients réels. D'autre part il découle des propriétés connues de la fonction $\mathfrak{W}(w)$ qu'elle admet sur la circonférence $|w| = 1$ au moins une racine double. En rapprochant ces deux faits, on conclut que dans le cas où les deux autres racines sont réelles, on a

$$(2.16) \quad \mathfrak{W}(w) = \frac{D_2^*}{w^2} (w - e^{i\theta})^2 (w - w_2)(w - w_3), \quad w_2 w_3 = 1.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de w des deux formes (2.14) et (2.16) de la fonction $\mathfrak{W}(w)$, on obtient

$$(2.17) \quad \begin{aligned} -2e^{i\theta} - (w_2 + w_3) &= \frac{D_1^*}{D_2^*}, \\ e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}(w_2 + w_3) + 1 &= \frac{\hat{D}_0}{D_2^*}, \\ -e^{2i\theta}(w_2 + w_3) - 2e^{i\theta} &= \frac{D_1^*}{D_2^*}, \quad e^{2i\theta} = 1. \end{aligned}$$

On voit bien que dans ce cas on doit avoir soit $\theta = 0$ soit $\theta = \pi$. Si $\theta = 0$, on a en vertu de (2.16) et (2.17)

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \mathfrak{W}(w) &= \frac{D_2^*}{w^2} (w-1)^2 (w-w_2)(w-w_3), \\ w_2 + w_3 &= -\left(\frac{D_1^*}{D_2^*} + 2\right); \\ (2.18') \quad \frac{\hat{D}_0}{D_2^*} &= -2\left(\frac{D_1^*}{D_2^*} + 1\right). \end{aligned}$$

Etant donné que sur la circonférence $|w| = 1$ la fonction $\mathfrak{W}(w)$ est non négative, on démontre aisément que dans ce cas on a nécessairement $D_1^* < 0$.

Si $\theta = \pi$, on trouve de même

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \mathfrak{W}(w) &= \frac{D_2^*}{w} (w+1)^2 (w-w_2)(w-w_3), \\ w_2 + w_3 &= -\left(\frac{D_1^*}{D_2^*} - 2\right); \\ (2.19') \quad \frac{\hat{D}_0}{D_2^*} &= 2\left(\frac{D_1^*}{D_2^*} - 1\right) \end{aligned}$$

Dans ce cas on a nécessairement $D_1^* > 0$.

Lorsque les racines w_2 et w_3 ne sont pas des nombres réels, on trouve en égalant les coefficients des mêmes puissances de w des deux formes (2.14) et (2.16) de la fonction $\mathfrak{W}(w)$,

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad & -2e^{i\theta} - (w_2 + w_3) = \frac{D_1^*}{D_2^*}, \\
 & e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}(w_2 + w_3) + w_2 w_3 = \frac{\hat{D}_0}{D_2^*}, \\
 & -e^{2i\theta}(w_2 + w_3) - 2e^{i\theta}w_2 w_3 = \frac{D_1^*}{D_2^*}, \quad e^{2i\theta}w_2 w_3 = 1.
 \end{aligned}$$

On voit bien qu'on a alors $w_2 = w_3 = e^{-i\theta}$ et par conséquent on a

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad & \mathfrak{W}(w) = \frac{D_2^*}{w^2} (w - e^{i\theta})^2 (w - e^{-i\theta})^2, \\
 & \frac{D_1^*}{D_2^*} = -4 \cos \theta;
 \end{aligned}$$

$$(2.21') \quad \frac{\hat{D}_0}{D_2^*} = 4 \cos^2 \theta + 2.$$

Vu que $\hat{D}_0 > 0$, il résulte de la dernière égalité que $D_2^* > 0$. Un raisonnement analogue relatif à la fonction $\mathfrak{N}(z)$ nous donnerait

$$(2.22) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}(z) = \frac{E_2^*}{z^2} (z-1)^2 (z-z_2)(z-z_3), \\ z_2 + z_3 = -\left(\frac{E_1^*}{E_2^*} + 2\right), \\ z_2 z_3 = 1; \end{cases}$$

$$(2.22') \quad \begin{cases} \frac{\hat{E}_0}{E_2^*} = -2\left(\frac{E_1^*}{E_2^*} + 1\right), \\ E_1^* < 0; \end{cases}$$

$$(2.23) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}(z) = \frac{E_2^*}{z^2} (z+1)^2 (z-z_2)(z-z_3), \\ z_2 + z_3 = -\left(\frac{E_1^*}{E_2^*} - 2\right), \\ z_2 z_3 = 1; \end{cases}$$

$$(2.23') \quad \begin{cases} \frac{\hat{E}_0}{E_2^*} = 2\left(\frac{E_1^*}{E_2^*} - 1\right), \\ E_1^* > 0; \end{cases}$$

$$(2.24) \quad \begin{cases} \Re(z) = \frac{E_2^*}{z^2} (z - e^{i\nu})^2 (z - e^{-i\nu})^2, \\ \frac{E_1^*}{E_2^*} = -4 \cos \nu; \end{cases}$$

$$(2.24') \quad \begin{cases} \frac{\hat{E}_0}{E_2^*} = 4 \cos^2 \nu + 2, \\ E_2^* > 0. \end{cases}$$

Il résulte des propriétés générales dont jouissent les fonctions $\mathfrak{W}(w)$ et $\Re(z)$ (cf. [3]) ainsi que des formes possibles, obtenues ci-dessus, que peuvent prendre ces fonctions, que l'équation (2.3) s'écrira, en tenant compte de (2.9), sous les formes suivantes:

$$(A) \quad T^2 \frac{w'^2}{w^4} (w-1)^2 (w-w_2)(w-w_3) = \frac{1}{z^4} (z-1)^2 (z-z_2)(z-z_3),$$

$$(B) \quad T^2 \frac{w'^2}{w^4} (w-1)^2 (w-w_2)(w-w_3) = \frac{1}{z^4} (z - e^{i\nu})^2 (z - e^{-i\nu})^2,$$

$$(C) \quad T^2 \frac{w'^2}{w^4} (w - e^{i\theta})^2 (w - e^{-i\theta})^2 = \frac{1}{z^4} (z - e^{i\nu})^2 (z - e^{-i\nu})^2,$$

$$(A') \quad T^2 \frac{w'^2}{w^4} (w+1)^2 (w-w_2)(w-w_3) = \frac{1}{z^4} (z+1)^2 (z-z_2)(z-z_3),$$

$$(B') \quad T^2 \frac{w'^2}{w^4} (w+1)^2 (w-w_2)(w-w_3) = \frac{1}{z^4} (z - e^{i\nu})^2 (z - e^{-i\nu})^2.$$

On déduit de ces équations, en particulier, d'une part de (A) et (B) et d'autre part de (A') et (B'), qu'on doit avoir $D_2^* = T^2 E_2^* > 0$. On remarque aussi qu'il suffit d'étudier de plus près les équations (A), (B), (C), car on pourra résoudre les équations (A) et (B) par le même procédé que les équations (A') et (B').

Supposons que l'équation (2.3) soit de la forme (A). On a alors, en vertu de (2.18'), (2.22') et des formules (1.16), dans lesquelles on a mis $N = 3$,

$$(2.25) \quad A_2^* = A_2^{*2} - \frac{1}{2} A_2^* \frac{E_1^*}{E_2^*} + T \frac{E_1^*}{E_2^*} - \frac{E_1^*}{E_2^*} - 1 + T^2.$$

Si l'on extrait la racine carrée de l'équation (A), on trouve

$$(2.26) \quad Tw' \frac{(w-1) \sqrt{(w-w_2)(w-w_3)}}{w^2} = \varepsilon \frac{(z-1) \sqrt{(z-z_2)(z-z_3)}}{z^2}$$

où l'on choisit comme branches des racines

$$\sqrt{(z-z_2)(z-z_3)} = (z-z_3) \sqrt{\frac{(z-z_2)}{(z-z_3)}},$$

$$\sqrt{(w-w_2)(w-w_3)} = (w-w_3) \sqrt{\frac{(w-w_2)}{(w-w_3)}}$$

celles qui satisfont aux conditions

$$\operatorname{re} \left(\sqrt{\frac{z-z_2}{z-z_3}} \right) > 0, \quad \operatorname{re} \left(\sqrt{\frac{w-w_2}{w-w_3}} \right) > 0.$$

Ces branches existent respectivement dans le domaine simplement connexe $E_1 = K(0, 1) - C$ et dans $f^*(E_1)$, $K(0, 1)$ désignant le cercle unité, tandis que C est le segment de droite $\langle w_2, 1 \rangle$.

Les expressions qui se trouvent sous les signes des radicaux diffèrent de zéro dans les domaines respectifs.

On vérifie facilement que la relation $w = f^*(0) = 0$ entraîne $\varepsilon = 1$. Si l'on intègre l'équation (2.26) dans un domaine simplement connexe arbitraire, mais ne contenant pas zéro et contenu dans le cercle $|z| < 1$, on obtient

$$(2.27) \quad T \left\{ \sqrt{(w-w_2)(w-w_3)} + \sqrt{(w-w_2)(w-w_3)} w^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (w_2 + w_3 + 2) \log \frac{w - \frac{1}{2}(w_2 + w_3) - \sqrt{(w-w_2)(w-w_3)}}{w^{-1} - \frac{1}{2}(w_2 + w_3) + \sqrt{(w-w_2)(w-w_3)} w^{-1}} \right\} \\ = \left\{ \sqrt{(z-z_2)(z-z_3)} + \sqrt{(z-z_2)(z-z_3)} z^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (z_2 + z_3 + 2) \log \frac{z - \frac{1}{2}(z_2 + z_3) - \sqrt{(z-z_2)(z-z_3)}}{z^{-1} - \frac{1}{2}(z_2 + z_3) + \sqrt{(z-z_2)(z-z_3)} z^{-1}} \right\} + C$$

où C est la constante d'intégration.

Si l'on développe, au voisinage du point $z = 0$, les deux membres de l'équation (2.27), on parvient à la relation

$$(2.28) \quad T \{ 1 + T^{-1} z^{-1} - \frac{1}{2} (w_2 + w_3) - T^{-1} A_2^* + \\ + \frac{1}{2} (w_2 + w_3 + 2) \log [-\frac{1}{2} (w_2 + w_3) - 1] - \\ - \frac{1}{2} (w_2 + w_3 + 2) \log (2 T^{-1} z^{-1}) \} + O_1(z) \\ = \{ 1 + z^{-1} - \frac{1}{2} (z_2 + z_3) + \frac{1}{2} (z_2 + z_3 + 2) \log [-\frac{1}{2} (z_2 + z_3) - 1] - \\ - \frac{1}{2} (z_2 + z_3 + 2) \log (2 z^{-1}) \} + O_2(z) + C$$

où $O_1(z)$ et $O_2(z)$ sont au moins du premier ordre et les logarithmes ont leurs valeurs principales.

Après avoir tenu compte de (2.18'), (2.22') et simplifié, on trouve

$$A_2^* = -2(1-T) + C,$$

mais cela prouve que $C = 0$, car d'après [4] $|A_2^*| \leq 2(1-T)$. Si l'on porte dans (2.25) la valeur de A_2^* ainsi trouvée, on a finalement

$$(2.29) \quad \begin{aligned} A_2^* &= -2(1-T), \\ A_3^* &= 5T^2 - 8T + 3. \end{aligned}$$

Lorsque c'est l'équation (B) qui a lieu, les égalités (2.18'), (2.24) et la relation (1.16) où on a posé $N = 3$, donnent

$$(2.30) \quad A_3^* = A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu - 4T \cos \nu + 2 \cos^2 \nu + T^2 + 1.$$

La relation $\hat{D}_0/D_2^* = -2(D_1^*/D_2^* + 1)$ entraîne $\hat{D}_0 = -2(D_1^* + D_2^*)$, et comme $D_0 = -2P^*$, on a $P^* = D_1^* + D_2^*$. C'est une valeur que P^* admet seulement lorsque $D_1^* + 4D_2^* \leq 0$. On le vérifie facilement en calculant P^* directement d'après sa définition. Mais si $D_1^* + 4D_2^* \leq 0$, on a $D_1^*/D_2^* \leq -4$ et par suite, en vertu de (2.8), (2.9), il vient $E_1^*/E_2^* \leq -4T$. D'autre part $E_1^*/E_2^* = -4 \cos \nu$, $E_2^* > 0$, $E_1^* < 0$ entraînent $0 < -4E_1^*/E_2^* \leq 1$, d'où l'on tire, en utilisant l'inégalité précédente,

$$-4 \leq E_1^*/E_2^* \leq -4T$$

donc

$$(2.31) \quad T \leq \cos \nu \leq 1.$$

Supposons, comme dans le cas de l'équation (A), que l'ensemble sur lequel on intègre les deux membres de l'équation (B) est simplement connexe, qu'il ne contient pas zéro, mais est contenu dans le cercle $|z| < 1$ et que les branches des racines sont choisies comme précédemment. On trouve alors après extraction de la racine carrée

$$Tw' \frac{(w-1)\sqrt{(w-w_2)(w-w_3)}}{w^2} = \varepsilon \frac{(z-e^{i\nu})(z-e^{-i\nu})}{z^2}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

on vérifie aisément que $\varepsilon = -1$.

Après avoir intégré, on a

$$(2.32) \quad \begin{aligned} T \left\{ \sqrt{(w-w_2)(w-w_3)} + \sqrt{(w-w_2)(w-w_3)} w^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (w_2 + w_3 + 2) \log \frac{w - \frac{1}{2}(w_2 + w_3) - \sqrt{(w-w_2)(w-w_3)}}{w^{-1} - \frac{1}{2}(w_2 + w_3) + \sqrt{(w-w_2)(w-w_3)} w^{-1}} \right\} \\ = -z + 2 \cos \nu \log z + z^{-1} + C \end{aligned}$$

où C est la constante d'intégration. Si l'on développe, au voisinage du point $z = 0$, les deux membres de la dernière équation, on a

$$(2.33) \quad T\{1 + T^{-1}z^{-1} - \frac{1}{2}(w_2 + w_3) - T^{-1}A_2^* + \\ + \frac{1}{2}(w_2 + w_3 + 2)\log[-\frac{1}{2}(w_2 + w_3) - 1] - \\ - \frac{1}{2}(w_2 + w_3 + 2)\log(2T^{-1}z^{-1})\} + O_1(z) \\ = 2\cos\nu\log z + z^{-1} + O_2(z) + C,$$

où $O_1(z)$, $O_2(z)$ sont, comme auparavant, au moins du premier ordre et les logarithmes ont leurs valeurs principales.

Considérons plus particulièrement les valeurs de z situées sur un certain arc γ de la circonférence $|z| = 1$, que la fonction $w = f^*(z)$ transforme en un arc δ de la circonférence $|w| = 1$, (cf. [3]). Il est aisé de montrer, en se basant sur la formule (2.32), que pour les valeurs de z considérées on a $\operatorname{re}(C) = 0$. Des calculs appropriés effectués sur (2.33) et qui utilisent la définition des fonctions $O_i(z)$ ($i = 1, 2$), nous conduisent à la relation

$$(2.34) \quad A_2^* = 2T - 2\cos\nu + 2\cos\nu\log\cos\nu + \operatorname{im}(C).$$

On en déduit immédiatement que $C = 0$.

Finalement (2.30), (2.31) et (2.34) entraînent les relations:

$$(2.35) \quad \begin{aligned} A_2^* &= 2T - 2\cos\nu + 2\cos\nu\log\cos\nu, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^*\cos\nu - 4T\cos\nu + 2\cos^2\nu + T^2 + 1, \\ T &\leq \cos\nu \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi dans le cas considéré on a obtenu un point appartenant à l'ensemble K_1 . On voit aussi, en particulier, que si $\cos\nu = 1$ les équations (2.35) prennent la forme (2.29), obtenue précédemment.

Passons, à présent, à la solution de l'équation (C) et supposons que $D_1^* = TE_1^* < 0$. On trouve, d'après les relations (2.21'), (2.24') et la relation (1.16), dans laquelle on a posé $N = 3$,

$$(2.36) \quad A_3^* = A_2^{*2} + 2A_2^*\cos\nu - T^2 + 1.$$

Les formules (2.6), (2.7) et (2.21') impliquent dans ce cas

$$P^* = -\frac{D_1^{*2} + 8D_2^{*2}}{8D_2^*}.$$

C'est une valeur que P^* peut admettre uniquement si $-4 \leq D_1^*/D_2^* < 0$. Cela résulte directement du calcul de P^* d'après sa définition. Mais on a alors, en vertu de (2.8) et (2.9), $-4T \leq E_1^*/E_1^* < 0$. Il en découle, compte tenu de (2.24'),

$$(2.37) \quad 0 < \cos\nu \leq T.$$

En extrayant la racine de l'équation (C), on a

$$(2.38) \quad Tw' \frac{(w - e^{i\theta})(w - e^{-i\theta})}{w^2} = \varepsilon \frac{(z - e^{i\nu})(z - e^{-i\nu})}{z^2}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Mais on a nécessairement $\varepsilon = 1$, attendu que $f^*(0) = 0$.

L'intégration de l'équation (2.38) conduit, en faisant des hypothèses analogues à celles du cas précédent, à l'équation

$$(2.39) \quad T(w - 2 \cos \theta \log w - w^{-1}) = z - 2 \cos \nu \log z - z^{-1} + C.$$

En raisonnant comme dans le cas de l'équation (B), on établit que $C = 0$ et

$$(2.40) \quad A_2^* = 2 \cos \nu \log T.$$

Les équations (2.36), (2.40) et l'inégalité (2.37) donnent conjointement

$$(2.41) \quad \begin{aligned} A_2^* &= 2 \cos \nu \log T, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu - T^2 + 1, \\ 0 &< \cos \nu \leq T. \end{aligned}$$

Un raisonnement tout à fait analogue permet de résoudre les équations (A'), (B'), et (C) dans le cas où $D_1^* > 0$. Il est à remarquer que l'intégration de l'équation (A') conduit alors à l'équation

$$(2.42) \quad \begin{aligned} T &\left\{ \sqrt{(w - w_2)(w - w_3)} - \sqrt{(w - w_2)(w - w_3)} w^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (w_2 + w_3 - 2) \log \frac{w - \frac{1}{2}(w_2 + w_3) - \sqrt{(w - w_2)(w - w_3)}}{w^{-1} - \frac{1}{2}(w_2 + w_3) - \sqrt{(w - w_2)(w - w_3)} w^{-1}} \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{(z - z_2)(z - z_3)} - \sqrt{(z - z_2)(z - z_3)} z^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (z_2 + z_3 - 2) \log \frac{z - \frac{1}{2}(z_2 + z_3) - \sqrt{(z - z_2)(z - z_3)}}{z^{-1} - \frac{1}{2}(z_2 + z_3) - \sqrt{(z - z_2)(z - z_3)} z^{-1}} \right\} + C. \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient successivement

$$(2.43) \quad \begin{aligned} A_2^* &= 2(1 - T), \\ A_3^* &= 5T^2 - 8T + 3; \end{aligned}$$

$$(2.44) \quad \begin{aligned} A_2^* &= -2T - 2 \cos \nu + 2 \cos \nu \log(-\cos \nu), \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu + 4T \cos \nu + 2 \cos^2 \nu + T^2 + 1 \end{aligned}$$

où

$$-1 \leq \cos \nu \leq -T;$$

$$(2.45) \quad \begin{aligned} A_2^* &= 2 \cos \nu \log T, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu - T^2 + 1 \end{aligned}$$

où

$$-T \leq \cos \nu < 0.$$

On y voit bien que dans le cas où $\cos \nu = 1$ les équations (2.44) prennent la forme de (2.43). Les équations (2.44) déterminent des points appartenant à l'ensemble K'_1 .

Il ne reste plus qu'à étudier le cas (III) où $D_1^* = TE_1^* = 0$ et $D_2^* = T^2 E_2^* \neq 0$. Les fonctions $\mathfrak{B}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ prennent alors la forme

$$(2.46) \quad \mathfrak{B}(w) = D_2^*/w^2(w^4 + \hat{D}_0/D_2^*w^2 + 1),$$

$$(2.47) \quad \mathfrak{N}(z) = E_2^*/z^2(z^4 + \hat{E}_0/E_2^*z^2 + 1).$$

Etant donnée l'hypothèse, faite précédemment, relative à $D_2^* = T^2 E_2^*$, il suffit, dans ce cas aussi, d'étudier uniquement le cas où $D_2^* = T^2 E_2^* > 0$. Il résulte de la définition de P^* que $P^* = -D_2^*$. On en tire, vu (2.6) et (2.46)

$$(2.48) \quad \mathfrak{B}(w) = D_2^*/w^2(w^2 + 1)^2.$$

Si l'on tient compte des propriétés dont jouissent les fonctions $\mathfrak{B}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$, on établit aisément que dans le cas considéré la fonction $\mathfrak{N}(z)$ est nécessairement de la forme

$$(2.49) \quad \mathfrak{N}(z) = E_2^*/z^2(z^2 + 1)^2.$$

En égalant les coefficients de z^2 dans les formules (2.47) et (2.49) de $\mathfrak{N}(z)$, on trouve $\hat{E}_0/E_2^* = 2$. D'autre part il découle de la définition de E_1^* , E_2^* , D_2^* et de la formule (2.7) que

$$\hat{E}_0/E_2^* = 2(A_3^* - A_2^{*2} + T^2).$$

En définitive on est donc conduit à la relation

$$(2.50) \quad A_3^* = A_2^{*2} + 1 - T^2.$$

Ainsi en vertu de (2.48), (2.49) et (2.9), l'équation (2.3) devient

$$(2.51) \quad T^2 \frac{w'^2}{w^4} (w^2 + 1)^2 = \frac{1}{z^4} (z^2 + 1)^2.$$

L'extraction de la racine et l'intégration de cette équation donnent alors

$$(2.52) \quad T(w - w^{-1}) = z - z^{-1} + C.$$

En procédant comme dans le cas de l'équation (B), on prouve que la constante d'intégration $C = 0$. D'autre part il résulte du développement des deux membres de l'équation (2.52) au voisinage du point $z = 0$ que $A_2^* = 0$. Ceci implique, d'après (2.50), que finalement on a:

$$(2.53) \quad \begin{aligned} A_2^* &= 0, \\ A_3^* &= 1 - T^2. \end{aligned}$$

Il convient de remarquer que ces dernières relations sont entraînées autant par les équations (2.41) que par (2.45), pourvu que $\cos \nu = 0$ et ceci équivaut, d'après (2.24'), à l'hypothèse $D_1^* = TE_1^* = 0$. On voit donc que les points définis par les équations

$$(2.54) \quad \begin{aligned} A_2^* &= 2 \cos \nu \log T, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu - T^2 + 1 \end{aligned}$$

où

$$0 \leq \cos \nu \leq T$$

et

$$(2.55) \quad \begin{aligned} A_2^* &= 2 \cos \nu \log T, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu - T^2 + 1 \end{aligned}$$

où

$$-T \leq \cos \nu \leq 0$$

appartiennent respectivement aux ensembles K_2 et K'_2 .

Si dans les équations (2.24) et (2.55) on pose $-\cos \nu = \lambda$ et $A_2^* = x$, $A_3^* = y$, on a

$$(2.56) \quad \begin{aligned} x &= -2T + 2\lambda - 2\lambda \log \lambda, \\ y &= x^2 - 2\lambda x - 4T\lambda + 2\lambda^2 + T^2 + 1 \end{aligned}$$

où

$$T \leq \lambda \leq 1$$

et

$$(2.57) \quad \begin{aligned} x &= -2\lambda \log T, \\ y &= x^2 - 2\lambda x - T^2 + 1 \end{aligned}$$

où

$$0 \leq \lambda \leq T.$$

On trouvera ci-dessous, sur la fig. 1, l'image géométrique de ces équations. Les lignes continues sont les graphiques des équations (2.56)

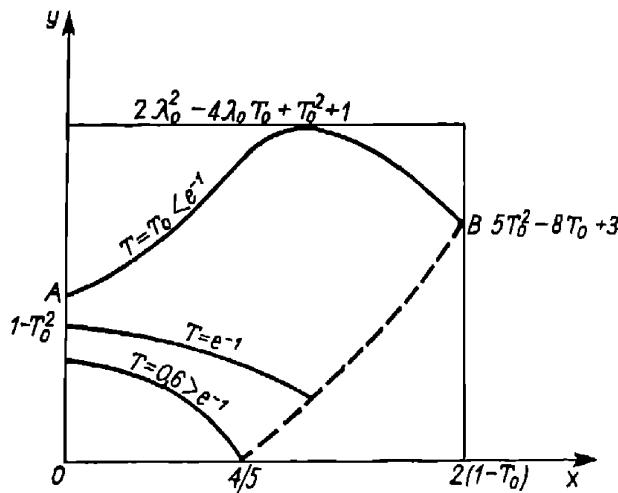


Fig. 1

et (2.57) pour trois valeurs différentes de T . La ligne pointillée représente la trace du point B lorsque T varie dans l'intervalle $\langle T_0, 1 \rangle$. Le point A parcourt alors le segment de droite AO .

On voit bien que y atteint sa valeur maximale pour $\lambda = \lambda_0$, où λ_0 désigne la racine plus grande de l'équation $\lambda \log \lambda + T_0 = 0$. On remarque aussi que le fragment donné du domaine $B_{\lambda M}$ contient une partie des limitations générales

$$|A_2^*| \leq 2(1-T),$$

$$|A_3^*| \leq \begin{cases} 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda T + T^2 & \text{pour } T \leq e^{-1}, \\ 1 - T^2 & \text{pour } T \geq e^{-1}, \end{cases}$$

où λ est la racine plus grande de l'équation $\lambda \log \lambda = -T$ et $T = M^{-1}$ (cf. [4], p. 145).

Ainsi la première partie de la démonstration du théorème est terminée.

Passant à la seconde, il nous faudra prouver que:

1° Pour chaque $0 < T < 1$ et toute valeur de $T < \cos \nu \leq 1$ il existe une fonction univalente, bornée et à coefficients réels

$$(2.58) \quad \begin{aligned} w = f^*(z) &= a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \dots \\ &= a_1^* (z + A_2^* z^2 + A_3^* z^3 + \dots), \quad a_1^* > 0 \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} a_1^* &= T, \\ A_2^* &= 2T - 2\cos \nu + 2\cos \nu \log \cos \nu, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu - 4T \cos \nu + 2\cos^2 \nu + T^2 + 1. \end{aligned}$$

Cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle de la forme

$$(2.59) \quad \begin{aligned} (r+1)^{-1} [G(w)(w^{1/2} + w^{-1/2}) - (w - w^{-1}) + r - 1] \times \\ \times \exp G(w) T (w^{1/2} + w^{-1/2}) (2\cos \nu)^{-1} - z \exp (z^{-1} - z) (2\cos \nu)^{-1} = 0 \end{aligned}$$

où

$$G(w) = (w - 2r + w^{-1})^{1/2}, \quad r = 2T^{-1} \cos \nu - 1.$$

2° Pour tout $0 < T < 1$ et chaque valeur de $0 < \cos \nu \leq T$ il existe une fonction univalente bornée à coefficients réels

$$(2.60) \quad \begin{aligned} w = f^*(z) &= a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \dots \\ &= a_1^* (z + A_2^* z^2 + A_3^* z^3 + \dots), \quad a_1^* > 0 \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} a_1^* &= T, \\ A_2^* &= 2\cos \nu \log T, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu - T^2 + 1. \end{aligned}$$

Cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle de la forme

$$(2.61) \quad w \exp[T(w^{-1} - w)(2 \cos \nu)^{-1}] - z \exp[(z^{-1} - z)(2 \cos \nu)^{-1}] = 0.$$

3° Pour tout $0 < T < 1$ et chaque valeur de $-1 \leq \cos \nu < T$ il existe une fonction univalente bornée à coefficients réels de la forme

$$(2.62) \quad \begin{aligned} w = f^*(z) &= a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \dots \\ &= a_1^* (z + A_2^* z^2 + A_3^* z^3 + \dots), \quad a_1^* > 0 \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} a_1^* &= T, \\ A_2^* &= -2T - 2 \cos \nu + 2 \cos \nu \log(-\cos \nu), \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu + 4T \cos \nu + 2 \cos^2 \nu + T^2 + 1. \end{aligned}$$

Cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(2.63) \quad (r+1)^{-1} [G(w)(w^{1/2} - w^{-1/2}) - (w + w^{-1}) + r + 1] \times \\ \times \exp[G(w)T(w^{-1/2} - w^{1/2})(2 \cos \nu)^{-1}] - z \exp[(z^{-1} - z)(2 \cos \nu)^{-1}] = 0$$

où

$$G(w) = (w - 2r + w^{-1})^{1/2}, \quad r = -2T^{-1} \cos \nu - 1.$$

4° Pour tout $0 < T < 1$ et chaque valeur de $-T \leq \cos \nu < 0$ il existe une fonction univalente bornée à coefficients réels

$$(2.64) \quad \begin{aligned} w = f^*(z) &= a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \dots \\ &= a_1^* (z + A_2^* z^2 + A_3^* z^3 + \dots), \quad a_1^* > 0 \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} a_1^* &= T, \\ A_2^* &= 2 \cos \nu \log T, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2A_2^* \cos \nu - T^2 + 1. \end{aligned}$$

Cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle de la forme

$$(2.65) \quad w \exp[T(w^{-1} - w)(2 \cos \nu)^{-1}] - z \exp[(z^{-1} - z)(2 \cos \nu)^{-1}] = 0.$$

5° Pour tout $0 < T < 1$ et pour $\cos \nu = 0$ il existe une fonction univalente bornée à coefficients réels

$$(2.66) \quad \begin{aligned} w = f^*(z) &= a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \dots \\ &= a_1^* (z + A_2^* z^2 + A_3^* z^3 + \dots), \quad a_1^* > 0 \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} a_1^* &= T, \\ A_2^* &= 0, \\ A_3^* &= 1 - T^2, \end{aligned}$$

Cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle

$$(2.67) \quad w - w^{-1} = T^{-1}(z - z^{-1}).$$

Ad 1°. Remarque. L'intervalle $\langle T, 1 \rangle$ a été remplacé par $(T, 1)$ ce qui ne restreint pas la généralité des raisonnements dans la suite de la démonstration.

Prenons une valeur arbitraire de $T < \cos \nu \leq 1$ et considérons la structure Γ_w définie par la condition

$$(2.68) \quad \operatorname{re} \left\{ P(w) + P(w)w^{-1} + (r+1) \log \frac{w - r - P(w)}{w^{-1} - r + P(w)w^{-1}} \right\} = \text{const},$$

où

$$P(w) = (w^2 - 2rw + 1)^{1/2}, \quad r = 2T^{-1} \cos \nu - 1$$

et où l'expression entre accolades est le premier membre de l'équation (2.32) avec $w_2 + w_3 = 2r$.

La partie de la structure Γ_w contenue dans le cercle $|w| < 1$ se compose d'un segment de droite C de l'axe réel joignant le point $w = 1$ au point $w = r - \sqrt{r^2 - 1}$ ($0 < w_2 < 1$) et de deux arcs C_1 et C_2 . Les arcs C_1, C_2 sont situés symétriquement par rapport à l'axe réel, ils sont issues du point w_2 et vont vers le point $w = 0$.

Soient C'_1, C'_2 respectivement les parties des arcs C_1, C_2 symétriques par rapport à l'axe réel et issues du point w_2 .

Désignons ensuite par

$$(2.69) \quad w = w(z) = a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \dots, \quad a_1^* > 0$$

une fonction univalente et bornée qui transforme le cercle $|z| < 1$ en l'ensemble $E = K(0, 1) - (C + C'_1 + C'_2)$, où $K(0, 1)$ est le cercle $|w| < 1$. L'ensemble E est symétrique par rapport à l'axe réel, par conséquent les coefficients de la fonction (2.69) sont réels. Admettons encore que les arcs C'_1 et C'_2 aient été choisis de sorte que $a_1^* = T$. Afin de montrer qu'un tel choix des arcs C'_1, C'_2 est possible, considérons la fonction

$$w(z) = \mu^{-1}[a_1 \mu(z)] = a_1 z + \dots, \quad |z| < 1,$$

où

$$\mu(z) \equiv z(1+z)^{-2}$$

et a_1 est choisi de manière que la fonction $w(z)$ transforme le cercle $|z| < 1$ en l'ensemble $E' = K(0, 1) - C$. On trouve, en faisant un calcul facile, que $a_1 = 4w_2(1+w_2)^{-2}$, d'où l'on tire $a_1 = T \cos^{-1} \nu$, attendu que $w_2 = r - \sqrt{r^2 - 1}$. Comme $a_1 > T$ (car $\cos \nu < 1$), on peut borner l'ensemble E' de sorte que le premier coefficient a_1^* de la fonction (2.69) soit égal à T . Cela prouve en même temps qu'il est possible de faire le choix des arcs C'_1 et C'_2 comme on l'avait postulé.

Considérons maintenant l'expression

$$(2.70) \quad P(w) + P(w)w^{-1} + (r+1)\log\{[w-r-P(w)]/[w^{-1}-r+P(w)w^{-1}]\} - \\ - T^{-1}[-z + 2\cos\nu\log z + z^{-1}].$$

Il résulte de la définition de la fonction $w(z)$ et de celles des arcs C'_1, C'_2 , que l'expression (2.70) admet sur la circonférence $|z|=1$ uniquement des valeurs imaginaires, tandis qu'à l'intérieur du cercle elle est une fonction holomorphe et bornée; elle doit donc se réduire à une constante. On établit facilement que cette constante est égale à zéro. Par des calculs très simples on obtient alors les relations

$$A_2^* = 2T - 2\cos\nu + 2\cos\nu\log\cos\nu, \\ A_3^* = A_2^{*2} + 2A_2^*\cos\nu - 4T\cos\nu + 2\cos^2\nu + T^2 + 1.$$

On voit aussi bien que la fonction (2.69) satisfait à l'équation (2.59) équivalente à (2.32).

Ad 2°. Afin d'établir la proposition, prenons une valeur arbitraire de $0 < \cos\nu \leq T$ et une structure Γ_w , définie par une fonction de la forme

$$(2.71) \quad \operatorname{re}\{w - 2T^{-1}\cos\nu\log w - w^{-1}\} = \text{const},$$

où l'expression entre accolades est le second membre de l'équation (2.39) avec $\cos\theta = T^{-1}\cos\nu$.

La partie de la structure Γ_w comprise dans le cercle $|w| < 1$ se compose de deux arcs C_1 et C_2 symétriques par rapport à l'axe réel. Ces arcs sont issus respectivement des points

$$w_1 = T^{-1}\cos\nu - iT^{-1}\sqrt{T^2 - \cos^2\nu}, \quad w_2 = T^{-1}\cos\nu + iT^{-1}\sqrt{T^2 - \cos^2\nu}$$

et vont vers le point $w = 0$. Ils se coupent uniquement au point $w = 0$, éventuellement au point $w = 1$ lorsque $\cos\nu = T$. Désignons par C'_1, C'_2 deux arcs qui sont respectivement des portions des arcs C_1, C_2 . Supposons-les symétriques par rapport à l'axe réel et issus respectivement des points w_1 et w_2 (respectivement du point $w = 1$).

Considérons la fonction univalente bornée

$$(2.72) \quad w = w(z) = a_1^*z + a_2^*z^2 + a_3^*z^3 + \dots, \quad a_1^* > 0$$

qui transforme le cercle $|z| < 1$ en l'ensemble $E = K(0, 1) - (C'_1 + C'_2)$. On constate, de même qu'auparavant, que cette fonction a des coefficients réels. On suppose en outre que les arcs C'_1 et C'_2 ont été choisis de sorte que $a_1^* = T$.

Etudions l'expression

$$(2.73) \quad w(z) - 2T^{-1} \log w(z) - [w(z)]^{-1} - T^{-1}(z - 2 \cos \nu \log z - z^{-1}).$$

On montre, pareillement au cas précédent, que cette expression est égale à zéro. Par un calcul facile on trouve

$$\begin{aligned} A_2^* &= 2 \cos \nu \log T, \\ A_3^* &= A_2^{*2} + 2 A_2^* \cos \nu - T^2 + 1. \end{aligned}$$

On voit bien que la fonction (2.72) satisfait à l'équation (2.61) qui est équivalente à l'équation (2.39).

Ad 3°. La démonstration est analogue à celle de 1°.

Ad 4°. La démonstration est analogue à celle de 2°.

Ad 5°. On pourrait reprendre ici les raisonnements pareils à ceux de 1° ou de 2°. Il sera toutefois plus facile de déterminer directement la fonction cherchée. En effet, on vérifie aisément que la fonction cherchée satisfaisant aux conditions $a_1^* = T$, $A_2^* = 0$, $A_3^* = 1 - T^2$, est de la forme $w(z) = \mu^{-1}[T\mu(z)]$, où $\mu(z) = z/1 - z^2$.

Cela termine la seconde partie de la démonstration, et par cela même la démonstration du théorème.

Pour terminer nous nous proposons encore d'établir les équations de la frontière $B_{3\infty}$. On les obtient à partir des équations (2.1), (2.2), (2.1') et (2.2') en passant à la limite, lorsque $T \rightarrow 0$ (cf. [5]).

En fait, dans ce cas limite on tire de (2.1)

$$(2.74) \quad \begin{aligned} A_2^{**} &= \lim_{T \rightarrow 0} A_2^* = -2 \cos \nu + 2 \cos \nu \log \cos \nu, \\ A_3^{**} &= \lim_{T \rightarrow 0} A_3^* = A_2^{**2} + 2 A_2^{**} \cos \nu + 2 \cos^2 \nu + 1 \end{aligned}$$

où

$$0 < \cos \nu \leq 1.$$

De même il découle de (2.2), attendu que $\cos \nu = T \cos \theta$ (cette dernière égalité résulte des formules (2.21'), (2.24'), (2.8), (2.9)):

$$(2.75) \quad \begin{aligned} A_2^{**} &= \lim_{T \rightarrow 0} A_2^* = 0, \\ A_3^{**} &= \lim_{T \rightarrow 0} A_3^* = 1. \end{aligned}$$

Finalement on déduit de (2.1') et (2.2') les relations analogues

$$(2.74') \quad \begin{aligned} A_2^{**} &= \lim_{T \rightarrow 0} A_2^* = -2 \cos \nu + 2 \cos \nu \log(-\cos \nu), \\ A_3^{**} &= \lim_{T \rightarrow 0} A_3^* = A_2^{**2} + 2 A_2^{**} \cos \nu + 2 \cos^2 \nu + 1 \end{aligned}$$

où

$$(2.75') \quad \begin{aligned} -1 &\leq \cos \nu < 0, \\ A_2^{**} &= \lim_{T \rightarrow 0} A_2^* = 0, \\ A_3^{**} &= \lim_{T \rightarrow 0} A_3^* = 1. \end{aligned}$$

Comme auparavant, nous donnerons uniquement l'image géométrique des derniers résultats. Posons à cet effet, de même qu'auparavant $-\cos \nu = \lambda$, $A_2^{**} = x$, $A_3^{**} = y$. Les relations (2.74') et (2.75') pourront alors s'écrire respectivement:

$$(2.74'') \quad \begin{aligned} x &= 2\lambda - 2\lambda \log \lambda, \\ y &= x^2 - 2x\lambda + 2\lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

où

$$0 < \lambda \leq 1$$

et

$$(2.75'') \quad x = 0, \quad y = 1$$

pour

$$\lambda = 0.$$

La courbe de la figure 2 est l'image géométrique de ces relations.

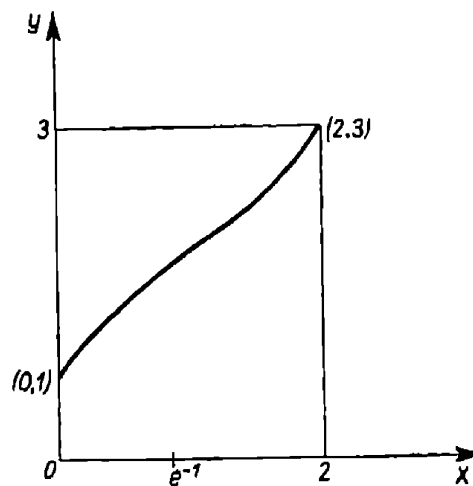


Fig. 2

Travaux cités

- [1] Z. Charzyński et W. Janowski, *Domaine de variation des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes et bornées*, Bull. Soc. Sc. Lett. Łódź, classe III, 10, 4, (1959).
- [2] J. Diendonné, *Sur les fonctions univalentes*, Comptes Rendus (Paris), 102 (1931), pp. 1148-1150.

[3] J. Dziubiński, *L'équation des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées et symétriques*, Societas Scientiarum Lodziensis, sectio III, nr. 65 (1960).

[4] W. Janowski, *Le maximum des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes bornées*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, II, 2 (1955), p. 145-160.

[5] E. Peschl, *Zur Theorie der schlichten Funktionen*, J. reine angew. Math. 176 (1936), p. 61-94.

[6] A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, *Coefficient regions for schlicht functions*, Amer. Soc. Coll. Publ. 35 (1950).

Reçu par la Rédaction le 23. 2. 1966
