ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLI (1983)

Schéma explicite des différences finies pour un système d'équations non linéaires du type parabolique avec des conditions aux limites non linéaires

par Marian Malec (Cracovie)

Résumé. On considère une méthode des différences finies pour un système d'équations non linéaires partielles paraboliques aux dérivées mixtes et avec des conditions aux limites non linéaires.

On démontre, sous certaines conditions, que cette méthode est convergente. On évalue aussi l'erreur de la méthode proposée.

1. On expose dans la présente note une méthode de solution approchée d'un système d'équations non linéaires du type parabolique aux dérivées mixtes basée sur les différences finies. Le problème différentiel est considéré dans un cube à n dimensions, les conditions aux limites étant non linéaires et embrassant pratiquement de nombreuses concrétisations du processus d'échange de masse ou de chaleur comme p.ex. celui qui résulte de la loi de Stefan–Boltzmann. Le caractère parabolique des équations différentielles étudiées dans cette note est garanti par la domination de la diagonale principale de la matrice correspondante.

La méthode des différences finies proposée pour le problème différentiel

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_0} = f_l\left(x, u, \frac{\partial u_l}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right) \quad (l = 1, \ldots, m), \tag{1.1}$$

$$u_l(x) = \varphi_l(x) \quad \text{pour } x_0 = 0 \ (l = 1, \ldots, m), \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x) &= \varphi_{li}(x, u) \quad \text{pour } x_i = 0 \\ \frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x) &= \psi_{li}(x, u) \quad \text{pour } x_i = X \end{aligned}\right\} \quad (l = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

où $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in [0, T] \times [0, X]^n$, $u = u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_m(x)\}$,

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right\}, \quad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

est convergente et on donne une estimation de l'erreur de cette méthode approchée. La démonstration du théorème relatif à la convergence de la méthode des différences finies s'appuie sur les faibles inégalités aux différences finies que j'ai démontrées dans([1]). L'estimation de l'erreur de la méthode approchée est optimale pour la „technique" de la démonstration utilisée ici, ce qui ne veut pas dire qu'elle le soit en général.

2. Considérons dans l'espace euclidien à $1+n$ dimensions R^{1+n} un ensemble de points nodaux ayant les coordonnées

$$x_0^{m_0} = m_0 k, \quad x_i^{m_i} = m_i h \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

où $m_0 = 0, 1, \ldots, N_0$, $m_i = 0, 1, \ldots, N$ $(i = 1, \ldots, n)$, $0 < k = T/N_0$, $0 < h = X/N$, N_0 et N sont des nombres naturels.

Désignons le point nodal $(x_0^{m_0}, x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n})$ par x^M, où $M = (m_0, m_1, \ldots, m_n)$.

On introduit les ensembles de multi-indices suivants:

$$\begin{aligned} Z &= \{M\colon 0 \leqslant m_0 \leqslant N_0,\ 0 \leqslant m_j \leqslant N,\ j = 1, \ldots, n\}, \\ Z_0 &= \{M\colon 0 \leqslant m_0 \leqslant N_0-1,\ 1 \leqslant m_j \leqslant N-1,\ j = 1, \ldots, n\}, \\ Z_{1i} &= \{M \in Z\colon 1 \leqslant m_0 \leqslant N_0,\ m_i = 0, \\ &\qquad (0 < j < i) \Rightarrow (m_j \neq 0,\ m_j \neq N)\}, \\ Z_{2i} &= \{M \in Z\colon 1 \leqslant m_0 \leqslant N_0,\ m_i = N, \\ &\qquad (0 < j < i) \Rightarrow (m_j \neq 0,\ m_j \neq N)\} \\ &\qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Considérons aussi les points nodaux engendrés par les suites de multi-indices:

$$\begin{aligned} O(M) &= (m_0+1, m_1, \ldots, m_n) && \text{pour } M \in Z_0, \\ i(M) &= (m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i+1, m_{i+1}, \ldots, m_n) && \text{pour } M \in Z_0 \cup Z_{1i}, \\ -i(M) &= (m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i-1, m_{i+1}, \ldots, m_n) && \text{pour } M \in Z_0 \cup Z_{2i} \\ &&& (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2.3}$$

On suppose qu'à chaque $M \in Z$ correspond un système de nombres réels

$$v^M = (v_1^M, \ldots, v_m^M) \tag{2.4}$$

([1]) M. Malec, *Un analogue aux différences finies des inégalités différentielles faibles du type parabolique avec des conditions aux limites non linéaires*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), p. 681–687.

et on admet que

$$v_l^{MO-} = \frac{1}{k}(v_l^{O(M)} - v_l^M),$$

$$v_l^{Mi} = \frac{1}{2h}(v_l^{i(M)} - v_l^{-i(M)}),$$

(2.5) $$v_l^{-Mij} = \frac{1}{2h^2}(v_l^{i(M)} + v_l^{j(M)} + v_l^{-i(M)} + v_l^{-j(M)} - 2v_l^M - v_l^{i(-j(M))} - v_l^{-i(j(M))}),$$

$$v_l^{+Mij} = \frac{1}{2h^2}(-v_l^{i(M)} - v_l^{j(M)} - v_l^{-i(M)} - v_l^{-j(M)} + 2v_l^M + v_l^{i(j(M))} + v_l^{-i(-j(M))}).$$

$$(M \in Z_0;\ l = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n),$$

(2.6) $$\begin{aligned} v_l^{Mi-} &= \frac{1}{h}(v_l^{i(M)} - v_l^M) \quad \text{pour } M \in Z_{1i}, \\ v_l^{-Mi} &= \frac{1}{h}(v_l^M - v_l^{-i(M)}) \quad \text{pour } M \in Z_{2i} \end{aligned}$$

$$(l = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n).$$

3. Hypothèses H. On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

(H_1) les fonctions scalaires $f_l(x, u, q, w)$ $(l = 1, \ldots, m)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $w = (w_{11}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nn})$ sont définies dans l'ensemble

(3.1) $$\Omega = [0, T) \times (0, X)^n \times R^{m+n+n^2} = E \times R^{m+n+n^2}$$

et satisfont aux égalités

(3.2) $$f_l(x, \bar{u}, \bar{q}, \bar{w}) - f_l(x, u, q, w) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{lp}(\bar{u}_p - u_p) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{li}(\bar{q}_i - q_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{lij}(\bar{w}_{ij} - w_{ij})$$

pour $l = 1, \ldots, m$, $x \in E$ et $\bar{u}$, $\bar{q}$, $\bar{w}$, u, q, w arbitraires où, en général, les coefficients α_{lp}, β_{li}, γ_{lij} $(l = 1, \ldots, m;\ p = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$ sont des fonctions scalaires et bornées des points de l'ensemble

(3.3) $$\omega = E \times R^{2(m+n+n^2)}$$

satisfaisant aux conditions:

(3.4) $$0 \leqslant \alpha_{lp} \quad (l \neq p), \qquad \sum_{p=1}^{n} \alpha_{lp} \leqslant L$$

$$(l = 1, \ldots, m;\ p = 1, \ldots, m;\ L > 0),$$

(3.5) $\gamma_{lij} = \gamma_{lji} \quad (l = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n),$

(3.6) pour des indices fixés l, i et j (où $1 \leqslant l \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$), la fonction γ_{lij} est toujours non négative ou bien toujours non positive dans l'ensemble ω;

(H_2) les fonctions scalaires $\varphi_{li}(x, u)$ et $\psi_{li}(x, u)$ ($l = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$) sont définies dans les ensembles $S_{1i} = \{(x, u)\colon x \in (0, T] \times [0, X]^n,\ x_i = 0,\ u \in R^m\}$ et $S_{2i} = \{(x, u)\colon x \in (0, T] \times [0, X]^n,\ x_i = X,\ u \in R^m\}$ respectivement, et satisfont aux égalités

$$\varphi_{li}(x, \bar{u}) - \varphi_{li}(x, u) = \sum_{p=1}^{m} \delta_{1lip}(\bar{u}_p - u_p) \quad \text{pour } (x, \bar{u}), (x, u) \in S_{1i},$$

(3.7)

$$\psi_{li}(x, \bar{u}) - \psi_{li}(x, u) = \sum_{p=1}^{m} \delta_{2lip}(\bar{u}_p - u_p) \quad \text{pour } (x, \bar{u}), (x, u) \in S_{2i}$$

$$(l = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n).$$

ou δ_{1lip} et δ_{2lip} ($l = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$; $p = 1, \ldots, m$) sont des fonctions scalaires et bornées des arguments x, $\bar{u}$, u et satisfont aux inégalités

$$\delta_{1lip} \leqslant 0, \quad \delta_{2lip} \geqslant 0 \quad (p \neq l),$$

(3.8)

$$0 < G \leqslant \sum_{p=1}^{m} \delta_{1lip}, \quad \sum_{p=1}^{m} \delta_{2lip} \leqslant -G,$$

où G est une constante et $l = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$; $p = 1, \ldots, m$;

(H_3) les fonctions scalaires $u_l(x)$ ($l = 1, \ldots, m$) sont de classe C^2 dans l'ensemble $[0, T] \times [0, X]^n$ et satisfont au problème différential (1.1)–(1.3);

(H_4) les pas h et k sont tels que

$$(3.9) \quad h^{-1}\Big(\gamma_{lii} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\gamma_{lij}|\Big) - \tfrac{1}{2}|\beta_{li}| \geqslant 0 \quad (l = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n),$$

$$(3.10) \quad 1 + k\alpha_{ll} - 2kh^{-2} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{lii} \geqslant 0 \quad (l = 1, \ldots, m),$$

$$(3.11) \quad 1 - h\delta_{1lil} \geqslant 0, \quad 1 + h\delta_{2lil} \geqslant 0 \quad (l = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n);$$

(H_5) les nombres v_l^M ($l = 1, \ldots, m$; $M \in Z$) satisfont au système d'équations aux différences finies

$$v_l^{M0-} = f_l(x^M, v^M, v_l^{MI}, v_l^{MIJ}) \qquad (M \in Z_0),$$

(3.12)

$$v_l^M = \varphi_l(x^M) \qquad (M \in Z,\ m_0 = 0),$$

$$v_l^{Mi-} = \varphi_{li}(x^M, v^{i(M)}) \qquad (M \in Z_{1i}),$$

$$v_l^{-Mi} = \psi_{li}(x^M, v^{-i(M)}) \qquad (M \in Z_{2i}),$$
$$(l = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n),$$

où

$$v_l^{MI} = (v_l^{M1}, \ldots, v_l^{Mn}), \quad v_l^{MIJ} = (v_l^{M11}, \ldots, v_l^{M1n}, \ldots, v_l^{Mn1}, \ldots, v^{Mnn}),$$

(3.13) $$v_l^{Mij} = \begin{cases} v_l^{-Mij} & \text{lorsque } i = j \text{ ou } \gamma_{lij} \leqslant 0, \\ v_l^{+Mij} & \text{lorsque } i \neq j \text{ et } \gamma_{lij} \geqslant 0 \end{cases}$$
$$(l = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$$

(voir (2.5)).

4. Notons que, les coefficients α_{lp}, β_{ll}, γ_{lij}, δ_{1lip}, σ_{2lip} étant bornés, on obtient à partir des équations (1.1) et (3.2) ainsi que de (1.3) et (3.7) (cf. aussi l'hypothèse (H_3)):

(4.1) $$u_l^{MO-} = f_l(x^M, u^M, u_l^{MI}, u_l^{MIJ}) + \eta_l^M \qquad (M \in Z_0,\ l = 1, \ldots, m),$$
$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0, \qquad \varepsilon(h) = \max_{1 \leqslant l \leqslant m} \{\max_{M \in Z_0} |\eta_l^M|\},$$

(4.2) $$u_l^{Mi-} = \varphi_{li}(x^M, u^{i(M)}) + \eta_{1li}^M \qquad (M \in Z_{1i},\ l = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n),$$
$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0, \qquad \varepsilon_1(h) = \max_{\substack{1 \leqslant l \leqslant m \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \{\max_{M \in Z_{1i}} |\eta_{1li}^M|\},$$

(4.3) $$u_l^{-Mi} = \psi_{li}(x^M, u^{-i(M)}) + \eta_{2li}^M \qquad (M \in Z_{2i},\ l = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n),$$
$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0, \qquad \varepsilon_2(h) = \max_{\substack{1 \leqslant l \leqslant m \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \{\max_{M \in Z_{2i}} |\eta_{2li}^M|\},$$

où $u^M = \{u_l^M\}_{l=1 \div m}$ désigne la valeur de la solution du problème différentiel (1.1)–(1.3) au point nodal x^M.

3. Théorème. *Supposons que les hypothèses* H *soient satisfaites et que*

(5.1) $$y_l^M = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^*(h)}{L}[(1+kL)^{m_0} - 1] + \dfrac{\bar{\varepsilon}(h)}{G} := z^{m_0} & \text{pour } M \in Z_0, \\ (1 - hG) z^{m_0} + h\bar{\varepsilon}(h) & \text{pour } M \in Z_{1i} \cup Z_{2i}\ (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$
$$(M \in Z,\ l = 1, \ldots, m).$$

où $\varepsilon^*(h) = \varepsilon(h) + L\bar{\varepsilon}(h)/G$, $\bar{\varepsilon}(h) = \max(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h))$.

Nous avons alors

(5.2) $$|r_l^M| \leqslant y_l^M \qquad (M \in Z,\ l = 1, \ldots, m)$$

où $r_l^M = u_l^M - v_l^M$ *et la méthode des différences finies* (3.12) *est convergente, c'est-à-dire que*

$$r_l^M \to 0 \quad \textit{lorsque } h \to 0 \quad (M \in Z,\ l = 1, \ldots, m). \tag{5.3}$$

Démonstration. Comme (5.3) résulte de (5.2), il suffit de démontrer (5.2). Soit $M \in Z_0$. Nous avons alors pour $l = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} r_l^{MO-} &= \eta_l^M + f_l(x^M, u^M, u_l^{MI}, u_l^{MIJ}) - f_l(x^M, v^M, v_l^{MI}, v_l^{MIJ}) \\ &\leqslant \varepsilon(h) + \sum_{p=1}^{m} \alpha_{lp} r_p^M + \sum_{i=1}^{n} \beta_{li} r_l^{Mi} + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{lij} r_l^{Mij}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Nous allons montrer que si $M \in Z_0$, on a

$$y_l^{MO-} \geqslant \varepsilon(h) + \sum_{p=1}^{m} \alpha_{lp} y_p^M + \sum_{i=1}^{n} \beta_{li} y_l^{Mi} + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{lij} y_l^{Mij} \qquad (l = 1, \ldots, m). \tag{5.5}$$

Notons que

$$\begin{aligned} &\varepsilon(h) + \sum_{p=1}^{m} \alpha_{lp} y_p^M + \sum_{i=1}^{n} \beta_{li} y_l^{Mi} + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{lij} y_l^{Mij} \\ &= \varepsilon(h) + \sum_{p=1}^{n} \alpha_{lp} y_p^M + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{h}\Big(\gamma_{lii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |\gamma_{lij}|\Big) + \tfrac{1}{2}\beta_{li} \right] \cdot (y_l^{i(M)} - y_l^M) + \\ &+ \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{h}\Big(\gamma_{lii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |\gamma_{lij}|\Big) - \tfrac{1}{2}\beta_{li} \right] \cdot (y_l^{-i(M)} - y_l^M) + \\ &+ \frac{1}{2h^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq 1}}^{n} |\gamma_{lij}| \cdot [(y_l^{i(s(l;i,j)j(M))} - y_l^M) + (y_l^{-i(-s(l;i,j)j(M))} - y_l^M)], \end{aligned} \tag{5.6}$$

où

$$s(l;\, i, j) = \begin{cases} +1 & \text{lorsque } \gamma_{lij} \geqslant 0, \\ -1 & \text{lorsque } \gamma_{lij} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (l = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n) \tag{5.7}$$

(voir (3.6)).

Il résulte cependant de la définition (5.1) que si $M \in Z_0$, on obtient

$$\begin{aligned} &y_l^{i(M)} - y_l^M \leqslant 0, \quad y_l^{-i(M)} - y_l^M \leqslant 0, \quad y_l^{i(s(l;i,j)j(M))} - y_l^M \leqslant 0, \\ &y_l^{-i(-s(l;i,j)j(M))} - y_l^M \leqslant 0 \quad (l = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{5.8}$$

et

$$\varepsilon(h) + Ly_l^M = y_l^{MO-} \quad (l = 1, \ldots, m). \tag{5.9}$$

Tenant compte de (5.6), (5.8), (5.9) ainsi que des hypothèses (3.4) et (3.9) on obtient directement l'inégalité (5.5).

Posons maintenant que $M \in Z_{1i}$ pour un certain i ($1 \leqslant i \leqslant n$). Dans ce cas

$$(5.10)\qquad r_l^{Mi-} = \eta_{1li}^M + \varphi_{li}(x^M, u^{i(M)}) - \varphi_{li}(x^M, v^{i(M)}) \geqslant -\bar{\varepsilon}(h) + \sum_{p=1}^{m} \delta_{1lip} r_p^{i(M)} \qquad (l = 1, \ldots, m).$$

Nous démontrerons que si $M \in Z_{1i}$, alors

$$(5.11)\qquad y_l^{Mi-} \leqslant -\bar{\varepsilon}(h) + \sum_{p=1}^{m} \delta_{1lip} y_p^{i(M)} \qquad (l = 1, \ldots, m).$$

En effet si $M \in Z_{1i}$ on obtient à partir de (5.1) et (3.8),

$$(5.12)\qquad y_l^{Mi-} = \frac{1}{h}(y_l^{i(M)} - y_l^M) = \frac{1}{h}\{y_l^{i(M)} - [(1-hG)z^{m_0} + h\cdot\bar{\varepsilon}(h)]\}$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\{y_l^{i(M)} - [(1-hG)y_l^{i(M)} + h\cdot\bar{\varepsilon}(h)]\}$$

$$= Gy_l^{i(M)} - \bar{\varepsilon}(h) \leqslant -\bar{\varepsilon}(h) + \sum_{p=1}^{m} \delta_{1lip} y_l^{i(M)}.$$

D'une façon tout à fait semblable on peut démontrer que si pour un certain i ($1 \leqslant i \leqslant n$), $M \in Z_{2i}$, alors

$$(5.13)\qquad r_l^{-Mi} \leqslant \bar{\varepsilon}(h) + \sum_{p=1}^{m} \delta_{2lip} r_p^{-i(M)}, \qquad y_l^{-Mi} \geqslant \bar{\varepsilon}(h) + \sum_{p=1}^{m} \delta_{2lip} y_p^{-i(M)} \qquad (l = 1, \ldots, m).$$

Il résulte des inégalités (5.4), (5.5), (5.10) et (5.13) que

$$(5.14)\qquad r_l^M \leqslant y_l^M \quad \text{pour } M \in Z \ (l = 1, \ldots, m)$$

(cf. Remarque 2 dans M. Malec ([1])).

Remarquons ensuite que des inégalités (5.5), (5.11), (5.13) résultent suivantes:

$$(5.15)\qquad (-y_l^M)^{0-} \leqslant -\varepsilon(h) + \sum_{p=1}^{n} \alpha_{lp}(-y_p^M) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{li}(-y_l^M)^i + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{lij}(-y_l^M)^{ij} \quad \text{pour } M \in Z_0,$$

$$(5.16)\qquad (-y_l^M)^{i-} \geqslant \bar{\varepsilon}(h) + \sum_{p=1}^{m} \delta_{1lip}(-y_p^{i(M)}) \quad \text{pour } M \in Z_{1i},$$

$$(5.17)\qquad (-y_l^M)^{-i} \leqslant -\bar{\varepsilon}(h) + \sum_{p=1}^{m} \delta_{2lip}(-y_p^{-i(M)}) \quad \text{pour } M \in Z_{2i}$$

$$(l = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n).$$

Il est aisé de constater que

$$(5.18)\qquad r_l^{MO-} \geqslant -\varepsilon(h)+\sum_{p=1}^{m}\alpha_{lp}r_p^M+\sum_{i=1}^{n}\beta_{li}r_l^{Mi}+\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{lij}r_l^{Mij}\quad \text{pour } M\in Z_0,$$

$$(5.19)\qquad r_l^{Mi-} \leqslant \bar{\varepsilon}(h)+\sum_{p=1}^{m}\delta_{1lip}r_p^{i(M)}\quad \text{pour } M\in Z_{1i},$$

$$(5.20)\qquad r_l^{-Mi} \geqslant -\bar{\varepsilon}(h)+\sum_{p=1}^{m}\delta_{2lip}r_p^{-i(M)}\quad \text{pour } M\in Z_{2i}$$

$$(l=1,\ldots,m,\ i=1,\ldots,n).$$

En profitant une fois de plus de la remarque 2 dans Malec ([1]) et en tenant compte de (5.15)–(5.20), on obtient

$$(5.21)\qquad -y_l^M \leqslant r_l^M\quad \text{pour } M\in Z \text{ et } l=1,\ldots,p.$$

De (5.14) et (5.21) on déduit (5.2), ce qui termine la démonstration du théorème.

Reçu par la Rédaction le 11.12.1978