ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Le rapport mutuel des problèmes généralisés de Dirichlet et de Neumann

par Z. Szmydt (Kraków)

Dans la note [4] j'ai démontré l'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Dirichlet, relatif à un domaine plan et généralisé dans ce sens que les données sur la frontière sont des distributions d'ordre fini m. Le problème de Neumann, généralisé d'une manière analogue, a été traité dans la note [5].

À présent nous allons démontrer que la solution du problème de Dirichlet généralisé, l'est aussi pour certain problème de Neumann généralisé et inversement (cf. le § 3, Théorème 1 et 2). Ceux résultats entraînent les Théorèmes 5 et 6 concernant les propriétés limites des fonctions analytiques (cf. le § 5). D'autre part ils permettent de démontrer l'unicité des solutions du problème traité dans [2] (cf. le Théorème 4, § 4).

La démonstration des Théorèmes 1 et 2 (cf. le § 3) sera basée sur la théorie du potentiel logarithmique exposée dans la note précedente [6].

Avertons que les notations indispensables pour la lecture de la suite sont introduites dans le § 1 de la note [6] et dans le § 1 de la présente.

§ 1. Notations. Admettons les notations introduites dans le § 1 de la note précedente [6].

Soit $D_m(\Sigma)$ l'espace réel de fonctions réelles $f(z) \in C^m(\Sigma)$ avec la norme définie par la formule:

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{m} \max_{0 \leqslant s \leqslant L} |\tilde{f}^{(k)}(s)|\,.$$

On désignera par $D'_m(\Sigma)$ l'espace *dual* de $D_m(\Sigma)$.

Par $D_m(\Sigma, +)$ sera désigné l'ensemble des fonctions p telles que $p(z) \in D_m(\Sigma)$ et $p(z_r) = p(z)$ lorsque $z \in \Sigma$ et $0 \leqslant r \leqslant r_0$; r_0 est un nombre positif défini dans le lemme 2 de la note [6].

D'autre part soit $K_m(\Sigma, +)$ l'ensemble des fonctions q ayant les propriétés suivantes: (a) $q \in C^m(\Sigma_r)$ pour chaque $0 \leqslant r \leqslant r_0$, (b) $\lim_{r \to 0} \tilde{q}_r^{(j)}(s) = \tilde{q}_0^{(j)}(s)$ avec $\tilde{q}_r(s) = q[z_r(s)]$, $j = 0, 1, \dots, m$ uniformément dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant L$.

À chaque fonction $p(z)$ définie dans un domaine D de la variable complexe z on fait correspondre la fonction $p(x,y)$ des variables réelles x et y définie pour $(x,y)\in D$ par la formule

$$p(x,y)=p(z) \quad \text{lorsque} \quad z=x+iy\,.$$

En vertu du lemme 2 de la note [6] on peut faire la remarque suivante:

Remarque 1. Si Σ et une courbe simple fermée de classe C^{m+1} et $p\in D_m(\Sigma,+)$, la fonction $p(x,y)$ est de classe C^m dans l'ensemble $\overline{\Omega}\setminus\Omega_{r_0}$.

Soit p une fonction définie sur la courbe Σ_r: $z=z_r(s)$ [1]. Par le symbole $\dfrac{\partial}{\partial s_z}p(z_r)$ on va comprendre la fonction:

$$\frac{\partial}{\partial s_z}p(z_r)=\left[\frac{\partial}{\partial s_z}p(z)\right]_{z=z_r}=x'(s)\left[\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_r\\ y=y_r}}+y'(s)\left[\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_r\\ y=y_r}}.$$

Similement la notation $\dfrac{\partial}{\partial n_z}p(z_r)$ sera employée au lieu de la notation plus précise: $\left[\dfrac{\partial}{\partial n_z}p(z)\right]_{z=z_r}$.

En s'appuyant sur la Remarque 1 on démontre aisément le résultat suivant:

Remarque 2. Si Σ est une courbe simple fermée de classe C^{m+1} et $p\in D_m(\Sigma,+)$, la fonction $\dfrac{\partial p}{\partial s_z}$ appartient à la classe $K_{m-1}(\Sigma,+)$.

Supposons que $f\in C^0(\Sigma)$. On désignera par $\varphi_f(z)$ la solution de l'équation intégrale

$$\int_{\Sigma}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\,ds_z-\pi\varphi(\zeta)=f(\zeta) \tag{1}$$

et par $\chi_f(z)$ une solution quelconque de l'équation

$$\int_{\Sigma}\chi(z)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\,ds_z+\pi\chi(\zeta)=f(\zeta)+c_0 \tag{2}$$

dans laquelle la constante c_0 est convenablement définie. On sait bien que deux solutions quelconques de l'équation (2) ne diffèrent que par une constante.

---

[1] Cf. [6], § 1, formule (1).

§ 2. Énoncé des problèmes aux limites généralisés.

PROBLÈME $\tilde{\mathrm{D}}$ (problème de Dirichlet généralisé). *Soit donnée une distribution $F \in D'_m(\Sigma)$. Il s'agit de trouver une fonction u, harmonique à l'intérieur du domaine Ω qui vérifie la condition*

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) u(z_\varrho) ds_{z_\varrho} = F[p(z)] \tag{3}$$

pour chaque fonction $p \in D_m(\Sigma, +)$.

PROBLÈME $\tilde{\mathrm{N}}$ (problème de Neumann généralisé). *Soit donnée une distribution $B \in D'_m(\Sigma)$, un point $z_0 \in \Omega$ et une valeur réelle v_0. On cherche une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine Ω, qui pour chaque fonction $p \in D_m(\Sigma, +)$ vérifie la condition aux limites généralisée*

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial v}{\partial n_z} ds_{z_\varrho} = B[p] \tag{4}$$

et la condition

$$v(z_0) = v_0 . \tag{5}$$

Dans la note [5] nous avons établi (²) le résultat suivant qui nous sera utile dans la suite:

Remarque 3. On obtient les problèmes équivalents aux problèmes $\tilde{\mathrm{D}}$ et $\tilde{\mathrm{N}}$ si l'on remplace la classe $D_m(\Sigma, +)$ qui intervient dans leurs énoncés par la classe $K_m(\Sigma, +)$.

PROBLÈME $\tilde{\tilde{\mathrm{D}}}$. *Soit donnée une distribution $B \in D'_m(\Sigma)$, un point $z_0 \in \Omega$ et une valeur réelle u_0. Il s'agit de trouver une fonction u, harmonique à l'intérieur du domaine Ω, qui pour chaque fonction $p \in D_m(\Sigma, +)$ vérifie la condition aux limites généralisée*:

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial u}{\partial s_z} ds_{z_\varrho} = B[p] \tag{6}$$

et la condition

$$u(z_0) = u_0 . \tag{7}$$

§ 3. THÉORÈME 1. *Supposons que Σ soit une courbe simple fermée de classe C^{m+3}. Soit $F \in D'_m(\Sigma)$ et soit G la fonctionnelle définie par la formule*:

$$G[f] = F[\varphi_f] \quad \text{lorsque} \quad f \in D_m(\Sigma) \tag{8}$$

où φ_f désigne la solution de l'équation (1).

(²) Cf. [5], § 2, théorème 1 et § 6.

Sous ces hypothèses:

(i) *La fonctionnelle* $G \in D'_m(\Sigma)$; *la fonction*

$$u(z) = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] \quad \textit{lorsque} \quad z \in \Omega \tag{9}$$

est une seule fonction harmonique dans le domaine Ω *qui vérifie la condition* (3). *La formule* (8) *définit une transformation biunivoque de l'espace* $D'_m(\Sigma)$ *en lui-même.*

(ii) *Si*

$$v_p(\zeta) = \int_\Sigma p(z)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\,ds_z \tag{10}$$

et le symbole $\dfrac{\partial^*}{\partial n_\zeta}v_p(\zeta)$ *a le sens precisé dans le* § 4 *de la note* [6], *alors la fonctionnelle:*

$$M[p] = G\left[\frac{\partial^*}{\partial n_\zeta}v_p(\zeta)\right] \tag{11}$$

appartient à l'espace $D'_{m+2}(\Sigma)$ *et la fonction* u *vérifie les conditions:*

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial u}{\partial n_z}\,ds_{z_\varrho} = M[p] \quad \textit{pour chaque} \quad p \in D_{m+2}(\Sigma, +),$$

$$u(z_0) = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_0-\zeta|\right].$$

Démonstration. La partie (i) du Théorème 1 résulte du théorème 5 de la note [5] (où bien du théorème de la note [4]). Il suffit donc de démontrer la partie (ii). À cet effet considérons le potentiel $v_p(\zeta)$ dû à la densité $p(z)$ de classe $C^{m+2}(\Sigma)$. En vertu du théorème 5 de la note [6] il existe les dérivées $\dfrac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}\dfrac{\partial^*}{\partial n_\zeta}v_p(\zeta)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ et sont continues lorsque $\zeta \in \Sigma$. Vu que $G \in D'_m(\Sigma)$, la formule (11) définit une fonctionnelle linéaire dans l'espace $D_{m+2}(\Sigma)$, qui est continue en vertu du théorème 6 de la note [6]. La fonctionnelle $M[p]$ appartient donc à l'espace $D'_{m+2}(\Sigma)$.

Soit $p(z)$ une fonction quelconque de classe $D_{m+2}(\Sigma, +)$. En vertu du théorème 5 de la note [6], des relations (9) et (11) on a [3]

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial u}{\partial n_z}\,ds_{z_\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_\varrho-\zeta|\,ds_{z_\varrho}\right] = M[p].$$

Le théorème 1 se trouve ainsi complètement démontré.

---

[3] Cf. aussi le lemme 1 de la note [2].

THÉORÈME 2. *Supposons que Σ est une courbe simple fermée de classe C^{m+3} et que $B \in D'_m(\Sigma)$, $B[1] = 0$. Soit H la fonctionnelle définie par la formule*

$$H[f] = B[\chi_f(z)] \quad \text{lorsque} \quad f \in D_m(\Sigma) \tag{12}$$

où $\chi_f(z)$ désigne une solution quelconque de l'équation (2).

Sous ces hypothèses:

(i) $H \in D'_m(\Sigma)$, $H[1] = 0$ *et la fonction*

$$v(z) = H[\log|z-\zeta|] + k \quad \text{lorsque} \quad z \in \Omega, \tag{13}$$

où

$$k = v_0 - H[\log|z_0-\zeta|] \tag{14}$$

est la seule fonction harmonique dans le domaine Ω qui vérifie les conditions (4) *et* (5). *La formule* (12) *définit une transformation biunivoque de l'espace des distributions B, $B \in D'_m(\Sigma)$, $B[1] = 0$ en lui-même. La transformation inverse est donnée par la relation*

$$B[p] = H[X_p] \tag{15}$$

où la fonction X_p est définie par la formule

$$X_p(\zeta) = \pi p(\zeta) + \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z-\zeta| ds_z. \tag{16}$$

(ii) *La fonctionnelle*

$$K[p] = H\Big[\int_{\Sigma} p(z) \log|z-\zeta| ds_z\Big] + k \int_{\Sigma} p(z) ds_z \tag{17}$$

appartient à l'espace $D'_m(\Sigma)$ et la fonction $v(z)$ vérifie la condition aux limites généralisée

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} v(z_\varrho) p(z_\varrho) ds_{z_\varrho} = K[p] \quad \text{pour chaque} \quad p \in D_m(\Sigma, +).$$

Démonstration. La partie (i) du Théorème 2 résulte du théorème 2 de la note [5]. Pour démontrer la partie (ii) remarquons qu'en vertu du théorème 4 de la note [6] la fonctionnelle $K[p]$ définie par (17) appartient à l'espace $D'_m(\Sigma)$.

Soit $p(z)$ une fonction arbitraire de classe $D_m(\Sigma, +)$. En vertu du théorème 2 de la note [6] et des notations (13) et (17) on obtient ([4]):

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) v(z_\varrho) ds_{z_\varrho} = k \int_{\Sigma} p(z) ds_z + \lim_{\varrho\to 0} H\Big[\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \log|z_\varrho-\zeta| ds_{z_\varrho}\Big] = K[p],$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 2.

([4]) Cf. le renvoi ([3]).

Les Théorèmes 1 et 2 entraînent les corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. *Soit m un nombre entier non négatif et soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+3}.*

Alors la solution du problème $\tilde{\mathrm{N}}$ peut être mise soit sous la forme (13) *soit sous la forme*

$$v(z) = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] \quad \textit{lorsque} \quad z \in \Omega \tag{18}$$

où les distributions: $G \in D'_m(\Sigma)$, $H \in D'_m(\Sigma)$ *et la constante k sont convenablement choisies.*

Chaque distribution $H \in D'_m(\Sigma)$, $H[1] = 0$ *détermine la distribution* $G \in D'_m(\Sigma)$ *telle que*:

$$H[\log|z-\zeta|] = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] \quad \textit{lorsque} \quad z \in \Omega.$$

Démonstration. Soit donné le problème $\tilde{\mathrm{N}}$ (cf. le § 1). En vertu du Théorème 2 la fonction (13) est une solution de ce problème et en même temps elle l'est pour le problème $\tilde{\mathrm{D}}$ dû à la distribution $F[p] = K[p]$ où $K[p]$ est défini par la relation (17). La partie (i) du Théorème 1 assure donc l'existence d'une distribution $G \in D'_m(\Sigma)$ telle que la relation (18) soit satisfaite.

Supposons que $H \in D'_m(\Sigma)$, $H[1] = 0$. Pour achèver la démonstration du Corollaire 1 il suffit de s'appuyer sur la partie démontré ci-dessus et sur le fait que la transformation définie par la formule (12) est biunivoque.

COROLLAIRE 2. *Soit m un nombre entier non négatif et soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+5}.*

Alors la solution u du problème $\tilde{\mathrm{D}}$ peut être mise soit sous la forme (9) *soit sous la forme*

$$u(z) = H[\log|z-\zeta|]+k \quad \textit{lorsque} \quad z \in \Omega \tag{19}$$

où les distributions: $G \in D'_m(\Sigma)$, $H \in D'_{m+2}(\Sigma)$, $H[1] = 0$ *et la constante k sont convenablément choisies* [6].

Chaque distribution $G \in D'_m(\Sigma)$ *détermine la distribution* $H \in D'_{m+2}(\Sigma)$ *telle que* $H[1] = 0$ *et que la relation suivante est satisfaite*:

$$H[\log|z-\zeta|] - G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] = \mathrm{const} \quad \textit{lorsque} \quad z \in \Omega.$$

[6] La constante k intervenant dans la formule (19) ne peut pas être supprimée. Pour s'en rendre compte il suffit d'examiner le problème de Dirichlet dans lequel Σ coïncide avec la circonférence du cercle unitaire et $F[1] \neq 0$.

La démonstration du Corollaire 2 est tout à fait analogue que celle du Corollaire 1, c'est pourquoi nous l'omettons.

Avant d'énoncer le théorème concernant l'existence d'une solution du problème $\tilde{\tilde{\mathrm{D}}}$ faisons la remarque suivante:

Remarque 4. Supposons que Σ est une courbe simple fermée de classe C^m $(m \geqslant 1)$ et que $B \in D'_m(\Sigma)$, $B[1] = 0$. Alors la fonctionnelle

$$F[p] = -B\left[\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left(p(z) - \frac{1}{L}\int_{\Sigma} p(t)\, ds_t\right) ds_z\right] \tag{20}$$

appartient à l'espace $D'_{m-1}(\Sigma)$ et on a

$$F'[p] = -F\left[\frac{\partial p}{\partial s}\right] = B[p]\,. \tag{21}$$

Théorème 3. *Supposons que Σ soit une courbe simple fermée de classe C^{m+3} et que $B[p] \in D'_m(\Sigma)$, $B[1] = 0$.*

Alors le problème $\tilde{\tilde{\mathrm{D}}}$ admet une et une seule solution $u(z)$. Elle est donnée par la formule

$$u(z) = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] + c \quad \textit{lorsque} \quad z \in \Omega \tag{22}$$

où la fonctionnelle G est définie par les formules (8) *et* (20) *et* $c = u_0 - G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_0-\zeta|\right]$.

Démonstration. Il est évident que la fonction $u(z)$ définie par la relation (22) est harmonique à l'intérieur du domaine Ω et vérifie la condition (7). D'autre part, en vertu du Théorème 1 et des Remarques 3 et 4 on a:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} q(z_\varrho)\, u(z_\varrho)\, ds_{z_\varrho} = F[q] + c\int_{\Sigma} q(z)\, ds_z \tag{23}$$

pour chaque fonction $q \in K_{m-1}(\Sigma, +)$.

Vu la Remarque 2 on déduit de la relation (23) que

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho}\frac{\partial p}{\partial s_z}\, u(z_\varrho)\, ds_{z_\varrho} = F\left[\frac{\partial p}{\partial s}\right]$$

pour chaque fonction $p \in D_m(\Sigma, +)$, et en vertu de (21) on obtient:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial u}{\partial s_z}\, ds_{z_\varrho} = B[p] \quad \text{pour chaque} \quad p \in D_m(\Sigma, +)\,.$$

La fonction (22) vérifie donc aussi la condition (6).

Remarquons que chaque fonction v, conjuguée harmonique de u, vérifie la condition aux limites:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial v}{\partial n_z}ds_{z_\varrho} = B[p] \quad \text{pour chaque} \quad p\in D_m(\Sigma, +).$$

L'unicité de la solution du problème $\tilde{\mathrm{N}}$ entraîne donc celle du problème $\tilde{\tilde{\mathrm{D}}}$ (⁶). Le Théorème 3 se trouve ainsi complètement démontré.

§ 4. Dans la note [2] nous avons considéré le problème suivant:

PROBLÈME $\tilde{\mathrm{A}}$ (⁷). *Soient données les distributions $B\in D'_m(\Sigma)$ et $F\in D'_m(\Sigma)$. On cherche une fonction v harmonique à l'intérieur du domaine Ω qui pour chaque fonction $p\in D_m(\Sigma, +)$ vérifie les conditions aux limites généralisées*:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial v}{\partial n_z}ds_{z_\varrho} = B[p], \tag{24}$$

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)v(z_\varrho)ds_{z_\varrho} = F[p]. \tag{25}$$

THÉORÈME 4. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+3} et supposons que F, $B\in D'_m(\Sigma)$.*

Sous ces hypothèses, la condition nécessaire et suffisante pour que le problème $\tilde{\mathrm{A}}$ admette une solution v c'est que

$$B[\log|z-\zeta|]-F\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right]=0 \quad \textit{lorsque} \quad z\notin\Omega. \tag{26}$$

Si la condition (26) *est satisfaite la fonction*

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\left\{B[\log|z-\zeta|]-F\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right]\right\} \quad \textit{lorsque} \quad z\in\Omega \tag{27}$$

est la seule solution de problème $\tilde{\mathrm{A}}$.

Démonstration. Supposons que la condition (26) soit satisfaite. En vertu du théorème 7 de la note [3] (⁸), la fonction (27) est une solution du problème $\tilde{\mathrm{A}}$ et par conséquent vérifie la condition (25) pour chaque fonction p de classe $D_m(\Sigma, +)$. Il résulte du Théorème 1 qu'une telle fonction est unique donc $v(z)$ est la seule solution du problème $\tilde{\mathrm{A}}$.

(⁶) Cf. les conditions (5) et (7).

(⁷) Le problème $\tilde{\mathrm{A}}$, come nous l'avons remarqué dans la note [2] (cf. [2], p. 28) peut être considéré comme une généralisation d'un problème résolu par L. Amerio dans la note [1].

(⁸) À cet effet il suffit admettre que Σ est une courbe simple fermée de classe C^{m+2}.

Supposons maintenant que le problème $\bar{A}$ admette une solution $v(z)$. Alors évidemment $B[1] = 0$ et en vertu du Théorème 2 il existe une constante k telle que

$$F[p] = H\Big[\int_\Sigma p(z)\log|z-\zeta|\,ds_z\Big] + k\int_\Sigma p(z)\,ds_z\,, \tag{28}$$

où la fonctionnelle H est définie par la formule (12). Choisissons arbitrairement un point $z \notin \bar{\Omega}$ et remarquons qu'en vertu des relations (28), (15) et (16) on obtient successivement:

$$B[\log|z-\zeta|] - F\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] \tag{29}$$

$$= B[\log|z-\zeta|] - H\left[\int_\Sigma \log|t-\zeta|\frac{\partial}{\partial n_t}\log|z-t|\,ds_t\right]$$

$$= H\left[X_{\log|z-\zeta|}(\zeta) - \int_\Sigma \log|t-\zeta|\,\frac{\partial}{\partial n_t}\log|z-t|\,ds_t\right]$$

$$= H\left[\pi\log|z-\zeta| + \int_\Sigma \log|t-z|\,\frac{\partial}{\partial n_t}\log|t-\zeta|\,ds_t - \int_\Sigma \log|t-\zeta|\,\frac{\partial}{\partial n_t}\log|z-t|\,ds_t\right].$$

En s'appuyant sur le théorème de Green on déduit de la relation (29) que [9]

$$B[\log|z-\zeta|] - F\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] = H[0] = 0\,.$$

La relation (26) en résulte, car le point z était choisi arbitrairement à l'extérieur de Ω. Le Théorème 4 se trouve ainsi complètement démontré.

§ 5. Valeurs limites généralisées des fonctions analytiques.

THÉORÈME 5. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+8} $(m \geqslant 0)$, $z_0 \in \Omega$, $B[p] \in D'_m(\Sigma)$ et $B[1] = 0$. Soit enfin $w_0 = u_0 + iv_0$ une valeur complexe quelconque.*

Sous ces hypothèses il existe une et une seule fonction $w(z)$ qui est analytique à l'intérieur du domaine Ω et vérifie les conditions suivantes [10]:

$$w(z_0) = w_0\,, \tag{30}$$

et

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\,\frac{\partial}{\partial n_z}\mathrm{I}[w(z_\varrho)]\,ds_{z_\varrho} = B[p] \tag{31}$$

pour chaque fonction $p \in D_m(\Sigma, +)$.

---

(9) Cf. [6]: la démonstration du lemme 7 et le renvoi (15).

(10) Rw désigne la partie réelle et Iw la partie immaginaire de la fonction w.

Soit F la fonctionnelle définie par la formule (20) *et soit* $G[f]=F[\varphi_f]$, $H[f]=B[\chi_f]$ *où* φ_f *et* χ_f *désignent les fonctions introduites dans le* § 1. *Ceci admis, la fonction* $w(z)$ *peut être mise sous la forme suivante*:

$$(32)\quad w(z)=c+G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right]+i\{k+H[\log|z-\zeta|]\}\quad \textit{lorsque}\quad z\in\Omega$$

où la constante k est donné par (14) *et* $c=u_0-G\left[\dfrac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_0-\zeta|\right]$. *En outre on a*

$$(33)\quad \lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)w(z_\varrho)ds_{z_\varrho}=F[p]+iK[p]+c\int_{\Sigma} p(z)ds_z$$

pour chaque fonction $p\in D_m(\Sigma,+)$,

et

$$(34)\quad \lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial}{\partial n_z}w(z_\varrho)ds_{z_\varrho}=M[p]+iB[p]$$

pour chaque fonction $p\in D_{m+1}(\Sigma,+)$,

où K désigne la distribution donnée par la formule (17) *et M celle définie par les relations* (10) *et* (11).

Démonstration. En vertu du Théorème 2 il existe une et une seule fonction $v(z)$ qui est harmonique à l'intérieur du domaine Ω et vérifie les conditions: $v(z_0)=v_0$ et

$$(35)\quad \lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial v}{\partial n_z}ds_{z_\varrho}=B[p]\quad \text{pour chaque}\quad p\in D_m(\Sigma,+).$$

Soit

$$(36)\quad w(z)=u(z)+iv(z)\quad \text{lorsque}\quad z\in\Omega$$

où $u(z)$ est la conjuguée harmonique de v telle que $u(z_0)=u_0$. Il est évident que la fonction $w(z)$ est l'unique fonction analytique dans le domaine Ω qui vérifie les conditions (30) et (31).

Remarquons qu'en vertu du Théorème 2 on a en outre:

$$(37)\quad v(z)=H[\log|z-\zeta|]+k\quad \text{lorsque}\quad z\in\Omega$$

et de plus

$$(38)\quad \lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)v(z_\varrho)ds_{z_\varrho}=K[p]\quad \text{pour chaque}\quad p\in D_m(\Sigma,+).$$

D'autre part il découle de la définition de la fonction $u(z)$ que: $u(z_0)=u_0$ et

$$\lim_{\varrho\to 0}\int p(z_\varrho)\frac{\partial u}{\partial s}ds_{z_\varrho}=B[p]\quad \text{pour chaque}\quad p\in D_m(\Sigma,+).$$

En vertu du Théorème 3 la fonction $u(z)$ admet la représentation:

$$(39)\qquad u(z)=G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right]+c \quad \text{lorsque} \quad z\in\Omega$$

et le Théorème 1 entraîne les relations suivantes:

$$(40)\qquad \lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)u(z_\varrho)ds_z = F[p]+c\int_{\Sigma} p(z)\,ds_z$$

pour chaque $p\in D_{m-1}(\Sigma,+)$,

$$(41)\qquad \lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial u(z_\varrho)}{\partial n_z}ds_{z_\varrho}=M[p] \quad \text{pour chaque} \quad p\in D_{m+1}(\Sigma,+).$$

La relation (32) résulte immédiatement des relations (36), (37) et (39). Les relations (36), (38) et (40) entraînent l'assertion (33), tandis que (34) résulte de (36), (35) et (41). Le Théorème 5 se trouve ainsi complètement démontré.

THÉORÈME 6. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+8} $(m\geqslant 0)$, $z_0\in\Omega$ et $F\in D'_m(\Sigma)$. Soit enfin u_0 une valeur réelle quelconque.*

Sous ces hypothèses il existe une et une seule fonction $w(z)$ qui est analytique à l'intérieur du domaine Ω et vérifie les conditions suivantes:

$$(42)\qquad \mathrm{R}[w(z_0)]=u_0,$$

$$(43)\qquad \lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\mathrm{I}[w(z_\varrho)]ds_{z_\varrho}=F[p]$$

pour chaque fonction $p\in D_m(\Sigma,+)$.

Si Σ est une courbe de classe C^{m+4}, la fonction $w(z)$ peut être mise sous la forme:

$$w(z)=H[\log|z-\zeta|]+k+iG\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] \quad \textit{lorsque} \quad z\in\Omega,$$

où la distribution G est donné par la formule (8), *la distribution H est définie par* (12) *avec $B[q]=F'[q]$ et la constante k est donnée par* (14).

Démonstration. Le Théorème 1 entraîne la première partie du Théorème 6 et la relation:

$$(44)\qquad \mathrm{I}[w(z)]=G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] \quad \text{lorsque} \quad z\in\Omega.$$

En vertu des Remarques 2 et 3 on déduit de la relation (43) que

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} q(z_\varrho)\frac{\partial}{\partial s_z}\mathrm{I}[w(z_\varrho)]ds_{z_\varrho}=-F\left[\frac{\partial q}{\partial s}\right]=F'[q]=B[q]$$

pour chaque fonction $q \in D_{m+1}(\Sigma, +)$ et vu les relations de Cauchy-Riemann, on obtient de suite

$$(45)\quad \lim_{\varrho \to 0} \int_{\Sigma_\varrho} q(z_\varrho) \frac{\partial}{\partial n_z} \mathrm{R}[w(z_\varrho)] ds_{z_\varrho} = B[q] \quad \text{pour chaque} \quad q \in D_{m+1}(\Sigma, +).$$

Il résulte du Théorème 2 et des relations (42) et (45) que

$$(46)\qquad \mathrm{R}[w(z)] = H[\log|z-\zeta|] + k \quad \text{lorsque} \quad z \in \Omega.$$

En rapprochant les relations (44) et (46) on achève la démonstration du Théorème 6.

Travaux cités

[1] L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi*, Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere 78 (1944-45)

[2] Z. Szmydt, *On a certain boundary problem for Laplace equation*, Ann. Polon. Math. 11 (1961), p. 27-48.

[3] — *Propriétés intégrales du potentiel logarithmique et ses applications*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série des sci. math., astr. et phys., 10 (1962), p. 139-144.

[4] — *L'unicité des solutions d'un problème de Dirichlet généralisé*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, 33 (1962), p. 395-400.

[5] — *Sur un problème de Neumann généralisé*, Ann. Polon. Math. 15 (1964), p. 309-325.

[6] — *L'étude de la dérivée normale du potentiel logarithmique de la double couche*, Ann. Polon. Math., ce volume, p. 15-30.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1964