ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Sur les inégalités mixtes entre les intégrales de l'équation aux dérivées partielles $z_x = f(x, y, z, z_y)$

par W. Pawelski (Gdańsk)

Au début de cette note nous allons démontrer (théorème 1) que les conditions du théorème 5 de la note précédente [1] peuvent être affaiblies par rapport aux intégrales u et v de l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{1}$$

et nous allons montrer (remarque 1) comment on peut affaiblir les conditions concernant la fonction f et les courbes par lesquelles les intégrales sont formées.

Mais le but essentiel du présent travail est de donner une extension de ce théorème au cas des inégalités mixtes, en supposant que les intégrales u et v ont des dérivées partielles égales $u_y = v_y$ aux points initiaux (x_0, y) où $u(x_0, y) = v(x_0, y)$; nous nous proposons ensuite de comparer dans les théorèmes 2 et 3 les positions de deux intégrales u et v de l'équation (1) dans le cas où ces intégrales sont égales en un point initial $Q_1^0(x_0, y_1)$, mais leurs dérivées partielles en ce point $u_y(Q_1^0)$ et $v_y(Q_1^0)$ sont différentes. On suppose ici comme dans [1] que les intégrales considérées u et v sont formées de caractéristiques au sens donné par J. Szarski dans le théorème 1 du mémoire [2], p. 3.

Théorème 1. *Admettons les hypothèses suivantes:*

(α) *La fonction $f(x, y, z, q)$ et ses dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables y, z, q sont continues dans un domaine D dont la projection sur le plan x, y recouvre l'ensemble*

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| \leqslant a_1 - M|x - x_0|, \tag{2}$$

où

$$a > 0, \quad M > 0, \quad a_1 > 0, \quad a < \frac{a_1}{M}.$$

(β) *Les dérivées f_y, f_z, f_q remplissent dans le domaine D la condition de Lipschitz par rapport aux variables y, z, q et on a l'inégalité*

$$|f_q| < M. \tag{3}$$

(γ) *On désignera par* $\bar{\Delta}$ *le domaine fermé qui résulte de* (2) *en admettant que* $|x-x_0| \leqslant c$, *où* $0 < c < a$ *et par* $\bar{K}$ *le segment* $\{x = x_0;\ y \in \langle y_0 - a_1, y_0 + a_1\rangle\}$.

(δ) *Le segment* $\bar{L} = \{x = x_0;\ y \in \langle c_1, d_1\rangle\}$ *est contenu dans le segment* K.

(ε) C *est une courbe située dans le domaine* $\bar{\Delta}$. *Cette courbe est la projection sur le plan* x, y *d'une portion de la caractéristique issue du point* $P \in D$, *dont la projection* $Q \in \bar{\Delta}$.

(ζ) *Les intégrales* u *et* v *de l'équation* (1) *sont définies et continues dans l'ensemble* (2) *et elles possèdent dans cet ensemble une différentielle totale et leurs éléments de contact respectifs* x, y, u, u_y; x, y, v, v_y *appartiennent au domaine* D.

(η) *Les intégrales* u *et* v *sont formées de caractéristiques dans l'ensemble* (2).

Dans ces conditions on a:

1° *Les hypothèses*

$$u(x_0, y) = v(x_0, y) \quad \textit{sur} \quad \bar{L}, \tag{4}$$

et

$$u(x_0, y) \underset{(<)}{>} v(x_0, y) \quad \textit{sur} \quad \bar{K} - \bar{L}$$

entraînent

$$u(x, y) = v(x, y) \quad \textit{dans} \quad \bar{\Delta}_1$$

où Δ_1 *est un domaine fermé (simplement connexe), contenu dans* $\bar{\Delta}$ *et formé de courbes* C *correspondant d'après la condition* (ε) *aux caractéristiques issues des points*

$$Q\big(x_0, y, u(x_0, y), u_y(x_0, y)\big)$$

pour lesquelles la condition (4) *est satisfaite (le même domaine* Δ_1 *est formé des courbes* $\bar{C}$ *correspondant d'une manière semblable à l'intégrale* v) *et on a*

$$u(x, y) \underset{(<)}{>} v(x, y) \quad \textit{dans} \quad \bar{\Delta} - \bar{\Delta}_1;$$

2° *D'après les hypothèses*

$$u(x_0, y) \underset{(<)}{>} v(x_0, y) \quad \textit{sur} \quad L \quad (c_1 < d_1)$$

et

$$u(x_0, y) = v(x_0, y) \quad \textit{sur} \quad \bar{K} - L,$$

il vient

$$u(x, y) \underset{(<)}{>} v(x, y) \quad \textit{dans} \quad \bar{\Delta}_1 - \Omega,$$

où $\bar{\Delta}_1$ *est un domaine du même type que dans* 1°, *et* Ω *est l'enveloppe du domaine* Δ_1 *formée de deux courbes* C_1 *et* C_2 *issues des deux points extrêmes du segment* $\bar{L}$ *et appartenant à* $\bar{\Delta}$, *et on a*

$$u(x, y) = v(x, y) \quad \textit{dans} \quad (\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_1) + \Omega;$$

3° *Il résulte des hypothèses*

$$u(x_0, y) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y) \quad pour \quad y \in \langle y_0 - a_1, c_1) ,$$
$$u(x_0, y) = v(x_0, y) \quad pour \quad y \in \langle c_1, d_1\rangle ,$$
$$u(x_0, y) \underset{(>)}{\leq} v(x_0, y) \quad pour \quad y \in (d_1, y_0 + a_1\rangle$$

qu'on a

$$u(x, y) \underset{(<)}{\geq} v(x, y) \quad dans \quad \Delta_1^*,$$

où Δ_1^* est un ensemble contenu dans $\bar{\Delta}$ et formé de courbe C (et de même de courbes $\bar{C}$) correspondant à l'intégrale u (respectivement v) et issues des points du segment

$$l_1^* = \{x = x_0;\ y \in \langle y_0 - a_1, c_1)\} .$$

En outre

$$u(x, y) = v(x, y) \quad dans \quad \bar{\Delta}_1 ,$$

où le domaine $\bar{\Delta}_1$ est déterminé d'une façon analogue à celle de 1°.

Enfin nous avons aussi

$$u(x, y) \underset{(>)}{\leq} v(x, y) \quad dans \quad \Delta_2^*,$$

où Δ_2^* est un ensemble contenu dans $\bar{\Delta}$ et formé de courbes C (et de même de courbes $\bar{C}$) correspondant à l'intégrale u (respectivement v) et issues des points du segment

$$l_2^* = \{x = x_0;\ y \in (d_1, y_0 + a_1\rangle\} .$$

Dans le cas où l'intervalle $\langle c_1, d_1\rangle$ se réduit à un point $y_1 \in (y_0 - a_1, y_0 + a_1)$ nous obtiendrons un problème du même type que dans 3° *en admettant l'hypothèse supplémentaire*:

$$u_y(x_0, y_1) = v_y(x_0, y_1) .$$

Démonstration. On se base ici, comme au début de la démonstration du théorème 5 dans [1], sur la remarque suivante de A. Pliś:

Si: (a) le second membre de l'équation (1) remplit la condition de Lipschitz par rapport à z avec une certaine constante et par rapport à q avec la constante M, (b) u et v sont des intégrales ayant dans l'ensemble (2) une différentielle totale, (c) $u(x_0, y) \geqslant v(x_0, y)$ alors on a $u \geqslant v$ dans l'ensemble (2).

On déduit directement des conditions de notre théorème et de la remarque précédente que dans le cas des conclusions 1° et 2° on a bien l'inégalité

$$u(x, y) \geqslant v(x, y) \quad \text{dans} \quad \bar{\Delta} ,$$

ou l'inégalité contraire.

Il résulte ici de même que dans [1], en vertu de l'unicité des caractéristiques dont sont formées les intégrales u et v, que par chaque point du domaine $\bar{\Delta}$ il passe une seule courbe C (propriété A de [1]).

La courbe C est la projection de la caractéristique qui est située sur la surface $z = u(x, y)$. De même, par chaque point du domaine $\bar{\Delta}$ il passe exactement une courbe $\bar{C}$, qui est la projection de la caractéristique appartenant à la surface $z = v(x, y)$.

En vertu de l'hypothèse (3) nous avons $|y'| < M$, donc chaque courbe C, et aussi $\bar{C}$, a exactement un point commun avec la frontière de $\bar{\Delta}$, tant pour $x \geqslant x_0$ que pour $x \leqslant x_0$. La propriété B (voir [1]) ne sera pas nécessaire ici, car l'enveloppe Ω du domaine Δ_1 est formée uniquement de deux courbes C_1 et C_2 qui passent par les points $Q_1(x_0, c_1)$ et $Q_2(x_0, d_1)$. C'est pourquoi il est possible d'affaiblir les hypothèses du présent théorème par rapport à celles du théorème 5 de [1].

Il est clair, dans ce cas, que les courbes C, et aussi $\bar{C}$, issues des points du segment L forment le même domaine Δ_1, puisque par chaque point $Q \in \Delta_1$ (où Δ_1 est un domaine limité par les courbes C_1 et C_2 et par les ensembles Z_1 et Z_2 déterminés sur la frontière du domaine Δ par ces courbes) il passe exactement une courbe aussi bien C que $\bar{C}$. Ces courbes, en vertu de l'unicité des courbes C_1 et C_2, ne peuvent avoir de point commun avec C_1 et C_2, donc elles doivent passer par le segment L.

De même chaque courbe C, et aussi $\bar{C}$, issue du point Q et contenue dans $\bar{\Delta}-\bar{\Delta}_1$, passe par un point des segments $\bar{K}-\bar{L}$. Si l'on tient compte des remarques précédentes, la démonstration des conclusions 1° et 2° est presque analogue à celle du théorème 5 de [1], c'est pourquoi nous ne la donnons pas ici.

Pour la démonstration de la conclusion 3° remarquons d'abord que deux intégrales quelconques u_1 et v_1 formées de caracteristiques et satisfaisant aux mêmes conditions sur un segment $\bar{l} \subset \bar{K}$ pour $x = x_0$, sont identiques dans tout l'ensemble formé par les courbes C — correspondant à ces caractéristiques — issues du segment $\bar{l}$ et situées dans $\bar{\Delta}$. Remarquons encore que les intégrales u et v satisfaisant aux conditions admises dans 3° ont aux point du segment $\bar{L}$ des dérivées identiques $u_y(x_0, y) = v_y(x_0, y)$. (Nous avons supposé cette égalité pour cas où le segment $\bar{L}$ se réduit à un point).

L'égalité des dérivées u_y et v_y aux points Q de L résulte immédiatement de l'égalité $u = v$. Il est évident qu'aux points $Q_1(x_0, c_1)$ et $Q_2(x_0, d_1)$ les dérivées u_y et v_y sont aussi égales, car ces dérivées existent et les dérivées partielles à droite des fonctions u et v par rapport à y au point Q_1 et celles à gauche au point Q_2 sont égales. Mais, comme cette égalité reste valable le long des courbes C_1 et C_2 issues des points Q_1 et Q_2 et les fonctions u et v sont des intégrales de l'équation (1), il en résulte tout de suite l'égalité $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ dans tout le domaine $\bar{\Delta}_1$.

Les intégrales u et v ont une portion commune des surfaces formée de caractéristiques issues des points $P(x_0, y, u(x_0, y), u_y(x_0, y))$ pour $y \in \langle c_1, d_1 \rangle$.

Considérons deux segments: $l_1^* = \{x = x_0;\ y \in \langle y_0 - a_1, c_1)\}$ et $l_2^* = \{x = x_0;\ y \in (d_1, y_0 + a_1\rangle\}$ et définissons deux intégrales U et V. Nous désignerons par U l'intégrale qui est égale à $u(x_0, y)$ sur le segment $\bar{K} - l_2^*$ et à $v(x_0, y)$ sur $\bar{K} - l_1^*$, définie de la manière suivante:

$$U(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{dans} \quad \Delta_1^* + \bar{\Delta}_1, \\ v(x, y) & \text{dans} \quad \Delta_2^*. \end{cases}$$

Nous désignerons par V l'intégrale qui est égale à $v(x_0, y)$ le long du segment $\bar{K} - l_2^*$ et à $u(x_0, y)$ le long de $\bar{K} - l_1^*$, définie comme il suit:

$$V(x, y) = \begin{cases} v(x, y) & \text{dans} \quad \Delta_1^* + \bar{\Delta}_1, \\ u(x, y) & \text{dans} \quad \Delta_2^*. \end{cases}$$

Ces intégrales satisfont à la conclusion 1° et, comme il résulte de 1° et de la partie précédente de la démonstration, aux identités

$$u(x, y) = U(x, y) \text{ dans } \Delta_1^* + \bar{\Delta}_1 \quad \text{et} \quad u(x, y) = V(x, y) \text{ dans } \bar{\Delta}_1 + \Delta_2^*,$$
$$v(x, y) = V(x, y) \text{ dans } \Delta_1^* + \bar{\Delta}_1 \quad \text{et} \quad v(x, y) = U(x, y) \text{ dans } \bar{\Delta}_1 + \Delta_2^*.$$

Il en résulte immédiatement, par comparaison avec 1°, la conclusion 3°.

Dans le cas où le segment $\bar{L}$ se réduit à un point, les fonctions U et V sont déterminées comme précédemment, leurs valeurs initiales étant données directement sur les segments $\bar{l}_1^*$ et $\bar{l}_2^*$.

Le domaine $\bar{\Delta}_1$ se réduit alors à la courbe C_1 issue du point commun des segments fermés $\bar{l}_1^*$ et $\bar{l}_2^*$.

Remarque 1. Au lieu des caractéristiques on pourrait prendre une famille de courbes dont les propriétés seraient aussi satisfaites, en particulier, par les caractéristiques.

Pour une telle famille Λ on pourrait prendre les courbes λ verifiant les condictions:

(a) Par chaque point P du domaine D il passe exactement une courbe λ qui va de la frontière à la frontière de D et qui est définie par les équations de la forme: $y = \varphi_1(x)$, $z = \varphi_2(x)$, $q = \varphi_3(x)$ où les fonctions φ_i $(i = 1, 2, 3)$ sont définies et continues dans un intervalle (α, β).

(b) Chaque courbe $y = \varphi_1(x)$ ayant un point commun avec $\bar{\Delta}$ satisfait aux propriétés de la courbe C; elle passe donc par le segment $\bar{K}$ ayant exactement un point commun avec la frontière de Δ, pour $x \geqslant x_0$ ainsi que pour $x \leqslant x_0$.

Les énoncés et les démonstrations des théorèmes 1 et 2 ne changeraient pas si dans le théorème 1 nous modifions les conditions suivantes:

1° Au lieu de (α) nous supposons que la fonction f vérifie la condition de Lipschitz par rapport à z avec une certaine constante et par rapport à q avec la constante M dans l'ensemble (2).

2° Dans (β) nous laissons l'inégalité (3).

3° Dans (ε) C désigne une courbe définie dans (b).

4° Dans (η) les intégrales u et v sont formées de courbes λ dans l'ensemble (2) dans le même sens que pour les caractéristiques. Mais, en admettant ces hypothèses, il faudrait évidemment savoir si, en dehors du cas où les intégrales u et v sont formées de caractéristiques, d'autres cas sont encore possibles, où les intégrales u et v de l'équation (1) formées de courbes λ existent sous les conditions ainsi affaiblies.

En appliquant maintenant la remarque de A. Pliś et la méthode de la démonstration du théorème 1 dans [2] pour le cas 2, p. 5-9, nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme 1. *Si l'on suppose que les conditions* (a), (b) *et* (c) *de la remarque de A. Pliś sont remplies dans l'ensemble* (2) *et que* $|f_q| < M$, *alors l'inégalité* $u(Q) > v(Q)$ (*dans le cas où* $u(x_0, y) \geqslant v(x_0, y)$) *a lieu pour chaque point* Q *de* (2) (*différent des points* $Q_1^*(x_0, y_0 - a_1)$ *et* $Q_2^*(x_0, y_0 + a_1)$) *en lequel les dérivées* $u_y(Q)$ *et* $V_y(Q)$ *sont différentes.*

(Il résulte immédiatement des Théorèmes 2 et 3 qui suivent, et de la remarque 3, que dans ce cas aux points Q_1 et Q_2 on peut même avoir l'égalité $u(Q) = v(Q)$).

Démonstration. Il résulte des hypothèses (a)-(c), comme nous le savons déjà, que $u \geqslant v$ dans tout l'ensemble (2). Si donc Q est un point intérieur de l'ensemble (2), il résulte directement du principe de l'extrêmum que l'égalité $u(Q) = v(Q)$ entraîne $u_y(Q) = v_y(Q)$.

Par conséquant il résulte directement de la condition $u_y(Q) \neq v_y(Q)$ que pour un tel point on a $u(Q) > v(Q)$. Si à son tour le point $Q(\bar{x}, \bar{y})$ appartenait à la face latérale de l'ensemble (2) et il était différent des points Q_1^* et Q_2^* — on aurait donc $x \neq x_0$ — et si l'égalité $u(Q) = v(Q)$ avait lieu, alors le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 1 de [2], p. 5-9, aboutirait à une contradiction.

En se basant sur le lemme précedent on peut prouver le lemme suivant.

Lemme 2. *Si l'on suppose que les conditions* (α) *et* (β) *du théorème* 1 *sont vérifiées* (*donc les hypothèses du lemme* 1 *le sont aussi*), *que les intégrales* $u(x, y)$ *et* $v(x, y)$ *sont formées de caractéristiques ainsi que ces intégrales sont égales pour l'un des points* Q_1^* *et* Q_2^* *ou pour tous les deux et à l'intérieur du segment* K *on a l'inégalité*

$$u(x_0, y) \underset{(<)}{>} v(x_0, y),$$

alors il en résulte l'inégalité

$$u(x,y) \underset{(<)}{\gtrless} v(x,y)$$

dans l'ensemble (2) *à l'axception d'un points* (*ou de tous les deux*) Q_1^* *et* Q^* *pour lequel* $u(Q_i^*) = v(Q_i^*)$ $(i = 1, 2)$.

Démonstration. Les courbes C et aussi $\bar{C}$, définies dans le théorème 1, issues des points Q (différents de Q_1^* et Q_2^* et appartenant à l'ensemble (2)), ne passent que par l'intérieur du segment K, puisque les dérivées y' satisfont à la condition $|y'| < M$.

Ainsi chacune de ces courbes — issue du point Q de la face latérale de (2) — a exactement un point commun avec la face latérale de l'ensemble (2) soit pour $x > x_0$, soit pour $x < x_0$. Ces points sont différents de Q_1^* et Q_2^*. Il s'ensuit des hypothèses qu'on peut appliquer ici le lemme 1.

On sait, d'après le lemme précédent, que si l'égalité $u(Q) = v(Q)$ avait lieu en un point Q appartenant à l'ensemble (2) et différent de Q_1^* et Q_2^*, on devrait aussi avoir $u_y(Q) = v_y(Q)$. Donc toutes les deux intégrales devraient être égales le long de la courbe commune C issue du point Q et passant par l'intérieur du segment K, d'où il résulterait une contradiction avec l'hypothèse $u \underset{(<)}{\gtrless} v$ sur K. Ainsi, en chaque point Q différent de Q_1^* et Q_2^* et appartenant à l'ensemble (2), on a l'inégalité $u \underset{(<)}{\gtrless} v$.

Remarque 2. En tenant compte du raisonnement appliqué dans la remarque 1 nous obtiendrons au lieu du lemme 2 un autre, aussi valable, mais sous une forme plus simple.

LEMME 2'. *Si l'on suppose que les conditions du lemme* 1 *sont vérifiées, que les intégrales* $u(x,y)$, $v(x,y)$ *sont formées de courbes* λ *ainsi que ces intégrales sont égales pour un ou pour tous les deux points* Q_1^* *et* Q_2^* *et à l'intérieur du segment* K *on a l'inégalité*

$$u(x_0,y) \underset{(<)}{\gtrless} v(x_0,y)\,,$$

alors il en résulte l'inégalité

$$u(x,y) \underset{(<)}{\gtrless} v(x,y)$$

dans l'ensemble (2) *à l'exception d'un des points ou de tous les deux* Q_1^* *et* Q_2^*, *pour lequel* $u(Q_i^*) = v(Q_i^*)$ $(i = 1, 2)$.

Le lemme 2 résulte immédiatement du lemme 2'.

Passons maintenant au cas où les intégrales u et v sont égales au point initial $Q_1^0(x_0, y_1) \in K$, mais leurs dérivées $u_y(Q_1^0)$ et $v_y(Q_1^0)$ sont différentes.

Nous allons d'abord démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Admettons*:

(α) *que les hypothèses* (α), (β), (γ), (ζ) *et* (η) *du théorème* 1 *soient verifiées*;

(β) *que*

$$u(x_0, y) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y) \quad \textit{dans} \quad \langle y_0 - a_1, y_1) ,$$

$$u(x_0, y_1) = v(x_0, y_1) \quad \textit{pour} \quad y_1 \in (y_0 - a_1, y_0 + a_1) ,$$

$$u(x_0, y) \underset{(>)}{\leq} v(x_0, y) \quad \textit{dans} \quad (y_1, y_0 + a_1\rangle ;$$

(γ) *que* $u_y(x_0, y_1) \neq v_y(x_0, y_1)$;

(δ) *qu'il existe dans* $\overline{\Delta}$ *une courbe continue* Γ, *définie par l'équation* $y = \varphi(x)$ *issue du point* $Q_1^0(x_0, y_1)$ *et ayant exactement un point commun avec la frontière de* Δ, *tant pour* $x > x_0$ *que pour* $x < x_0$, *et telle que le long de cette courbe l'égalité* $u(x, \varphi(x)) = v(x, \varphi(x))$ *ait lieu*;

(ε) *qu'on puisse choisir pour chaque point de la courbe* Γ, *contenu dans* Δ, *un voisinage tel qu'en dehors des points de cette courbe on ait* $u \neq v$. *Mais pour un point* $\overline{Q}(\bar{x}, \bar{y})$ *de cette courbe commun avec la frontière de* $\overline{\Delta}$ *nous admettons cette propriété, dans le cas où* $\bar{x} < x_0$, *seulement pour une portion commune d'un voisinage du point* $\overline{Q}$ *avec* $\overline{\Delta}$ *et avec un voisinage à droite défini par les inégalités*:

$$\bar{x} \leqslant x \leqslant \bar{x} + \delta, \quad |\bar{y} - y| < \delta \quad \textit{où} \quad \delta > 0 .$$

Dans le cas où $\bar{x} > x_0$ *nous admettons cette propriété dans la portion commune de* $\overline{\Delta}$ *avec un voisinage à gauche du point* $\overline{Q}$ *défini d'une façon analogue.*

Dans ces conditions la courbe Γ *contient tous les points situés dans* $\overline{\Delta}$ *pour lesquels* $u = v$. *Elle partage le domaine* Δ *en deux ensembles* Δ_1 *et* Δ_2 *els que*

a) *dans* Δ_1 ($\langle y_0 - a_1, y_1) \subset \Delta_1$) *nous avons l'inégalité* $u \underset{(<)}{\geq} v$ *et*

b) *dans* Δ_2 ($(y_1, y_0 + a_1\rangle \subset \Delta_2$) *nous avons l'inégalité* $u \underset{(>)}{\leq} v$.

Démonstration. La courbe Γ forme dans $\overline{\Delta}$ un ensemble fermé et borné. Il résulte donc du théorème de Borel sur le recouvrement d'un ensemble fermé et borné, qu'il suffit d'un nombre fini de cercles ouverts pour la recouvrir. Tous les points de Γ sont contenus à l'intérieur de ces cercles. Les intérieurs de ces cercles avec la portion restante commune des voisinages (d'un seul côté) des extrémités de cette courbe, en excluant pour le moment les segments situés sur deux lignes de la forme $x = \bar{x}$, forment un ensemble dont la portion située dans Δ constitue un domaine.

La courbe Γ partage ce domaine en deux portions: D_1 pour $y < \varphi(x)$ et D_2 pour $y > \varphi(x)$. Dans le domaine D_1 on a entre les intégrales l'inégalité $u \underset{(<)}{\geq} v$. Car si en un point $Q' \in D_1$, n'appartenent pas au segment K, on avait l'inégalité contraire $u(Q')\underset{(>)}{\leqslant} v(Q')$, alors en joignant ce point par une courbe continue, située à l'intérieur de D_1, à un point contenu dans $K\cdot D_1$, où d'après l'hypothèse $u\underset{(<)}{\geqslant} v$, on arriverait à la conclusion que dans D_1 il doit se trouver un point de cette courbe où $u=v$. On arriverait ainsi à une contradiction avec l'hypothèse (ε). On déduit de la continuité des intégrales u et v et de la dernière partie de l'hypothèse (ε) que la même inégalité a lieu aussi sur les portions ouvertes des segments exclus ci-dessus, pour lesquels $y<\varphi(x)$.

Si donc nous désignons par D_1^* un ensemble obtenu en adjoignant à D_1 ces segments, nous pouvons constater brièvement, comme conséquence des raisonnements précédents, que

$$u\underset{(<)}{\geqslant} v \quad \text{dans} \quad D_1^*.$$

On démontre pareillement qu'on a aussi l'inégalité

$$u\underset{(>)}{\leqslant} v \quad \text{dans} \quad D_2^*.$$

La construction de D_2^* pour $y>\varphi(x)$ est analogue à celle de D_1^* pour $y<\varphi(x)$.

Dans la suite nous allons considérer les trois cas suivants:

1. La courbe Γ a, par exemple, pour $x>x_0$ un point commun avec la frontière de Δ sur la droite $x=x_0+c$ (le raisonnement pour $x<x_0$ sera analogue) en n'appartenant pas à la face latérale de l'ensemble (2). Il s'ensuit de la première inégalité de (β) et de la partie préliminaire de la démonstration qu'il existe un nombre $\bar{\bar{x}}>x_0$ tel que dans Δ_1 pour $x_0\leqslant x\leqslant \bar{\bar{x}}$ on a l'inégalité

$$u\underset{(<)}{\geqslant} v\,.$$

Nous montrerons que cette inégalité est remplie dans toute la portion de l'ensemble Δ_1 déterminée pour $x_0\leqslant x\leqslant x_0+c$.

Dans le cas contraire nous désignerions par x' la borne supérieure des x en lesquels cette inégalité a lieu.

Alors on aurait $x_0<x'<x_0+c$ et par conséquent il existerait un point $Q'(x',y')\in\Delta_1$ tel que $u(Q')=v(Q')$ et $u(Q)\underset{(<)}{\geqslant} v(Q)$ pour $x_0\leqslant x<x'$. Nous allons démontrer qu'un tel point ne peut exister. Sinon on pourrait le placer dans la fermature d'un petit trapèze (de côtés parallèles à ceux du trapèze défini par les inégalités: $x_0\leqslant x\leqslant x_0+c$, $|y-y_0|\leqslant a_1-M|x-x_0|$) qui serait contenu entièrement dans Δ_1 et sur son côté plus long, parallèle à $\bar{K}$, l'inégalité $u\underset{(<)}{\geqslant} v$ aurait lieu. Mais alors, d'après le théorème 1 de [2] cette inégalité devrait aussi avoir lieu pour les autres points du trapèze, donc au point Q', ce qui est contraire à l'hypothèse $u(Q')=v(Q')$. (On peut toujours en fermer un tel petit trapèze dans un certain ensemble du type (2) (contenu dans (2)) dont la portion pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$ (ou l'ensemble entier) serait contenue dans Δ_1).

La construction d'un tel trapèze fermé est possible grâce à l'existence de l'ensemble D_1^* et à l'inégalité $c < a$. On démontre tout à fait pareillement que $u \underset{(>)}{<} v$ dans Δ_2.

2. La courbe Γ a un point $\bar{Q}$ commun avec la face latérale de l'ensemble $\bar{\Delta}$ dans le cas où $x_0 < \bar{x} < x_0+c$ (dans le cas où $x_0-c < \bar{x} < x_0$ le raisonnement est analoque). Soit $\bar{Q}$ situé sur la portion de la face latérale à laquelle est adjacente la portion de Δ_1 définie pour $x > x_0$ (dans le cas inverse le raisonnement est pareil). Alors, presque de même que dans le cas 1, on obtient dans Δ_1 l'inégalité $u \underset{(<)}{>} v$. On démontre comme dans le cas 1, qu'on a $u \underset{(>)}{<} v$ pour les points de Δ_2 pour lesquels $x_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}$.

Mais sur le segment $\bar{l}$, qui est une portion commune de la droite $x = \bar{x}$ et de l'ensemble $\bar{\Delta}$, on a l'inégalité $u \underset{(>)}{<} v$ aux points différents de $\bar{Q}$, et au point $\bar{Q}$ on a $u(\bar{Q}) = v(\bar{Q})$. Sur le segment $\bar{l}$ et dans la portion de $\bar{\Delta}$ pour $\bar{x} \leqslant x \leqslant x_0+c$ les hypothèses du lemme 2 sont vérifiées. Il en résulte que dans cette portion de $\bar{\Delta}$ on a aussi pour les points $Q \neq \bar{Q}$ l'inégalité $u \underset{(>)}{<} v$, car $c < a$.

3. $\bar{Q}$ est un point commun de la face latérale et de la droite $x = x_0+c$ (pour $x = x_0-c$ il en est de même).

Alors la démonstration pour Δ_1 serait la même que dans le cas 2, tandis que pour Δ_2 elle serait la même que dans le cas 1 pour Δ_1, ou inversement, suivant que le point $\bar{Q}$ serait un point limite de la face latérale et appartenant à Δ_1 ou, en particulier, à Δ_2.

Remarque 3. Les dérivées u_y et v_y ne peuvent être égales en aucun point de la courbe Γ.

En effet, dans le cas contraire, si elles étaient égales en un point quelconque — évidemment différent de $Q_1^0(x_0, y_1)$ — il résulterait de l'hypothèse (ε) et de l'unicité des caractéristiques que la courbe Γ serait la projection d'une caractéristique commune aux deux surfaces $z = u$ et $z = v$. Donc au point Q_1^0 la relation $u_y(Q_1^0) = v_y(Q_1^0)$ devrait aussi avoir lieu, d'où il résulterait une contradiction avec l'hypothèse. Si on omettait même l'hypothèse (ε), la remarque précédente résulterait aussi uniquement des hypothèses précédentes. En outre il résulte de la condition (ε) et des remarques précédentes que la différence $u_y - v_y$ ne change pas de signe le long de la courbe Γ.

Remarque 4. On pourrait un peut étendre l'énoncé du théorème 2 en admettant dans l'hypothèse (β) la possibilité de l'égalité entre les intégrales u et v aux points Q_1^* et Q_2^*, qui bornent le segment $\bar{K}$, et en conservant les autres hypothèses sans les changer. Alors, en se basant sur le lemme 2 et sur la démonstration du théorème 2, on obtiendra une conclusion ne différant de la précedente qu'en ce que les intégrales u et v seront égales, hors de la courbe Γ, encore aux points Q_1^* et Q_2^*.

THÉORÈME 3. *Si l'on suppose que les conditions* (α), (β) *et* (γ) *du théorème 2 sont remplies simultanément avec la condition supplémentaire que les deux intégrales u et v possèdent des dérivées u_y et v_y continues, alors l'ensemble des points dans $\varDelta$ pour lesquels $u = v$ est une courbe Γ. Elle partage le domaine $\varDelta$ en deux ensembles $\varDelta_1$ et $\varDelta_2$ tels que*

a) *dans $\varDelta_1$ on a l'inégalite $u \underset{(<)}{>} v$*

et

b) *dans $\varDelta_2$ on a l'inégalite $u \underset{(>)}{<} v$.*

Démonstration. Il résulte des hypothèses sur les fonctions u et v que la fonction $u(x, y) - v(x, y)$ s'annule au point $Q_1^0(x_0, y_1)$ et qu'elle a dans un voisinage de Q_1^0 une dérivée $\dfrac{\partial(u-v)}{\partial y}$ continue et différente de zéro. Donc, en se basant sur le théorème des fonctions implicites, on trouve dans un voisinage de ce point qu'il existe une seule courbe Γ ($y = \varphi(x)$) le long de laquelle $u - v = 0$. L'égalité $u - v = 0$ n'a lieu en aucun autre point de ce voisinage. Supposons que pour $x > x_0$ (pour $x < x_0$ la démonstration est analogue) la courbe Γ puisse être prolongée jusqu'à $\bar{x}$. Si la courbe Γ existait dans l'intervalle fermé $\langle x_0, \bar{x}\rangle$ et aucun des points de Γ n'appartenait à la frontière de $\bar{\varDelta}$, évidemment elle se laisserait prolonger à l'extérieur de cet intervalle, puisque d'après la remarque 3 on a $\dfrac{\partial(u-v)}{\partial y} \neq 0$, au point $\bar{Q}$.

Nous allons montrer qu'elle se laisserait aussi si l'intervalle $\langle x_0, \bar{x})$ était ouvert à droite.

Les deux cas suivants peuvent se présenter:

1. Il existe une limite $\lim\limits_{x\to\bar{x}-}\varphi(x) = \bar{y}$. Alors il résulte de la continuité de $u - v$ que la différence $u - v$ s'annule aussi au point $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y})$ et que $u_y(\bar{Q}) \neq v_y(\bar{Q})$ (d'après la remarque 3), donc le procédé du prolongement peut être continué.

2. $\varphi(x)$ pour $x \to \bar{x}-$ n'a pas limite à gauche. Alors il existe des limites: $\liminf\limits_{x\to\bar{x}-}\varphi(x) = c$ et $\limsup\limits_{x\to\bar{x}-}\varphi(x) = d$ $(c < d)$ telles que les deux points $\bar{Q}_1(\bar{x}, c)$ et $\bar{Q}_2(\bar{x}, d)$ devraient appartenir à $\bar{\varDelta}$, car dans le cas contraire la courbe Γ aboutirait à la face latérale de $\bar{\varDelta}$, donc elle arriverait à la frontière de $\bar{\varDelta}$ déjà avant d'atteindre $\bar{x}$.

Il résulterait alors de l'existence des limites précédentes, ainsi que de la continuité des fonctions φ et $u - v$ et de l'égalité $u(x, \varphi(x)) = v(x, \varphi(x))$ dans l'intervalle $\langle x_0, \bar{x})$, que l'égalité $u - v = 0$ aurait aussi lieu sur le segment $\bar{l} = \{x = \bar{x};\ y \in \langle c, d\rangle\}$. De là il s'ensuit, tout pareillement comme dans le cas 3° du théorème 1, qu'on aurait aussi l'égalité $u_y - v_y = 0$ sur ce segment ($c < d$). D'autre part, le long de courbes C issues de ce segment il y aurait aussi égalité entre les intégrales u et v de même qu'entre leurs dérivées u_y et v_y. Mais comme les courbes C passent par le segment $\bar{K}$ on arriverait aussitôt à une contradiction avec l'hypothèse (β) du théorème 2, qui est aussi contenue parmi les conditions du théorème 3.

On voit donc, d'après les considérations précédentes, que la courbe Γ peut être prolongée de la frontière à la frontière de $\bar{\Delta}$ et qu'elle remplit les conditions (δ) et (ε) du théorème 2. On peut aussi, en particulier, facilement montrer que pour les points qui bornent la courbe Γ et appartiennent à la frontière de $\bar{\Delta}$ les conditions de l'hypothèse (δ) du théorème 2 sont aussi remplies, car en ces points on a aussi $\frac{\partial(u-v)}{\partial y} \neq 0$. Il en résulte que la conclusion du théorème 3 découle de celle du théorème 2.

Remarque 5. Si l'on menait à partir du point $Q_1^0(x_0, y_1)$ des segments situés à l'intérieur de (2) et parallèles à ceux de la face latérale de l'ensemble (2), la courbe Γ ne pourrait avoir avec ces segments d'autres points communs que Q_1^0. Cela résulte presque immédiatement de l'application du lemme 2. On voit donc qu'il suffit de supposer dans le théorème 3 la continuité des dérivées u_y et v_y uniquement dans l'ensemble Z composé de la somme d'un voisinage du point Q_1^0 et des ensembles appartenant à (2) et contenus entre les segments issus du point Q_1^0, parallèles aux segments de la face latérale de l'ensemble (2).

Remarque 6. Si à l'intérieur du segment K il existait n points tels que Q_1^0 et si l'on supposait que les signes de $\frac{\partial(u-v)}{\partial y}$ étaient contraires aux points voisins et si l'on avait des inégalités fortes sur les segments entre ces points ou bien entre ces points et les points limites de K, les mêmes inégalités auraient lieu dans les ensembles déterminés par les courbes Γ_i ($i = 1, \ldots, n$) issues de ces points.

Il est évident que deux courbes voisines Γ_i et Γ_{i+1} ne pourraient avoir de points communs dans $\bar{\Delta}$, quel que soit $i = 1, \ldots, n-1$, puisque cela serait incompatible avec leur unicité, qui résulte de ce que l'on a, le long de chaque courbe Γ_i, $\frac{\partial(u-v)}{\partial y} \neq 0$. Si l'on supposait encore l'égalité $u = v$ aux points limites de $\bar{K}$, ces deux points limites s'ajouteraient aux points précédente des courbes Γ_i, pour lesquels $u = v$, ce qui résulte du lemme 2.

On aurait un cas tout à fait pareil à celui de la remarque 6 si les dérivées u_y et v_y étaient égales en quelques uns de ces points. On pourrait aussi s'occuper de la recherche d'autres propriétés de la courbe Γ.

Travaux cités

[1] W. Pawelski, *Remarques sur des inégalités mixtes entre les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), p. 309-326.

[2] J. Szarski, *Sur certaines inégalités entre les intégrales des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. 22 (1949), p. 1-34.

Reçu par la Rédaction le 1. 2. 1962