ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVII (1965)

Pseudoobjets géométriques

par E. Siwek (Katowice)

§ 1. Introduction. En utilisant la notion d'espace fibré, J. Haantjes et G. Laman [5] ont généralisé la notion d'objet géométrique (introduite en 1934 par A. Wundheiler [10]). La définition „moderne" (celle de J. Haantjes et G. Laman) admet pour l'ensemble des valeurs (le fibre) d'objet géométrique un espace topologique arbitraire, pendant que, la définition „classique" (celle de A. Wundheiler) le suppose être un domaine d'espace R^m. Le profit de la définition classique est la possibilité de traiter des objets géométriques par la méthode analytique pendant que pour la définition moderne la plus convenable méthode est celle algébrique.

En comparant ces deux définitions, M. Kucharzewski et M. Kuczma ont porté [6] dans la notion classique d'objet géométrique certaines nouvelles idées. Dans la note présente nous allons modifier la notion classique d'objet géométrique (ayant égard aux idées mentionnées ci-dessus) en vue de la faire applicable aux cas, où l'ensemble des valeurs d'objet géométrique n'est pas un domaine de R^m (p. ex. l'objet de Penzov et les analogues pour lesquels la définition classique n'est pas exacte (voir [7], § 7).

La conception principale utilisée dans la note est celle d'admettre pour des valeurs d'objet géométrique des classes des points de R^m équivalents par rapport à une rélation. W. W. Wagner ([9], § 6) mit en avant une idée pareille (à savoir celle de considérer des objets multivalents) mais elle n'est pas suffisamment développée. La notion de pseudoobjet géométrique définie dans la suite peut être régardé aussi comme une généralisation de la notion de „pseudoquantité" (voir [4] et [8]) c'est ce qu'explique la terminologie.

§ 2. Définitions fundamentales. Soit E une équivalence (rélation réflexive, symétrique et transitive) définie dans $X \subset R^m$ et $\mathbf{X} \overset{\mathrm{df}}{=} X/E$. Désignons par Σ un ensemble des systèmes locaux des coordonnées dans un point π d'une variété différentiable V^n admissibles par rapport à un pseudogroupe G des transformations des coordonnées [1].

---

[1] Quant aux notions qui ne sont pas définies dans la note voir p. ex. [1] et [7].

Nous prenons des définitions suivantes:

Définition I. On appele *pseudoobjet d'espèce* (m, E) dans un point π de V^n rélatif au pseudogroupe G toute application $\boldsymbol{\omega}$: $\sigma \to \boldsymbol{x}$ définie dans Σ et prenant des valeurs dans $\boldsymbol{X}$.

Définition II. Un pseudoobjet d'espèce (m, E) est dit *géométrique* s'il existe une fonction Φ telle que l'on ait:

$$\boldsymbol{\omega}(\sigma') = \Phi[\boldsymbol{\omega}(\sigma), T_{\sigma,\sigma'}] \tag{1}$$

pour toute couple $(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma$, où $T_{\sigma,\sigma'} \in G$ dénote la transformation des coordonnées du système σ au système σ'.

D'après l'univalence de l'application $\boldsymbol{\omega}$ la fonction $\Phi(\boldsymbol{x}, T)$ doit satisfaire aux conditions suivantes:

$$\Phi[\Phi(\boldsymbol{\omega}(\sigma), T_{\sigma,\sigma'}), T_{\sigma',\sigma''}] = \Phi(\boldsymbol{\omega}(\sigma), T_{\sigma,\sigma''}) , \tag{2}$$

$$\Phi(\boldsymbol{\omega}(\sigma), T_{\sigma,\sigma}) = \boldsymbol{\omega}(\sigma) \tag{3}$$

pour tout $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \Sigma$.

La variété V^n étant différentiable de classe C^r, nous supposons le pseudogroupe G (noté aussi par G_r) composé des toutes les transformations de la forme:

$$\xi^{\lambda'} = f^{\lambda'}(\xi^\lambda) \qquad (\lambda = 1, \ldots, n;\ \lambda' = 1', \ldots, n') ,$$

où les fonctions $f^{\lambda'}$ sont de classe C^r dans un ouverte contenant les coordonnées $\overset{\circ}{\xi}{}^\lambda$ du point π et on a:

$$\operatorname{Det} \left\| \frac{\partial f^{\lambda'}(\overset{\circ}{\xi}{}^\lambda)}{\partial \xi^\lambda} \right\| \neq 0 .$$

On peut alors attacher au pseudogroupe G un groupe $\mathfrak{L}_n^r$ par l'exigence que l'application:

$$\{f^{\lambda'}\} \to a = \left\{ \frac{\partial f^{\lambda'}(\overset{\circ}{\xi}{}^\lambda)}{\partial \xi^{\lambda_1}}, \frac{\partial^2 f^{\lambda'}(\overset{\circ}{\xi}{}^\lambda)}{\partial \xi^{\lambda_1}\partial \xi^{\lambda_2}}, \ldots, \frac{\partial^r f^{\lambda'}(\overset{\circ}{\xi}{}^\lambda)}{\partial \xi^{\lambda_1}, \ldots, \partial \xi^{\lambda_r}} \right\} \qquad \begin{matrix} (\lambda' = 1', \ldots, n'; \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r = 1, \ldots, n) \end{matrix}$$

soit homomorphisme.

Définition III. Dans le cas où la fonction Φ ne dépend que de $\boldsymbol{x}$ et des paramètres $a \in \mathfrak{L}_n^r$ correspondants à la transformation $T \in G$, pseudoobjet géométrique $\boldsymbol{\omega}$ est dit *différentiel de classe r*.

On suppose ici la fonction Φ définie dans tout produit cartesien $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\omega}} \times \mathfrak{L}_n^r$ où $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\omega}} \overset{\mathrm{df}}{=} \boldsymbol{\omega}(\Sigma)$.

Pour un pseudoobjet géométrique différentiel les rélations (1), (2) et (3) prennent la forme suivante:

$$\boldsymbol{\omega}(\sigma') = \Phi[\boldsymbol{\omega}(\sigma), a] , \tag{4}$$

$$\Phi[\Phi(\boldsymbol{x}, a_1), a_2] = \Phi(\boldsymbol{x}, a_2 a_1) , \tag{5}$$

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \iota) = \boldsymbol{x} , \tag{6}$$

où ι dénote l'unité du groupe $\mathfrak{L}_n^r$ c'est-à-dire les paramètres de la forme $\iota = \{\delta_\lambda^{\lambda'}, 0, \ldots, 0\}$.

Dans la suite nous ne considérons que des pseudoobjets géométriques différentiels, appelés simplement: pseudoobjets.

DÉFINITION IV ([2]). Ensemble $\boldsymbol{\Omega}$ des pseudoobjets $\boldsymbol{\omega}$ définis par la relation (4), où la fonction $\Phi(\boldsymbol{x}, a)$ est définie dans un $\boldsymbol{X} \times \mathfrak{L}_n^r$ satisfaisant là aux conditions (5) et (6) et l'ensemble $\boldsymbol{X}$ jouissant de la propriété:

$$(7) \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \to \Phi(\boldsymbol{x}, a) \in \boldsymbol{X} \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{L}_n^r$$

s'appele *pseudoobjet abstrait*. On appelle la fonction Φ *la loi de transformation* et l'ensemble $\boldsymbol{X}$ *le fibre* du pseudoobjet $\boldsymbol{\Omega}$ (voir [6] et [7]).

La loi de transformation Φ peut être considéré comme un homomorphisme du groupe $\mathfrak{L}_n^r$ sur un groupe $\mathcal{H}_\Omega$ de transformations du fibre $\boldsymbol{X}$. Dans le cas où le groupe $\mathcal{H}_\Omega$ est transitif dans $\boldsymbol{X}$ le pseudoobjet abstrait $\boldsymbol{\Omega}$ est dit aussi transitif. Dans le cas contraire on peut faire, en vertu de (7), la décomposition:

$$\boldsymbol{X} = \bigcup_\varkappa \boldsymbol{X}_\varkappa$$

du fibre $\boldsymbol{X}$ en domaines de transitivité par rapport au groupe $\mathcal{H}_\Omega$. Naturellement il doit être $\boldsymbol{X}_\varkappa \cap \boldsymbol{X}_{\varkappa'} = 0$ pour $\varkappa \neq \varkappa'$. Par conséquent, le pseudoobjet $\boldsymbol{\Omega}$ se décompose aussi en pseudoobjets transitifs $\boldsymbol{\Omega}_\varkappa$ correspondants aux fibres $\boldsymbol{X}_\varkappa$.

Remarquons que tout pseudoobjet particulier $\boldsymbol{\omega}$ appartenant à $\boldsymbol{\Omega}$ détermine un pseudoobjet abstrait transitif $\boldsymbol{\Omega}_\varkappa$. En effet, posons $\boldsymbol{X}_\varkappa \overset{\mathrm{df}}{=} \boldsymbol{\omega}(\Sigma)$ alors pour chaque couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ des points de $\boldsymbol{X}_\varkappa$ on a:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega}(\sigma_1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\omega}(\sigma_2)\,,$$

où σ_1 et σ_2 sont deux systèmes des coordonnées admissibles par rapport au pseudogroupe G. Il existe alors une transformation $T \in G$ du système σ_1 en σ_2 et, par conséquent, on a:

$$\boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x}, a)\,,$$

où $a \in \mathfrak{L}_n^r$ dénote les paramètres correspondant à T. Ça signifie que $\boldsymbol{X}_\varkappa$ est un fibre transitif (c'est-à-dire un domaine de transitivité du groupe $\mathcal{H}_\Omega$) alors pseudoobjet abstrait:

$$\boldsymbol{\Omega}_\varkappa \overset{\mathrm{df}}{=} \{\boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega} \text{ et } \boldsymbol{\omega}(\Sigma) = \boldsymbol{X}_\varkappa\}$$

est transitif.

Soient $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{\Omega}^*$ deux pseudoobjets d'espèce respectivement (m, E) et (m^*, E^*), ayant comme fibres $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}^*$ et avec les lois de transformation Φ et Φ^*.

([2]) Dans le cas où l'équivalence E se réduit à l'égalité les définitions I-IV coïncident avec celles des objets géométriques (voir [7]).

DÉFINITION V. Les pseudoobjets Ω et Ω^* sont dites *équivalents* s'il existe une application invertible θ de X sur X^* telle que l'on ait:

$$\Phi^*[\theta(x), a] = \theta[\Phi(x, a)] . \tag{8}$$

COROLLAIRE. D'après la définition, les groupes $\mathcal{K}_\Omega$ et $\mathcal{K}_{\Omega^*}$ correspondants aux pseudoobjets Ω et Ω^* sont isomorphes donc les fibres transitifs sont invariants par rapport à θ et par suite l'application θ établie une correspondance biunivoque parmi les fibres transitifs des pseudoobjets équivalents.

§ 3. Rapport aux objets géométriques. Nous allons maintenant examiner quelques rélations parmi des pseudoobjets d'espèce (m, E) et des objets à m composantes.

Dans ce but supposons l'équivalence E définie dans un ensemble $X \subset R^m$ et telle qu'il existe pour toute couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ des éléments d'ensemble quotien $\boldsymbol{X} = X/E$ une bijection de $\boldsymbol{x}$ sur $\boldsymbol{y}$. L'équivalence E jouissante de cette propriété sera dite *uniforme* dans X.

Fixons $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{X}$. En utilisant l'axiome de choix nous pouvons attacher à chaque $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ une seule bijection $b_{\boldsymbol{x}}$ de $\boldsymbol{x}_0$ sur $\boldsymbol{x}$ d'une telle manière que $b_{\boldsymbol{x}_0}$ soit identité dans $\boldsymbol{x}_0$. Posons:

$$B \overset{\text{df}}{=} \{b\colon\ b = b_{\boldsymbol{y}} b_{\boldsymbol{x}}^{-1},\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}\} . \tag{9}$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble B ne dépend que d'application: $\boldsymbol{x} \to b_{\boldsymbol{x}}$ (il ne dépend pas de choix de $\boldsymbol{x}_0$) et qu'il est un groupoïde au sens de H. Brandt (pour la définition voir p. ex. [1] et [7]). En particulier l'ensemble B satisfait aux conditions suivantes:

(i) pour toute couple $(x, y) \in X \times X$ il ne contient qu'une seule bijection $b_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}$ de $\boldsymbol{x}$ sur $\boldsymbol{y}$;

(ii) $b_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}$ est l'identité dans $\boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$;

(iii) pour tout $b \in B$ l'application inverse b^{-1} appartient à B;

(iv) $b_{\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}} b_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} = b_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}}$ pour $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{X}$.

Il en résulte que la rélation C_B, définie dans X par la condition:

$$(x, y) \in C_B \to \exists_{b \in B}\big(y = b(x)\big) , \tag{10}$$

est une équivalence.

Désignons par $\boldsymbol{x}$ et $\langle x \rangle$ des classes des points de X équivalents à x réspectivement par rapport à E et C_B. D'abord nous montrerons le

LEMME. *Pour tout couple (x, y) des points de X l'ensemble $\boldsymbol{x} \cap \langle y \rangle$ est composé d'un seul point de X.*

Démonstration. Soit $x, y \in X$, alors il existe une seule bijection $b_{\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}} \in B$ de $\boldsymbol{y}$ sur $\boldsymbol{x}$ et, par conséquent, $\tilde{x} = b_{\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}}(y)$ est un point unique appartenant à $\boldsymbol{x}$ et équivalent à $\boldsymbol{y}$ par rapport à C_B. On a donc $\boldsymbol{x} \cap \langle y \rangle = \tilde{x}$ et notre lemme se trouve démontré.

Prenons la définition suivante: Objet géométrique abstrait dont la loi de transformation F satisfait à la condition:

$$(11) \qquad (x, x') \in E \Rightarrow \big(F(x, a), F(x', a)\big) \in E \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{L}_n^r$$

est dit *compatible avec équivalence E*.

Maintenant nous pouvons montrer le

THÉORÈME 1. *Pour qu'il existe un pseudoobjet abstrait $\boldsymbol{\Omega}$ d'espèce (m, E) et ayant comme fibre $\mathbf{X} = X/E$ il faut et il suffit qu'il existe un objet géométrique abstrait à m composantes ayant comme fibre X et compatible avec l'équivalence E.*

Démonstration. Nécessité: Soit Φ la loi de transformation du pseudoobjet $\boldsymbol{\Omega}$. D'après notre lemme nous pouvons définir la fonction F par la formule:

$$(12) \qquad F(x, a) \stackrel{\text{df}}{=} \Phi(\boldsymbol{x}, a) \cap \langle x \rangle .$$

Comme la fonction Φ est définie dans $\mathbf{X} \times \mathfrak{L}_n^r$ et $\langle x \rangle$ pour tout $x \in X$, la fonction F est définie dans $X \times \mathfrak{L}_n^r$ et satisfait là (en vertu de (12)) aux conditions (11) et

$$(13) \qquad F(x, \iota) = x .$$

Posons $y = F(x, a_1)$ alors, d'après (12), on a:

$$F[F(x, a_1), a_2] = F[\Phi(\boldsymbol{x}, a_1) \cap \langle x \rangle, a_2] = \Phi(\boldsymbol{y}, a_2) \cap \langle y \rangle$$

et

$$\boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x}, a_1) .$$

En vertu de (5) nous obtenons d'ici:

$$F[F(x, a_1), a_2] = \Phi[\Phi(\boldsymbol{x}, a_1), a_2] \cap \langle y \rangle = \Phi(\boldsymbol{x}, a_2 a_1) \cap \langle y \rangle .$$

Parce que $y = F(x, a_1) \in \langle x \rangle$ on a $\langle y \rangle = \langle x \rangle$ et par conséquent:

$$(14) \qquad F[F(x, a_1), a_2] = F(x, a_2 a_1) .$$

Comme la fonction F satisfait aux conditions (11), (13) et (14) elle est la loi de transformation d'un objet géométrique abstrait avec le fibre X et compatible avec E.

Suffisance: Soit Ω un objet géométrique abstrait à m composantes avec le fibre X et avec la loi de transformation F. Posons:

$$(15) \qquad \Phi(\boldsymbol{x}, a) = \{y \colon \; y = F(x, a), x \in \boldsymbol{x}\} .$$

Comme F doit satisfaire aux conditions (11), (13) et (14) la fonction Φ est définie dans $X \times \mathfrak{L}_n^r$, prend ses valeurs dans $\mathbf{X}$ (en vertu de (11)) et satisfait aux conditions (5) et (6) (en vertu de (13) et (14)). Donc elle détermine un pseudoobjet d'espèce (m, E) avec le fibre $\mathbf{X}$. Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Soient $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{\Omega}^*$ deux pseudoobjets abstraits d'espèce réspectivement (m, E) et (m^*, E^*). Désignons par Φ et Φ^* les lois de transformation et par

$$\mathbf{X} = X/E \qquad (\text{où } X \subset R^m)$$

et

$$\mathbf{X}^* = X^*/E^* \qquad (\text{où } X^* \subset R^{m^*})$$

les fibres correspondants réspectivement aux pseudoobjets $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{\Omega}^*$. Supposons, qu'ils existent des elements $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{X}$ et $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbf{X}^*$ admettant une bijection χ de $\boldsymbol{x}_0$ sur $\boldsymbol{\xi}_0$ et que les équivalences E et E^* sont uniformes respectivement dans X et X^*. Sous ces suppositions nous allons montrer le

Théorème 2. *Les objets géométriques abstraits Ω et Ω^* correspondants par la formule* (12) *aux pseudoobjets $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{\Omega}^*$ équivalents sont aussi équivalents indépendemment du choix des groupoïdes de la forme* (9) *intervenant dans la formule* (12).

Démonstration. Désignons par B et B^* deux groupoïdes de la forme (9) définis respectivement sur les fibres $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}^*$. Comme les psudoobjets $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{\Omega}^*$ sont équivalents il existe une application biunivoque θ de $\mathbf{X}$ sur $\mathbf{X}^*$ satisfaisant aux conditions (8). Définissons maintenant l'application h par la formule:

$$h(x) = \{\chi(\langle x\rangle \frown \boldsymbol{x}_0)\} \frown \theta(\boldsymbol{x}) ,$$

où $\{\xi\}$ dénote la classe des points de X^* équivalents à ξ par rapport à l'équivalence C_{B^*} de la forme (10). En utilisant notre lemme il est facile de vérifier que pour tout $\xi \in X^*$ on a $h(x) = \xi$ où x s'exprime par la formule suivante:

$$x = \langle \chi^{-1}(\{\xi\} \frown \boldsymbol{\xi}_0)\rangle \frown \theta^{-1}(\boldsymbol{\xi}) .$$

L'application h transforme donc X sur X^* tout entier. Pour montrer que h est aussi une application invertible posons $x_1 \neq x_2$.

Dans le cas: $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ on a

$$\theta(\boldsymbol{x}_1) \frown \theta(\boldsymbol{x}_2) = 0$$

et par suite $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Dans le cas où $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ doit être (d'après notre lemme):

$$\langle x_1\rangle \neq \langle x_2\rangle$$

donc aussi:

$$\chi(\langle x_1\rangle \frown \boldsymbol{x}_0) \neq \chi(\langle x_2\rangle \frown \boldsymbol{x}_0) .$$

Les membres de cette inégalité, étant les points de X^* appartenant à la même classe $\boldsymbol{\xi}_0$, doivent satisfaire, en vertu du notre lemme, à la condition:

$$\{\chi(\langle x_1\rangle \frown \boldsymbol{x}_0)\} \frown \{\chi(\langle x_2\rangle \frown \boldsymbol{x}_0)\} = 0 ,$$

qui entraine l'inégalîté $h(x_1) \neq h(x_2)$. L'application h est donc invertible.

Soit $F(x, a)$ définie par la formule (12) et $F^*(\xi, a)$ par la formule toute analogue:

$$F^*(\xi, a) = \Phi^*(\boldsymbol{\xi}, a) \frown \{\xi\} .$$

Il reste à montrer que l'application h satisfait à la condition:

$$F^*[h(x), a] = h[F(x, a)] \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{L}_n^r . \tag{16}$$

En utilisant les formules définissant l'application h et la fonction F^* nous obtenons:

$$\begin{aligned} F^*[h(x), a] &= F^*[\{\chi(\langle x\rangle \frown \boldsymbol{x}_0)\} \frown \theta(\boldsymbol{x}), a] \\ &= \Phi^*[\theta(\boldsymbol{x}), a] \frown \{(\chi\langle x\rangle \frown \boldsymbol{x}_0)\} . \end{aligned}$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} h[F(x, a)] &= h[\Phi(\boldsymbol{x}, a) \frown \langle x\rangle] \\ &= \{\chi[\langle\Phi(\boldsymbol{x}, a) \frown \langle x\rangle\rangle \frown \boldsymbol{x}_0]\} \frown \theta[\Phi(\boldsymbol{x}, a)] \\ &= \theta[\Phi(\boldsymbol{x}, a)] \frown \{(\chi\langle x\rangle \frown \boldsymbol{x}_0)\} . \end{aligned}$$

Comme l'application θ satisfait à la condition (8) les expressions obtenues sont égales et, par conséquent, la condition (16) est remplie. Le théorème se trouve ainsi démontré.

THÉORÈME 3. *Les pseudoobjets correspondants par la formule* (15) *aux objets équivalents sont aussi équivalents.*

Démonstration. Soient F, F^*, et X, X^* respectivement les lois de transformation et les fibres des objets équivalents. En vertu de la définition V il existe une application invertible h de X sur X^* jouissant de la propriété (16). Étant définie dans X une équivalence E l'application h induit dans X^* l'équivalence E^* déterminée par la condition

$$(\xi, \xi') \in E^* \Longleftrightarrow \big(h^{-1}(\xi), h^{-1}(\xi')\big) \in E$$

et de même, une application invertible $\boldsymbol{\xi} = \theta(\boldsymbol{x})$ de $\mathbf{X}$ sur $\mathbf{X}^* \overset{\text{df}}{=} X^*/E^*$, définie par la formule:

$$\theta(\boldsymbol{x}) \overset{\text{df}}{=} \{\xi \in X^*\colon\ \xi = h(x), x \in \boldsymbol{x}\} . \tag{17}$$

La condition (11), étant supposée, entraîne d'après (16) la condition:

$$(\xi, \xi') \in E^* \Rightarrow \big(F^*(\xi, a), F^*(\xi', a)\big) \in E^* \quad \text{pour} \quad a \in \mathfrak{L}_n^r .$$

La formule (15) appliquée aux (F, E) et (F^*, E^*) définit les fonctions $\Phi(\boldsymbol{x}, a)$ et $\Phi^*(\boldsymbol{\xi}, a)$ qui satisfont, en vertu de (16) et (17), à la condition (8). Donc les pseudoobjets définis par Φ et Φ^* sont équivalents et notre théorème se trouve démontré.

Le problème de classification des pseudoobjets est celui de trouver les pseudoobjets du même type (voir [1]). Le type $[(m, E), n, r]$ du pseudoobjet est déterminé par l'espèce (m, E), la classe r, et le nombre n

de dimensions d'espace dans lequel le pseudoobjet est considéré. D'après nos théorèmes 1, 2 et 3 le problème de classification des pseudoobjets se réduit à celui pour objets à m composantes et compatibles avec une équivalence E.

§ 4. Quelques cas particulièrs. Soit F la loi de transformation d'un objet géométrique Ω compatible avec une équivalence E. Nous désignerons par $\varphi(\Omega, E)$ le pseudoobjet défini par la fonction Φ correspondant à la fonction F et l'équivalence E par la formule (15).

Considérons, en particulier, les équivalences E et E^* définies par les formules

$$(x, x') \in E \Longleftrightarrow \exists_{\varrho\neq 0}(x' = \varrho x) \tag{18}$$

et

$$(x, x') \in E^* \Longleftrightarrow \exists_{\varrho> 0}(x' = \varrho x) , \tag{19}$$

où $x, x' \in R^m$. Si nous posons $X_m \overset{\mathrm{df}}{=} \{x \in R^m : x \neq (0, \ldots, 0)\}$ alors les ensembles:

$$\mathbf{X}_{m-1} \overset{\mathrm{df}}{=} X_m/E \qquad \text{et} \qquad \mathbf{X}^*_{m-1} = X_m/E^*$$

peuvent être considérés comme espaces topologiques homéomorphes respectivement à l'espace projectif et la sphère à $m-1$ dimensions; donc il est possible de transmettre aux pseudoobjets d'espèce (m, E) et (m, E^*) (où E et E^* sont définies resp. par (18) et (19)) la notion de dimension définie ([5] et [6]) pour des objets.

Tout objet Ω linéaire et homogène à m composantes (où $m \geqslant 2$), étant compatible avec E et E^*, nous fournit les pseudoobjets: $\varphi(\Omega, E)$ d'espèce (m, E) et $\varphi(\Omega, E^*)$ d'espèce (m, E^*). Nous allons considérer trois cas particulier:

I. Soit Ω l'objet abstrait composé de deux G-densités:

$$x^{\lambda'} = x^{\lambda}|\Delta|^{\beta_\lambda}\operatorname{sgn}\Delta \qquad (\lambda = 1, 2;\ \lambda' = 1', 2') ,$$

où

$$\Delta \overset{\mathrm{df}}{=} \det \left\| \frac{\partial f^{i'}(\overset{\circ}{\xi}{}^i)}{\partial \xi^i} \right\| \qquad (i = 1, \ldots, m;\ i' = 1', \ldots, m')$$

et ayant pour le fibre X_2. Si nous posons $\boldsymbol{x} = (\varrho x^1, \varrho x^2)$ alors la fonction

$$\Phi(\boldsymbol{x}, a) \overset{\mathrm{df}}{=} (\varrho x^1|\Delta|^{\beta_1}\operatorname{sgn}\Delta\ ,\ \varrho x^2|\Delta|^{\beta_2}\operatorname{sgn}\Delta)$$

est la loi de transformation des pseudoobjets $\boldsymbol{\Omega} = \varphi(\Omega, E)$ (pour $\varrho \neq 0$) et $\boldsymbol{\Omega}^* = \varphi(\Omega, E^*)$ (pour $\varrho > 0$).

Il est facile de vérifier que dans le cas $\beta_1 \neq \beta_2$ le pseudoobjet $\boldsymbol{\Omega}$ resp. $\boldsymbol{\Omega}^*$ se décompose en quatre (huit) pseudoobjets transitifs parmi lesquels deux (quatres) sont équivalents à une W-densité transitive à 1 dimension; deux (quatres) autres à celle-ci à 0 dimensions. Dans le cas où $\beta_1 = \beta_2$ $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{\Omega}^*$ sont équivalents à un scalaire. Si on remplace Ω par une couple des W-densités on obtient par l'application φ les pseudoobjets équivalents aux Ω et Ω^*.

II. Soit Ω un vecteur abstrait (contra- où covariant) considéré sur le fibre X_m. On vérifie facilement que l'application θ, composée des applications suivantes: $x \to x \in x$ et $x \to \eta = (\eta^1, \ldots, \eta^{m-1})$ où $\eta^\tau = x^\tau/x^m$ $(\tau = 1, \ldots, m-1)$ établie l'équivalence du pseudoobjet $\varphi(\Omega, E)$ avec l'objet de Penzov de la forme suivante:

$$\eta^{\tau'} = \frac{A_\tau^{\tau'}\eta^\tau + A_m^{\tau'}}{A_\tau^{m'}\eta^\tau + A_m^{m'}} \qquad (\tau = 1, \ldots, m-1;\ \tau' = 1', \ldots, (m-1)') \tag{20}$$

où $A_\lambda^{\lambda'} \overset{\mathrm{df}}{=} \partial f^{\lambda'}(\xi^\lambda)/\partial\xi^\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, m;\ \lambda' = 1', \ldots, m')$. Remarquons que la loi de transformation (20) d'objet de Penzov est en certain défaut parce qu'elle n'opère pas dans le fibre tout entier. Ce fibre est homéomorphe à l'espace projectif à $m-1$ dimensions. Le pseudoobjet $\varphi(\Omega, E)$ (même que l'objet de Penzov) représente la direction dans l'espace à m dimensions. Le pseudoobjet $\varphi(\Omega, E^*)$ est équivalent à un objet représentant la direction munie de sens ([3]).

III. Soit Ω un tenseur abstrait ayant pour le fibre X_m. Le pseudoobjet $\varphi(\Omega, E)$ (défini d'autre manière et appelé „projector") était considéré par D. van Dantzig ([2]).

Dans le cas où Ω est un tenseur covariant du second ordre il y a une comitante scalaire a, dépendante du pseudoobjet $\varphi(\Omega, E^*)$ et d'une couple des vecteurs (ou directions munies de sens) et définie par la formule:

$$a = \frac{(\varrho x_{\lambda\mu})u^\lambda v^\mu}{\sqrt{(\varrho x_{\lambda\mu})u^\lambda u^\mu}\sqrt{(\varrho x_{\lambda\mu})v^\lambda v^\mu}},$$

où $(\varrho x_{\lambda\mu}) = x$ dénote la valeur du pseudoobjet $\varphi(\Omega, E^*)$ dans un système de coordonnées, u^λ et v^λ sont des composantes des deux vecteurs dans le même système de coordonnées. Il en résulte qu'il est possible de définir la métrique angulaire dans une variété à n dimensions à l'aide de champ des pseudoobjets $\varphi(\Omega, E^*)$.

Travaux cités

[1] J. Aczél et S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] D. van Dantzig, *Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume*, Math. Ann. 106 (1932), p. 400-454.

[3] S. Gołąb, A. Jakubowicz, M. Kucharzewski et M. Kuczma, *Sur l'objet géométrique représentant la direction munie de sens*, Ann. Polon. Math. 15(1964), p. 233-236.

[4] S. Gołąb et M. Kucharzewski, *Über den Begriff der Pseudogrössen*, Tensor N. S. 8, 2 (1958), p. 79-89.

[5] J. Haantjes et G. Laman, *On the definition of geometric objects*, I et II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A 56 = Indagationes Math. 15 (1953), p. 208-215 et 216-222.

[6] M. Kucharzewski et M. Kuczma, *Some remarks on geometric objects and their equivalence*, I et II, Tensor N. S. 13 (1963), p. 251-260 et 261-268.

[7] — — *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Mat. 43 (1964).

[8] J. A. Schouten et D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, (1935), Bd. I.

[9] *В. В. Вагнер* (W. W. Wagner), *Теория дифференциальных обьектов и основания дифференциальной геометрии*, Supplément à l'édition russe du livre: O. Veblen et J. H. C. Whitehead, *The foundations of differential geometry*, Moscou 1949.

[10] A. Wundheiler, *Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien*, I, Intern. Konf. f. tens. Diff. Geom. u. i. Anw., Moskou 17-23. V. 1934. Trudy Sem. po Wekt. i Tens. Analizu 4 (1937), p. 366-375.

Reçu par la Rédaction le 15. 4. 1964