ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVII (1980)

О монотонных и колеблющихся решениях обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

Т. А. Чантурия (Тбилиси)

Резюме. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$(1)\qquad (D^n u)(t) = f(t, u(t)),$$

где $n \geqslant 3$, $D^0 u = u$, $D^i u = \frac{1}{p_i}(D^{i-1}u)'$ $(i = 1, \ldots, n)$,

$$p_i \in C(\boldsymbol{R}_+, (0, +\infty)) \quad (i = 1, \ldots, n), \quad f \in C(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}).$$

Устанавливаются достаточные условия для того, чтобы каждое (определённое в некотором бесконечном промежутке из $\boldsymbol{R}_+$) решение уравнения (1) было либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию

$$(2)\qquad |(D^i u)(t)| \downarrow 0 \quad \text{при} \quad t \uparrow +\infty \ (i = 0, \ldots, n-1),$$

либо — условию

$$(3)\qquad |(D^i u)(t)| \uparrow +\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow +\infty \ (i = 0, \ldots, n-1).$$

Отдельно изучается вопрос о существовании как колеблющихся решений, так и решений видов (2) и (3).

1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{p_{n-1}(t)}\left(\ldots\left(\frac{1}{p_2(t)}\left(\frac{u'(t)}{p_1(t)}\right)'\right)'\ldots\right)'\right)' = f\big((t, u(t)\big),$$

где $n \geqslant 3$, $p_i \in C\big(\boldsymbol{R}_+, (0, +\infty)\big)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $f \in C(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R} = (-\infty, +\infty)$, $\boldsymbol{R}_+ = [0, +\infty)$ и

$$(2)\qquad \int_0^{+\infty} p_i(t)\,dt = +\infty \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Отметим, что к такому виду приводится, например, уравнение

$$u^{(n)} + a_1(t)u^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)u = f(t, u)$$

если соответствующее однородное уравнение

$$v^{(n)} + a_1(t)v^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)v = 0$$

является неосцилляционным (т.е. если каждое решение этого уравнения имеет не более $n-1$ нуля) в промежутке $\boldsymbol{R}_+$ [3], [11].

Считая функции p_i фиксированными, положим

$$(3)\qquad D^0u = u, \quad D^iu = \frac{(D^{i-1}u)'}{p_i} \quad (i = 1, \ldots, n;\ p_n = 1).$$

Тогда уравнение (1) запишется в следующем виде

$$(D^nu)(t) = f\big(t, u(t)\big).$$

Пусть E и F промежутки из $\boldsymbol{R}$. Через $C^{[n]}(E, F)$ мы будем обозначать линейное пространство функций $u\colon E\to F$ непрерывных вместе с D^iu $(i = 1, \ldots, n)$.

Функция $u \in C^{[n]}\big([t_0, +\infty), \boldsymbol{R}\big)$ $(t_0 \in \boldsymbol{R}_+)$ называется правильным решением уравнения (1), если она при любом $t \in (t_0, +\infty)$ удовлетворяет этому уравнению и при любом $\tau \in (t_0, +\infty)$

$$\sup\{|u(t)|\colon t \in [\tau, +\infty)\} > 0.$$

Правильное решение уравнения (1) называется колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$, а в противном случае — неколеблющимся.

Скажем, что уравнение (1) обладает свойством A, если каждое правильное решение этого уравнения при чётном n является колеблющимся, а при нечётном n либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию

$$(4)\qquad |(D^iu)(t)|\downarrow 0 \quad \text{при } t\uparrow +\infty \ (i = 0, \ldots, n-1).$$

Скажем, что уравнение (1) обладает свойством B, если каждое правильное решение этого уравнения при чётном n является либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию (4), либо — условию

$$(5)\qquad |(D^iu)(t)|\uparrow +\infty \quad \text{при } t\uparrow +\infty \ (i = 0, \ldots, n-1),$$

а при нечётном n — либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию (5).

Достаточные условия того, чтобы уравнение (1) обладало свойством A впервые были изучены еще Кнезером [9]. После этого исследованию свойства A или B было посвящено много работ, из которых следует указать [1], [2], [6]–[9], [13], [14]. По видимому, наиболее общие результаты в этом направлении, для уравнений вида

$$u^{(n)} = f(t, u, \ldots, u^{(n-1)}),$$

содержится в [7] (см. также [8]) ([1]).

([1]) Отметим также, что в работах [5], [9], [12], [16]–[18] устанавливаются условия иного характера; а именно доказывается, что уравнение обладает свойством A или B, если аналогичным свойством обладает некоторое другое уравнение.

В настоящей статье некоторые результаты из [7] обобщаются для уравнений вида (1).

2. Ниже кроме (3) мы будем пользоватся также следующими обозначениями.

Пусть $j_k \in \{1, \ldots, n-1\}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ и $t, s \in \boldsymbol{R}_+$, тогда

$$I^0 = 1, \qquad I^k(t, s;\ j_1, \ldots, j_k) = \int_s^t p_{j_1}(\tau) I^{k-1}(\tau, s;\ j_2, \ldots, j_k)\,d\tau$$
$$(k = 1, \ldots, n-1),$$

$$q_1(t) = I^{n-1}(t, 0;\ n-1, \ldots, 1), \qquad q_{n-1}(t) = I^{n-1}(t, 0;\ 1, \ldots, n-1)$$

и если $n \geqslant 4$, то

$$q_k(t) = I^{n-1}(t, 0;\ n-1, \ldots, k+1, 1, \ldots, k) +$$
$$+ I^{n-1}(t, 0;\ 1, \ldots, k-1, n-1, \ldots, k) \qquad (k = 2, \ldots, n-2).$$

В работе [18] без доказательства были приведены следующие равенства

$$(6_{ik}) \qquad I^k(t, s;\ j_1, \ldots, j_k) =$$
$$= \int_s^t I^{i-1}(t, \tau;\ j_1, \ldots, j_{i-1}) p_{j_i}(\tau) I^{k-i}(\tau, s;\ j_{i+1}, \ldots, j_k)\,d\tau$$
$$(i = 1, \ldots, k;\ k = 1, \ldots, n-1),$$

$$(7_k) \qquad I^k(t, s;\ j_1, \ldots, j_k) = (-1)^k I^k(s, t;\ j_k, \ldots, j_1) \qquad (k = 1, \ldots, n-1),$$

$$(8_{ik}) \qquad (D^i u)(t) = \sum_{j=i}^{k} (-1)^{j-i} (D^j u)(s) I^{j-i}(s, t;\ j, \ldots, i+1) +$$
$$+ (-1)^{k+1-i} \int_t^s I^{k-i}(\tau, t;\ k, \ldots, i+1) p_{k+1}(\tau) (D^{k+1} u)(\tau)\,d\tau$$
$$(i = 0, \ldots, k;\ k = 0, \ldots, n-1).$$

Для $k = 1$ справедливость равенства (6) очевидна. Докажем, что из (6_{i-1k}) следует (6_{ik+1}). Действительно,

$$I^{k+1}(t, s;\ j_1, \ldots, j_{k+1}) = \int_s^t p_{j_1}(\tau) I^k(\tau, s;\ j_2, \ldots, j_{k+1})\,d\tau =$$
$$= \int_s^t p_{j_1}(\tau) \Big(\int_s^\tau I^{i-2}(\tau, z;\ j_2, \ldots, j_{i-1}) p_{j_i}(z) I^{k-i+1}(z, s;\ j_{i+1}, \ldots, j_{k+1})\,dz \Big) d\tau =$$
$$= \int_s^t \Big(\int_z^t p_{j_1}(\tau) I^{i-2}(\tau, z;\ j_2, \ldots, j_{i-1})\,d\tau \Big) p_{j_i}(z) I^{k-i+1}(z, s;\ j_{i+1}, \ldots, j_{k+1})\,dz =$$
$$= \int_s^t I^{i-1}(t, z;\ j_1, \ldots, j_{i-1}) p_{j_i}(z) I^{k-i+1}(z, s;\ j_{i+1}, \ldots, j_{k+1})\,dz.$$

Таким образом (6) доказано.

Равенство (7) доказывается аналогично. Для $k = 1$ оно очевидно. Допуская его справедливость для k, согласно (6_{kk}) будем иметь

$$I^{k+1}(t, s;\ j_1, \ldots, j_{k+1}) = \int_s^t p_{j_1}(\tau) I^k(\tau, s;\ j_2, \ldots, j_{k+1})\,d\tau =$$

$$= (-1)^k \int_s^t p_{j_1}(\tau) I^k(s, \tau;\ j_{k+1}, \ldots, j_2)\,d\tau = (-1)^{k+1} I^{k+1}(s, t;\ j_{k+1}, \ldots, j_1).$$

Перейдём к доказательству равенства (8). Пусть k фиксированно. При $i = k$ равенство (8_{ik}) следует из (3). Допустим, что имеет место (8_{ik}). Тогда

$$(D^{i-1}u)(t) =$$

$$= (D^{i-1}u)(s) - \int_t^s p_i(\tau)(D^i u)(\tau)\,d\tau =$$

$$= (D^{i-1}u)(s) + \sum_{j=i}^{k} (-1)^{j-i+1} (D^j u)(s) \int_t^s p_i(\tau) I^{j-i}(s, \tau;\ j, \ldots, i+1)\,d\tau +$$

$$+ (-1)^{k-i} \int_t^s p_i(\tau) \int_\tau^s I^{k-i}(z, \tau;\ k, \ldots, i+1) p_{k+1}(z)(D^{k+1}u)(z)\,dz\,d\tau.$$

Если изменим в последнем слагаемом порядок интегрирования и применим (6), то получим (8_{i-1k}), что и доказывает справедливость равенства (8).

Отметим, что в силу (7) равенство (8) можно записать и в таком виде —

$$(9_{ik}) \qquad (D^i n)(t) = \sum_{j=i}^{k} (D^j u)(s) I^{j-i}(t, s;\ i+1, \ldots, j) +$$
$$+ \int_s^t I^{k-i}(t, \tau;\ i+1, \ldots, k) p_{k+1}(\tau)(D^{k+1}u)(\tau)\,d\tau$$
$$(i = 0, \ldots, k;\ k = 0, \ldots, n-1).$$

Кроме того ниже мы будем применять и следующие формулы. Если $k \in \{1, \ldots, n-2\}$, то

$$(10_k) \qquad \int_s^t I^{n-1}(\tau, s;\ n-1, \ldots, k+1, 1, \ldots, k)(D^n u)(\tau)\,d\tau =$$
$$= (-1)^{n-k+1} I^k(t, s;\ 1, \ldots, k)(D^k u)(t) +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{n-1} (-1)^{n-j+1} I^j(t, s;\ j, \ldots, k+1, 1, \ldots, k)(D^j u)(t) +$$
$$+ (-1)^{n-k} \int_s^t p_1(\tau) I^{k-1}(\tau, s;\ 2, \ldots, k)(D^k u)(\tau)\,d\tau.$$

Справедливость этих формул легко проверяется интегрированием по частям.

Теперь докажем некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть* $u \in C^{[n]}([t_0, +\infty), \boldsymbol{R})$,

$$u(t) \neq 0 \quad \textit{и} \quad (D^n u)(t)u(t) \leqslant 0 \ (\geqslant 0) \quad \textit{при} \ \ t \in [t_0, +\infty).$$

Тогда существуют числа $t_1 \in [t_0, +\infty)$, $l \in \{0, \ldots, n\}$, $c \in [1, +\infty)$ *такие, что* $l+n$ *нечётно* (*чётно*),

$$(11) \qquad (D^i u)(t)u(t) \geqslant 0 \quad \textit{при} \ t \in [t_1, +\infty) \ (i = 0, \ldots, l),$$
$$(-1)^{i+l}(D^i u)(t)u(t) \geqslant 0 \quad \textit{при} \ t \in [t_1, +\infty) \ (i = l, \ldots, n)$$

и

$$(12) \qquad |u(t)| \leqslant cq_{n-1}(t) \quad \textit{при} \ t \in [t_1, +\infty) \quad \textit{если} \ l \neq n,$$

$$(13) \qquad \int_{t_0}^{+\infty} q_1(t)\,|(D^n u)(t)|\,dt < +\infty \quad \textit{если} \ l = 0,$$

а если $l \in \{1, \ldots, n-1\}$, *то при* $t \in [t_1, +\infty)$

$$(14) \qquad \int_{t_1}^{t} q_l(\tau)\,|(D^n u)(\tau)|\,d\tau + |(D^{n-1}u)(t)|\,q_l(t) \leqslant c\big(|u(t)| - |u(t_1)|\big).$$

Доказательство. Первая часть леммы доказывается аналогично доказательству соответствующих частей лемм 2 и 3 из [6] (см. также [7], [8] и [10]).

Допустим $l \neq n$. Тогда

$$|(D^l u)(t)| \leqslant |(D^l u)(t_1)| \quad \text{при } t \in [t_1, +\infty).$$

Поэтому согласно (6_{ll}) и (9_{0l-1}) получаем, что

$$|u(t)| \leqslant |(D^l u)(t_1)|\,I^l(t, t_1;\ 1, \ldots, l) \quad \text{при } t \in [t_1, +\infty).$$

Отсюда легко следует (12).

Если $l = 0$, то из (10_1) в силу (11) следует справедливость условия (13).

Докажем (14). Допустим, что $l \in \{2, \ldots, n-1\}$. Согласно (8_{l-1n-1}) (при $s = \tau$, $t = t_1$) и (11) имеем

$$|(D^{l-1}u)(\tau)| \geqslant |(D^{n-1}u)(\tau)|\,I^{n-l}(\tau, t_1;\ n-1, \ldots, l) \quad \text{при } \tau \in [t_1, +\infty).$$

Тогда в силу (9_{0l-2}) и (11) будем иметь

$$|u(t)| - |u(t_1)| \geqslant \int_{t_1}^{t} I^{l-2}(t, \tau;\ 1, \ldots, l-2)\,p_{l-1}(\tau)\,|(D^{l-1}u)(\tau)|\,d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \int_{t_1}^{t} I^{l-2}(t, \tau;\ 1, \ldots, l-2)\,p_{l-1}(\tau)\,I^{n-l}(\tau, t_1;\ n-1, \ldots, l)\,|(D^{n-1}u)(\tau)|\,d\tau.$$

Интегрируя по частям и применяя (6_{l-1n-1}), получим

$$(15)\qquad |u(t)|-|u(t_1)|\geqslant I^{n-1}(t,t_1;\,1,\ldots,l-1,n-1,\ldots,l)\,|(D^{n-1}u)(t)|+$$
$$+\int_{t_1}^{t} I^{n-1}(\tau,t_1;\,1,\ldots,l-1,\,n-1,\ldots,l)\,|(D^{n}u)(\tau)|\,d\tau \quad \text{при} \quad t\in[t_1,+\infty).$$

Если $l\in\{1,\ldots,n-2\}$, то в силу (11) из равенства (10_l) следует, что

$$\int_{t_1}^{t} I^{n-1}(\tau,t_1;\,n-1,\ldots,l+1,1,\ldots,l)\,|(D^{n}u)(\tau)|\,d\tau+$$
$$+I^{n-1}(t,t_1;\,n-1,\ldots,l+1,1,\ldots,l)\,|(D^{n-1}u)(t)|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{t_1}^{t} p_1(\tau)I^{l-1}(\tau,t_1;\,2,\ldots,l)\,|(D^{l}u)(\tau)|\,d\tau \quad \text{при} \quad t\in[t_1,+\infty).$$

С другой стороны, так как $|D^l u|$ не возростает, то применяя (6_{l-1l-1}) и (11), из (9_{1l-1}) получим, что

$$I^{l-1}(t,t_1;\,2,\ldots,l)\,|(D^{l}u)(t)|\leqslant|(D^{1}u)(t)|=\frac{|u'(t)|}{p_1(t)} \quad \text{при} \quad t\in[t_1,+\infty).$$

Согласно двум последним неравенствам имеем

$$(16)\qquad |u(t)|-|u(t_1)|\geqslant I^{n-1}(t,t_1;\,n-1,\ldots,l+1,1,\ldots,l)\,|(D^{n-1}u)(t)|+$$
$$+\int_{t_1}^{t} I^{n-1}(\tau,t_1;\,n-1,\ldots,l+1,1,\ldots,l)\,|(D^{n}u)(\tau)|\,d\tau \quad \text{при} \quad t\in[t_1,+\infty).$$

Из (15) и (16), в силу определения функций q_l, непосредственно следует (14). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $r\in\boldsymbol{R}_+$, $v\in C([t_0,+\infty),\boldsymbol{R}_+)$, $g\in C([t_0,+\infty)\times\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_+)$, g *не убывает по второму аргументу и*

$$v(t)\geqslant r+\int_{t_0}^{t} g(\tau,v(\tau))\,d\tau \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,+\infty).$$

Тогда дифференциальное уравнение

$$x'=g(t,x)$$

имеет решение x, *удовлетворяющее условию*

$$r\leqslant x(t)\leqslant v(t) \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,+\infty).$$

Лемма 3. *Пусть* $v\in C([t_0,+\infty),\boldsymbol{R}_+)$, $g\in C([t_0,+\infty)\times\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_+)$, g *не убывает по второму аргументу и*

$$v(t)\geqslant\int_{t}^{+\infty} g(\tau,v(\tau))\,d\tau \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,+\infty).$$

Тогда, если решение x дифференциального уравнения

$$x' = -g(t, x)$$

в некоторой точке $t^* \in (t_0, +\infty)$ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant x(t^*) < \int_{t^*}^{+\infty} g\big(\tau, v(\tau)\big)d\tau,$$

то

$$x(t^*) \leqslant x(t) < v(t) \quad \text{при } t \in [t_0, t^*].$$

Эти легко доказуемые леммы являются частными случаями более общих теорем об интегральных неравенствах и приводятся здесь в удобном для нас виде.

Теорема 1. *Пусть существуют функции $\varphi \in C(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_+)$, $\omega \in C\big(\boldsymbol{R}_+, (0, +\infty)\big)$ такие, что φ не убывает по второму аргументу, ω не убывает,*

$$-f(t, u)\operatorname{sign} u \geqslant \varphi(t, |u|) \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+,\ u \in \boldsymbol{R} \tag{17}$$

и для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ такого, что $i+n$ нечётное число, одно из следующих уравнений

$$x' = \frac{aq_i(t)}{\omega\big(q_{n-1}(t)\big)}\varphi(t, x)\omega(x), \tag{18i}$$

$$x' = -a\varphi\big(t, q_i(t)x\big), \tag{19i}$$

при любом $a \in (0, +\infty)$ не имеет положительного правильного решения. Если, кроме того, при любом $c > 0$

$$\int_0^{+\infty} q_1(t)\varphi(t, c)dt = +\infty, \tag{20}$$

то уравнение (1) *обладает свойством A.*

Доказательство. Пусть u некоторое правильное неколеблющееся решение уравнения (1). Тогда в силу (17) и леммы 1 найдутся такие числа $t_1 \in (0, +\infty)$ и $l \in \{0, \ldots, n-1\}$, что $l+n$ нечётно и соблюдаются неравенства (11)–(14).

Допустим сперва, что $l \in \{1, \ldots, n-1\}$. Тогда из (12), (14) и (17) получаем

$$|u(t)| \geqslant |u(t_1)| + \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t} \frac{q_l(\tau)}{\omega\big(q_{n-1}(\tau)\big)}\varphi\left(\tau, \frac{|u(\tau)|}{c}\right)\omega\left(\frac{|u(\tau)|}{c}\right)d\tau$$
$$\text{при } t \in [t_1, +\infty).$$

Отсюда согласно лемме 2 следует, что уравнение (18_l) при $a = c^{-2}$ имеет решение x удовлетворяющее неравенствам

$$|u(t_1)| \leqslant cx(t) \leqslant |u(t)| \quad \text{при } t \in [t_1, +\infty).$$

Поэтому, в силу условий теоремы уравнение (19_l) при любом a не имеет положительного правильного решения и для любого решения x: $[t_1, +\infty) \to \boldsymbol{R}_+$ уравнения (19_l) $(a = c^{-1})$ будет существовать число $t^* \in (t_1, +\infty)$ такое, что

$$0 = x(t^*) < \int\limits_{t^*}^{+\infty} \varphi\left(\tau, \frac{1}{c}\, q_l(\tau)\,|(D^{n-1}u)(\tau)|\right) d\tau.$$

Кроме того, применяя (14) и (17) из уравнения (1) получим

$$|(D^{n-1}u)(t)| \geqslant \int\limits_{t}^{+\infty} \varphi\left(\tau, \frac{1}{c}\, q_l(\tau)\,|(D^{n-1}u)(\tau)|\right) d\tau \quad \text{при } t \in [t_1, +\infty).$$

Следовательно, согласно лемме 3 будем иметь

$$x(t) < \frac{1}{c}\,|(D^{n-1}u)(t)| \quad \text{при } t \in [t_1, t^*],$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что $l \notin \{1, \ldots$ $\ldots, n-1\}$.

Поэтому, если n чётное число, то теорема доказана.

Пусть n — нечётное число. Тогда $l = 0$ и из (11) следует, что

$$|(D^i u)(t)|' \leqslant 0 \quad \text{при } t \in [t_1, +\infty) \ (i = 0, \ldots, n-1),$$

т.е.

$$|(D^i u)(t)| \downarrow c_i \geqslant 0 \quad \text{при } t \uparrow +\infty \ (i = 0, \ldots, n-1).$$

В силу (2) легко получим, что $c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Если допустим, что $c_0 > 0$, тогда согласно (13) и (17) будем иметь

$$\int\limits_{0}^{+\infty} q_1(t)\varphi(t, c_0)\,dt < +\infty, \tag{21}$$

что противоречит условию (20). Следовательно $c_0 = 0$. Таким образом если $l = 0$, то решение u удовлетворяет условию (4). Теорема полностью доказана.

Замечание. Отметим, что если одно из уравнений (18_1) или (19_1) при некотором $a > 0$ не имеет правильного положительного решения, то при любом $c > 0$ соблюдается условие (20).

Действительно, допустим противное, что для некоторого $c_0 > 0$ имеет место (21). Пусть $r \in (0, c_0)$, а t_0 выбрано настолько большим, что

$$a\int\limits_{t_0}^{+\infty} q_1(t)\varphi(t, c_0)dt < c_0 - r \qquad \text{и} \qquad q_{n-1}(t_0) \geqslant c_0.$$

Тогда

$$c_0 \geqslant r + a\int\limits_{t_0}^{t} \frac{q_1(\tau)}{\omega\big(q_{n-1}(\tau)\big)}\varphi(\tau, c_0)\,\omega(c_0)d\tau \quad \text{при} \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Отсюда, в силу леммы 2, следует, что уравнение (18_1) имеет решение x удовлетворяющее условию

$$r \leqslant x(t) \leqslant c_0 \qquad \text{при } t \in [t_0, +\infty).$$

Следовательно, уравнение (19_1) не имеет положительного правильного решения.

Пусть теперь x решение уравнения (19_1) удовлетворяющее условию $q_1(t_0)x(t_0) = c_0$. Тогда существуют числа t_1 и t_2 такие, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2 <$ $< +\infty$ и

$$0 < q_1(t)x(t) < c_0 \qquad \text{при } t \in (t_1, t_2),$$

$$q_1(t_1)x(t_1) = c_0 \qquad \text{и} \qquad x(t_2) = 0.$$

Поэтому будем иметь

$$c_0 = q_1(t_1)x(t_1) = aq_1(t_1)\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi\big(\tau, q_1(\tau)x(\tau)\big)d\tau \leqslant a\int\limits_{t_1}^{+\infty} q_1(\tau)\varphi(\tau, c_0)d\tau < c_0.$$

Полученное противоречие доказывает, что для любого $c > 0$ соблюдается условие (20).

Теорема 2. *Пусть соблюдается неравенство*

$$-f(t, u)\operatorname{sign} u \geqslant a(t)\psi(|u|) \qquad \textit{при } t \in \boldsymbol{R}_+, \ u \in \boldsymbol{R},$$

где $a, \psi \in C(\boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_+)$, ψ не убывает, $\psi(u) > 0$ при $u > 0$ и для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ такого, что $i+n$ нечётное число, выполняется одно из следующих условий

1) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$ *и* $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} q_i(t)a(t)dt = +\infty$;

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$, $\psi(xy) \geqslant \psi(x)\psi(y)$ *при* $x, y \in \boldsymbol{R}_+$

и

$$\int_0^{+\infty} \psi\big(q_i(t)\big)a(t)\,dt = +\infty;$$

3) *существует неубывающая функция* $\omega \in C\big(\boldsymbol{R}_+, (0, +\infty)\big)$ *такая, что*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)\,\omega(x)} < +\infty \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{q_i(t)\,a(t)}{\omega\big(q_{n-1}(t)\big)}\,dt = +\infty.$$

Если, кроме того, в случае нечётного n

$$\int_0^{+\infty} q_1(t)a(t)\,dt = +\infty,$$

то уравнение (1) *обладает свойством* A.

Доказательство. В силу теоремы 1 и замечания к ней справедливость теоремы 2 следует из того, что при соблюдении условий 1) 2) или 3) уравнения

$$x' = aq_i(t)\,a(t)\,\psi(x), \qquad x' = -a\psi\big(q_i(t)\big)a(t)\,\psi(x)$$

и

$$x' = \frac{aq_i(t)\,a(t)}{\omega\big(q_{n-1}(t)\big)}\,\psi(x)\,\omega(x)$$

соответственно не имеют положительных правильных решений. В первом и третьем случае такой вид принимает уравнение (18_i), а во втором случае — (19_i).

Отметим, что из этой теоремы вытекает теорема 2 работы [14]. Кроме того, можно привести пример уравнения удовлетворяющего условию 1) или 2) теоремы 2, но не удовлетворяющего условиям теоремы 2 из [14]. Действительно, пусть $n = 4m$, $p_{2m}(t) = e^t$, $p_i(t) \equiv 1$ ($i = 1, \dots, n-1$; $i \neq 2m$). Тогда из теоремы 2 следует, что в случае 1) (в случае 2)) уравнение (1) обладает свойство A, если

$$\int_0^{+\infty} t^{2m-1}e^t a(t)\,dt = +\infty \qquad \Big(\int_0^{+\infty} \psi(t^{2m-1}e^t)\,a(t)\,dt = +\infty\Big).$$

В [14] вместо этого требуется, что

$$\int_0^{+\infty} te^t a(t)\,dt = +\infty \qquad \Big(\int_0^{+\infty} \psi(te^t)\,a(t)\,dt = +\infty\Big).$$

Теорема 3. *Пусть существуют функции* $\varphi \in C(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_+)$, $\omega \in C\big(\boldsymbol{R}_+, (0, +\infty)\big)$ *такие, что* φ *не убывает по второму аргументу,* ω

не убывает,

$$f(t, u)\operatorname{sign} u \geqslant \varphi(t, |u|) \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+,\ u \in \boldsymbol{R} \tag{22}$$

и для каждого $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ *такого, что* $i+n$ *чётное число, одно из уравнений* (18_i) *или* (19_i) *при любом* $a \in (0, +\infty)$ *не имеет положительного правильного решения. Если, кроме того, при любом* $c > 0$

$$\int_0^{+\infty} q_1(t)\varphi(t, c)\,dt = +\infty \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \varphi\big(t, cq_{n+1}(t)\big)\,dt = +\infty, \tag{23}$$

то уравнение (1) *обладает свойством* B.

Доказательство. Пусть u правильное неколеблющееся решение уравнения (1). Тогда в силу (22) и леммы 1 найдутся такие числа $t_1 \in (0, +\infty)$ и $l \in \{0, \ldots, n\}$, что $l+n$ чётно и соблюдаются неравенства (11)–(14). Точно также как и при доказательстве теоремы 1 покажем, что $l \notin \{1, \ldots, n-2\}$, а если n чётно и $l = 0$, то имеет место (4). Следовательно, для завершения доказательства теоремы остаётся показать, что если $l = n$, то соблюдаются и условия (5).

Итак, пусть $l = n$. Тогда, согласно (11), для некоторого $c > 0$ имеем

$$|u(t)| \geqslant cq_{n-1}(t) \quad \text{при } t \in [t_1, +\infty).$$

Поэтому в силу (22) получаем, что

$$|(D^n u)(t)| \geqslant \varphi\big(t, cq_{n-1}(t)\big) \quad \text{при } t \in [t_1, +\infty).$$

Отсюда и из (19) следует, что соблюдается условие (5) при $i = n-1$. Применяя (2) легко покажем справедливость условий (5) и для остальных i. Теорема доказана.

Замечание. Как было отмечено выше, если одно из уравнений (18_1) или (19_1) при некотором $a \in (0, +\infty)$ не имеет положительного правильного решения, то при любом $c \in (0, +\infty)$ соблюдается первое из условий (23). Теперь докажем, что если одно из уравнений (18_{n-1}) или (19_{n-1}) при некотором $a > 0$ не имеет положительного правильного решения, то при любом $c \in (0, +\infty)$ соблюдается второе из условий (23).

Действительно, допустим противное, что для некоторого $c_0 > 0$

$$\int_0^{+\infty} \varphi\big(t, c_0 q_{n-1}(t)\big)\,dt < +\infty.$$

Будем считать, что $c_0 \leqslant 1$. Пусть $r \in (0, c_0)$ и $t_0 \in \boldsymbol{R}_+$ такие, что

$$a\int_{t_0}^{+\infty} \varphi\big(t, c_0 q_{n-1}(t)\big)\,dt < c_0 - r \quad \text{и} \quad q_1(t_0) > 1. \tag{24}$$

В силу леммы 2 отсюда легко следует, что уравнение (19_{n-1}) имеет решение x удовлетворяющее неравенствам

$$r \leqslant x(t) \leqslant c_0 \quad \text{при } t \in [t_0, +\infty).$$

Следовательно, уравнение (18_{n-1}) не имеет положительного правильного решения.

Пусть теперь x решение уравнения (18_{n-1}) удовлетворяющее условию $x(t_0) = r$. Тогда найдётся такое число $t_1 > t_0$, что

$$r \leqslant x(t) < c_0 q_{n-1}(t) \quad \text{при } t \in [t_0, t_1), \; x(t_1) = c_0 q_{n-1}(t_1).$$

Поэтому, в силу (24) будем иметь

$$c_0 q_{n-1}(t_1) = x(t_1) = r + a \int_{t_0}^{t_1} \frac{q_{n-1}(t)}{\omega(q_{n-1}(t))} \varphi(t, x(t)) \omega(x(t))\, dt \leqslant$$

$$\leqslant r + a q_{n-1}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t, c_0 q_{n-1}(t))\, dt < r + (c_0 - r) q_{n-1}(t_1) < c_0 q_{n-1}(t_1).$$

Полученное противоречие доказывает, что соблюдается второе из условий (23).

Аналогично теореме 2 доказывается и следующая

Теорема 4. *Пусть соблюдается неравенство*

$$f(t, u) \operatorname{sign} u \geqslant a(t) \psi(|u|) \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+, \; u \in \boldsymbol{R},$$

где $a, \psi \in C(\boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_+)$, *$\psi$ не убывает,* $\psi(u) > 0$ *при* $u > 0$ *и для каждого* $i \in \{1, \dots, n-2\}$ такого, что $i + n$ чётное число, выполняется одно из *условий* 1), 2) *или* 3) *теоремы* 2. *Если, кроме того,*

$$\int_0^{+\infty} q_1(t) a(t)\, dt = +\infty \quad (\textit{в случае чётного } n)$$

и

$$\int_0^{+\infty} \psi(q_{n-1}(t)) a(t)\, dt = +\infty,$$

то уравнение (1) *обладает свойством B.*

В случае, когда $p_i(t) \equiv 1$ $(i = 1, \dots, n-1)$, то теоремы 1 и 3, в силу замечаниям к ним, принимают такой вид (ср. напр. с [8]; теоремы 14.1 и 14.2).

Теорема 5. *Пусть существуют функции* $\varphi \in C(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_+)$, $\omega \in C(\boldsymbol{R}_+, (0, +\infty))$, *$\varphi$ не убывает по второму аргументу, ω не убывает,*

$$(-1)^{\nu} f(t, u) \operatorname{sign} u \geqslant \varphi(t, |u|) \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+, \; u \in \boldsymbol{R}$$

и для любого $a \in (0, +\infty)$ *одно из уравнений*

$$x' = \frac{at^{n-1}}{\omega(t^{n-1})}\varphi(t, x)\omega(x), \qquad x' = -a\varphi(t, t^{n-1}x),$$

не имеет положительного правильного решения. Тогда, если $\nu = 1$ ($\nu = 2$), *то уравнение* (1) *обладает свойством* A (*свойством* B).

3. Пусть $\lambda \in (0, 1)$. Тогда очевидно, что уравнение

$$u^{(n)} + |u|^{\lambda}\operatorname{sign} u = 0$$

обладает свойством A. Но легко проверить (см., напр., [8], теорема 12.3), что при нечётном n оно не имеет правильных решений удовлетворяющих условию

$$|u^{(i)}(t)| \downarrow 0 \quad \text{при } t \uparrow +\infty \ (i = 0, \ldots, n-1).$$

Если же рассмотреть уравнение

$$u^{(n)} = |u|^{\lambda}\operatorname{sign} u \qquad (\lambda > 1),$$

то оно обладает свойством B, но не имеет решений (см. [8], теорема 12.5) удовлетворяющих условию

$$|u^{(i)}(t)| \uparrow +\infty \quad \text{при } t \uparrow +\infty \ (i = 0, \ldots, n-1).$$

Таким образом если уравнение (1) обладает свойством A (свойством B), то это ещё не значит, что оно имеет правильные решения всех видов фигурирующих в определении свойства A (свойства B).

В настоящем пункте устанавливаются достаточные условия для существования как колеблющихся решений, так и решений вида (4) или (5).

Сперва введём такое определение.

Решение u: $[t_0, t_1) \to \boldsymbol{R}$ уравнения (1) называется продолжаемым вправо, если существует решение v: $[t_0, t_2) \to \boldsymbol{R}$ $(t_2 > t_1)$ такое, что

$$u(t) = v(t) \quad \text{при } t \in [t_0, t_1).$$

В противном случае решение u называется непродолжаемым вправо.

Аналогично определяется непродолжаемое влево решение.

Ниже под решением уравнения (1) понимается решение непродолжаемое как вправо, так и влево.

Теорема 6. *Пусть уравнение* (1) *обладает свойством* A *и*

(25) $$0 \leqslant -f(t, u)\operatorname{sign} u \leqslant b(t)|u| \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+, \ u \in \boldsymbol{R},$$

где $b \in C(\boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_+)$. *Тогда уравнение* (1) *имеет решения всех видов фигурирующих в определении свойства* A.

Доказательство. При помощи обозначений

$$x_i = (-1)^{i-1} D^{i-1} u \quad (i = 1, \dots, n)$$

уравнение (1) можно записать в виде системы

$$(26) \qquad \begin{aligned} x_i' &= -p_i(t) x_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ x_n' &= (-1)^{n-1} f(t, x_1). \end{aligned}$$

Учитывая это, из условия (25), согласно теореме Уинтнера (см. [15], стр. 43), следует, что каждое решение уравнения (1) определено в промежутке $\boldsymbol{R}_+$.

Из (25) также следует, что система (26) при нулевых начальных данных имеет только тривиальное решение. Следовательно, каждое решение уравнения (1) является правильным. Поэтому, если n чётное число, то все решения уравнения (1) являются колеблющимися.

Пусть теперь n — нечётное число. Тогда как это следует из [15] (стр. 596), система (26) имеет решение $x_1, \dots, x_n$ удовлетворяющее неравенствам

$$x_i(t) x_1(t) > 0 \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+ \ (i = 1, \dots, n),$$

т.е. уравнение (1) имеет решение u удовлетворяющее условию

$$(27) \qquad (-1)^i (D^i u)(t) u(t) > 0 \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+ \ (i = 0, \dots, n-1).$$

Так как уравнение (1) обладает свойством A, то это решение будет удовлетворять условию (4). Кроме того, легко докажем, что произвольное неколеблющееся решение уравнения (1) удовлетворяет условию (27). Отсюда следует, что каждое нетривиальное решение u уравнения (1), для которого нарушается хотя бы одно из неравенств

$$(-1)^i (D^i u)(0) u(0) > 0 \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

является колеблющимся. Теорема доказана.

Согласно теореме 2 из теоремы 6 получается такое

Следствие. *Если соблюдается неравенство*

$$a(t) \frac{|u|^\lambda}{(1+|u|)^\mu} \leqslant -f(t, u) \operatorname{sign} u \leqslant b(t)|u| \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+, \ u \in \boldsymbol{R},$$

где a, $b \in C(\boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_+)$, $\lambda \geqslant 1$, $0 \leqslant \lambda - \mu \leqslant 1$ *и при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\int_1^{+\infty} q_i(t) [q_{n-1}(t)]^{\lambda-\mu-1-\varepsilon} a(t)\, dt = +\infty \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

то уравнение (1) обладает свойством A и оно имеет решения всех видов фигурирующих в определении этого свойства.

Теорема 7. *Пусть уравнение* (1) *обладает свойством* B *и*

$$0 \leqslant f(t, u)\,\mathrm{sign}\,u \leqslant b(t)|u| \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+,\ u \in \boldsymbol{R}, \tag{28}$$

где $b \in C(\boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_+)$. *Тогда уравнение* (1) *имеет решения всех видов фигурирующих в определении свойства* B.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма 4. *Если соблюдается неравенство* (28), *то для любых* $a_i \in \boldsymbol{R}$ $(i = 0, \ldots, n-2)$ *уравнение* (1) *имеет решение* u *удовлетворяющее краевым условиям*

$$(D^i u)(0) = a_i \quad (i = 0, \ldots, n-2), \qquad \lim_{t \to +\infty} |(D^{n-1}u)(t)| = 0. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть k произвольное натуральное число. Для уравнения (1) рассмотрим краевую задачу

$$(D^i u)(0) = a_i \quad (i = 0, \ldots, n-2), \qquad (D^{n-1}u)(k) = 0. \tag{30}$$

Сперва докажем, что для решения u_k задачи (1), (30) справедлива априорная оценка

$$|(D^i u_k)(t)| \leqslant 5\gamma Q(t) \exp\Big(\int_0^t b(\tau) Q(\tau)\,d\tau\Big) \quad \text{при } t \in [0, k] \quad (i = 0, \ldots, n-1), \tag{31}$$

где

$$Q(t) = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i}^{n-1} I^{j-i}(t, 0;\ i+1, \ldots, j),$$

$$\gamma = \sum_{j=0}^{n-2} |a_j| [q_{n-1}(t_0)]^{-1},$$

а $t_0 \in (0, 1]$ такое, что

$$\int_0^{t_0} p_i(t)\,dt < 1 \quad (i = 1, \ldots, n-1) \quad \text{и} \quad 2\int_0^{t_0} b(t) Q(t)\,dt < 1. \tag{32}$$

Если предположить, что

$$|(D^{n-1}u_k)(t)| \geqslant \gamma \quad \text{при } t \in [0, t_0],$$

то из равенства (9_{in-2}) в силу (7) получим

$$(D^i u_k)(t_0)\,\mathrm{sign}\,(D^{n-1}u_k)(t_0) > 0 \quad (i = 0, \ldots, n-2).$$

Отсюда, согласно (28) вытекает, что

$$|(D^i u_k)(t)| \geqslant |(D^i u_k)(t_0)| > 0 \quad \text{при } t \in [0, k] \ (i = 0, \ldots, n-1).$$

Но это невозможно, поскольку $(D^{n-1}u)(k) = 0$. Следовательно, существует $t_k \in (0, t_0)$ такое, что

$$|(D^{n-1}u_k)(t_k)| < \gamma.$$

Кроме того, из равенства $(9_{t_{n-2}})$ имеем

(33) $$|(D^i u_k)(t)| \leqslant Q(t)\varrho_k(t) \quad \text{при } t \in [0, k] \ (i = 0, \ldots, n-2),$$

где

$$\varrho_k(t) = \gamma + \max\{|(D^{n-1}u_k)(\tau)|: \ \tau \in [0, t]\}.$$

Поэтому, если $t_k^* \in (0, t_0)$ такое, что

$$\varrho_k(t_k^*) = \gamma + |(D^{n-1}u_k)(t_k^*)|,$$

то в силу (32) и (33) будем иметь

$$\varrho_k(t_k^*) \leqslant 2\gamma + \left|\int_{t_k}^{t_k^*} |(D^n u)(t)|\,dt\right| \leqslant 2\gamma + \int_0^{t_0} b(t)Q(t)\varrho_k(t)\,dt < 2\gamma + \tfrac{1}{2}\varrho_k(t_k^*),$$

т.е.

$$\varrho_k(0) \leqslant \varrho_k(t_k^*) < 4\gamma.$$

Тогда из уравнения (1) в силу (33) получим

$$\varrho_k(t) \leqslant 5\gamma + \int_0^t b(\tau)Q(\tau)\varrho_k(\tau)\,d\tau \quad \text{при } t \in [0, k]$$

и согласно лемме Гронуолла–Беллмана будем иметь

$$\varrho_k(t) \leqslant 5\gamma \exp\left(\int_0^t b(\tau)Q(\tau)\,d\tau\right) \quad \text{при } t \in [0, k].$$

Отсюда и из (33) следует справедливость оценок (31).

Теперь докажем, что задача (1), (30) разрешима. Для этого рассмотрим задачу Коши

(34) $$(D^n u)(t) = f_k(t, u(t)),$$

(35) $$(D^i u)(0) = a_i \quad (i = 0, \ldots, n-1),$$

где

$$f_k(t, u) = f(t, \chi_k(u)),$$

$$\chi_k(u) = \begin{cases} -c_k & \text{при } u < -c_k, \\ u & \text{при } |u| \leqslant c_k, \\ c_k & \text{при } u > c_k, \end{cases}$$

$$c_k = 5\gamma Q(k) \exp\left(\int_0^k b(\tau)Q(\tau)\,d\tau\right)$$

и a_{n-1} — параметр.

Пусть

$$g_k = \max\{|f(t, u)| : t \in [0, k], u \in [-c_k, c_k]\}.$$

Тогда

$$|f_k(t, u)| \leqslant g_k \quad \text{при } t \in [0, k], \ u \in \boldsymbol{R}$$

и легко покажем, что если $a_{n-1} > kg_k$, то решение задачи (34), (35) удовлетворяет условию $(D^{n-1}u)(k) > 0$, а если $a_{n-1} < -kg_k$, то условию $(D^{n-1}u)(k) < 0$. Поэтому, согласно теореме Кнезера–Хукухара [4], существует число $a_{n-1} \in [-kg_k, kg_k]$ такое, что решение u_k задачи (34), (35) является также решением задачи (34), (30). Так как функция f_k также удовлетворяет условию (28), то для этого решения справедлива оценка (31), а в силу определения функции f_k отсюда следует, что u_k является решением задачи (1), (30).

Рассмотрим последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Из (31) следует, что она равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом конечном отрезке промежутка $\boldsymbol{R}_+$. Следовательно, учитывая лемму Арцела–Асколи, без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ равномерно сходится на каждом сегменте содержащемся в $\boldsymbol{R}_+$. Пусть $u = \lim\limits_{k\to+\infty} u_k$. Тогда легко видеть, что u является решением уравнения (1), удовлетворяющим условию

$$(D^i u)(0) = a_i \quad (i = 0, \ldots, n-2).$$

Если допустим, что

$$\varliminf_{t\to+\infty} |(D^{n-1}u)(t)| > 0,$$

то для достаточно большого t_* получим

$$(D^i u)(t)u(t) > 0 \quad \text{при } t \in [t_*, +\infty) \ (i = 0, \ldots, n-1).$$

Поэтому

$$(D^i u_k)(t_*)u_k(t_*) > 0 \quad (i = 0, \ldots, n-1; \ k = k_0, k_0+1, \ldots),$$

где k_0 — достаточно большое натуральное число. Из последних неравенств, согласно (28), имеем

$$(D^i u_k)(t)u_k(t) > 0 \quad \text{при } t \in [t_*, +\infty)$$
$$(i = 0, \ldots, n-1; k = k_0, k_0+1, \ldots),$$

что невозможно, поскольку $(D^{n-1}u_k)(k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Полученное противоречие доказывает, что u является решением задачи (1), (29). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7. Как и при доказательстве теоремы 5 заключаем, что каждое решение уравнения (1) является правильным. Поэтому очевидно, что любое решение u уравнения (1) удовлетворяющее при некотором $t_0 \in \boldsymbol{R}_+$ начальному условию $(D^i u)(t_0)u(t_0) > 0$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, будет удовлетворять и условию (5).

Кроме того, если n нечётное число, также очевидно, что решение задачи (1), (29) будет колеблющимся. Следовательно, в этом случае теорема доказана.

Пусть теперь n чётное число. Как и выше убеждаемся, что уравнение (1) имеет решение удовлетворяющее условию (4). При этом каждое неколеблющееся решение либо удовлетворяет условию (5), либо условию (27). Поэтому если a_i $(i = 0, \ldots, n-2)$ такие числа, для которых нарушается хотя бы одно из неравенств

$$(-1)^i a_i a_0 > 0 \qquad (i = 0, \ldots, n-2),$$

то решение задачи (1), (29) будет колеблющимся. Таким образом теорема справедлива и в случае чётного n.

Из теорем 4 и 7 вытекает такое

Следствие. *Если соблюдается неравенство*

$$a(t)\frac{|u|^\lambda}{(1+|u|)^\mu} \leqslant f(t, u)\operatorname{sign} u \leqslant b(t)|u| \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+,\ u \in \boldsymbol{R},$$

где λ, μ, a, b удовлетворяют условиям следствия теоремы 6, *то уравнение* (1) *обладает свойством B и оно имеет решения всех видов фигурирующих в определении этого свойства.*

Литература

[1] Г. В. Ананьева, В. И. Балаганский, *О колеблемости решений некоторых дифференциальных уравнений высшего порядка*, УМН 14, № 1 (95) (1959), стр. 135–140.

[2] W. B. Fite, *Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 19 (1918), стр. 341–352.

[3] P. Hartman, *Principal solutions of disconjugate n-th order linear differential equations*, Amer. J. Math. 91 (1969), стр. 306–362.

[4] M. Hukuhara, *Sur une généralisation d'un théorème de Kneser*, Proc. Japan. Acad. 29 (1953), стр. 154–155.

[5] A. G. Kartsatos, *On n-th order differential inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 52 (1975), стр. 1–9.

[6] И. Т. Кигурадзе, *О колеблемости решений уравнения* $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0$, Матем. сб. 65 (107), № 2 (1964), стр. 172–187.

[7] — *Об условиях колеблемости решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, I, II, Дифференц. уравнения 10, № 8 (1974), стр. 1387–1399; 10, № 9 (1974), стр. 1586–1594.

[8] — *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Издательство Тбилисского университета, Тбилиси 1975.

[9] В. А. Кондратьев, *О колеблемости решений уравнения* $y^{(n)}+p(x)y = 0$, Труды Моск. матем. общества 10 (1961), стр. 419–436.

[10] A. Kneser, *Untersuchungen über die reelen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen*, Math. Ann. 42 (1893), стр. 409–435.

[11] А. Ю. Левин, *Неосцилляция решений уравнения* $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)x = 0$, УМН 24, № 2 (146) (1969), стр. 43–96.

[12] D. L. Lovelady, *An asymptotic analysis of an odd order linear differential equation*, Pacific J. Math. 57 (1975), стр. 475–480.

[13] J. Mikusiński, *On Fite's oscillation theorems*, Colloq. Math. 2 (1951), стр. 34–39.

[14] W. F. Trench, *Oscillation properties of perturbed disconjugate equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), стр. 147–155.

[15] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, „Мир", Москва 1970.

[16] Т. А. Чантурия, *О некоторых асимптотических свойствах решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Bull. Acad. Polon. Sci. sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977), стр. 757–762.

[17] — *Об одной теореме сравнения для линейных дифференциальных уравнений*, Изв. АН СССР, сер. мат. 40 (1976), стр. 1128–1142.

[18] — *Некоторые теоремы сравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков*, Bull. Acad. Polon. Sci., sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977), стр. 749–756.

Reçu par la Rédaction le 20. 2. 1976