

# Sur l'intégrabilité par rapport à l'accroissement du temps $0 \leq \theta < \infty$ de la solution fondamentale spéciale de l'opérateur $P$ parabolique

par H. MILCER-GRUŻEWSKA (Warszawa)

**Résumé.** On sait que la question de l'existence de la limite de la solution d'un système  $P$  parabolique dans  $(\Omega, (0, \infty))$ ,  $\Omega \in R^n$  n'a été résolue que localement ([5], [2], [3]). Cette difficulté a été surpassée [6] par la méthode de la transformation de Fourier-Laplace, dans le cas des systèmes à coefficients constants et d'ordre  $2b < n$ . Cette méthode ne pourrait être appliquée dans le cas où  $2b > n$ , car dans ce cas la solution fondamentale, intégrable sur l'axe infini de l'accroissement du temps, n'est généralement pas  $F$  transformable.

Les résultats de ce travail démontrent que si un système à coefficients constants ne contient que les dérivées d'ordres plus élevés que  $(2b - n)$ , alors la méthode mentionnée est applicable. Cette condition est intrinsèque [4].

Enfin, voici une liste des résultats qui n'ont pas encore été publiés:

1) les formules (2.7) — première partie — (4.4), (4.6), (4.8), (4.9), (5.10), (5.12), (5.13), (6.2), (6.5); 2) l'exemple 6.1; 3) les lemmes 3.2, 4.2, 5.1, 6.2, 6.3; 4) le corollaire 6.1; 5) les parties 8 et 9.

1. On a construit dans [2] une classe de solutions fondamentales spéciales (s.f.s.) des opérateurs  $P$  paraboliques homogènes (d'ordre  $2b$ ) à coefficients constants, dans le domaine spatial borné  $(\Omega)$  dans  $R^n$ , intégrables par rapport à l'accroissement du temps  $0 \leq \theta < \infty$ , pour  $n \leq 2b$ .

Les résultats du travail [2] sont améliorés ici et appliqués au cas des opérateurs non homogènes.

J'ai aperçu que les résultats des parties 3 à 9 sont démontrés en admettant que les coefficients de l'opérateur (1.3) sont constants. Je conserve les notations du cas général, qui sera démontré dans la partie II du même travail.

Soit

$$(1.1) \quad L(D, \partial/\partial t) = P(D) - \partial/\partial t,$$

où

$$(1.2) \quad P(D) = P^{(x,t)}(D) = \left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq M \\ |k| \leq 2b}} A_{ij}^{(k)}(x, t) D^{(k)} \right)_{i=1}^M,$$

$$D^{(k)} = \frac{\partial |k|}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad x, y \in \Omega, \quad t, \tau \in (0, \infty), \quad (k) = (k_1, \dots, k_n),$$

$|k| = k_1 + \dots + k_n$ ,  $k_1, \dots, k_n$  étant des nombres naturels ou zéro,  $t \geq \tau$ ,

$$(1.3) \quad L_0(D, \partial/\partial t) = P_0^{(y, \tau)}(D) - \partial/\partial t = \left( \sum_{k=2b}^{1 \leq j \leq M} A_{ij}^{(k)}(y, \tau) D^{(k)} \right)_{i=1}^M - \partial/\partial t$$

alors

$$(1.4) \quad L(D, \partial/\partial t) = L_0(D, \partial/\partial t) + P^{(x, t)}(D) - P_0^{(y, \tau)}(D).$$

**HYPOTHÈSE (1.2).** Les coefficients de l'opérateur (1.2)  $A_{ij}^{(k)}(x, y)$ ,  $i, j = 1, \dots, M$ , sont bornés et continus dans  $(\Omega, (0, \infty))$ , ils satisfont aux conditions de Hölder, à savoir  $A_{ij}^{(k)}(x, t) \in C^{\alpha, \beta}$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ,  $i, j = 1, \dots, M$ ,  $|k| = 2b$  et  $\beta \geq 0$ ,  $|k| < 2b$ .

**HYPOTHÈSE (1.2).** Les coefficients  $A_{ij}^{(k)}(x, t)$ ,  $i, j = 1, \dots, M$ ,  $|k| = 2b$  assurent la  $P$  parabolicité de l'opérateur (1.2) pour  $(x, t) \in (\Omega, (0, \infty))$ .

Soit  $(G^{(y, \tau)}) = (G^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau))_{i, j=1}^M$  la solution fondamentale de l'opérateur (1.3). On peut exprimer cette matrice par la différence des variables  $x - y = z = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$  et  $\theta = t - \tau$  comme il suit:

$$(G_{ij}^{(y, \tau)}(z, \theta))_{i, j=1}^M = (G^{(y, \tau)}(z, \theta)).$$

**DÉFINITION (1.1).** La matrice  $({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)) = ({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta))$ ,  $x, y \in \Omega$ ,  $\theta = t - \tau \geq 0$ , de la quasi-solution spéciale de l'opérateur (1.3) (q.s.s.) est égale à:

$$(1.5) \quad ({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta)) = \left( \sum_{l=2b-n+1}^{\infty} \frac{1}{l!} [(z_1 - a_1) \partial/\partial x_1 + \dots + (z_n - a_n) \partial/\partial x_n]^l G^{(y, \tau)}(z, \theta) \right),$$

$$A = (a_1, \dots, a_n).$$

On définit, comme dans la partie 2 du travail [3] la matrice des polynômes:

$$(1.6) \quad ({}_A P^{(y, \tau)}(z, \theta)) = (P_{ij}^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau))_{i, j=1}^M = (G^{(y, \tau)}(z, \theta) - {}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta))$$

qui sont d'ordre  $(2b - n)$  par rapport à la variable  $z = x - y$ . On a donc:

$$(1.7) \quad ({}_A P^{(y, \tau)}(z, \theta)) = \left( \sum_{l=0}^{2b-n} \frac{1}{l!} [(z_1 - a_1) \partial/\partial x_1 + \dots + (z_n - a_n) \partial/\partial x_n]^l G^{(y, \tau)}(z, \theta)|_{z=A} \right).$$

La matrice de la q.s.s.  $({}_A \mathcal{G}^{(Z, \zeta)}(z, \theta))$  a été définie dans la partie 2 du travail [3] dans le cas où les coefficients de l'opérateur (1.3) sont fixés en un point arbitraire, mais constant  $(Z, \zeta) \in (\Omega, (0, \infty))$ , dans notre cas le point constant  $(Z, \zeta)$  est remplacé par le point variable  $(y, \tau)$ . La définition de la solution fondamentale spéciale du système (1.3) est alors plus compliquée que dans le cas du point fixe. Cette dernière définition

est à trouver dans la partie 7 du travail [2], tandis que la définition de la même solution dans le cas du point variable  $(y, \tau)$  est donné dans la partie 8 du même travail [2]. Nous la rappellerons ici.

Nous avons, d'accord avec la partie 3 du travail [3],

$$(1.8) \quad ({}_A G^{(y, \tau)}) = ({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}) + [{}_A \mathcal{G} \times {}_A \Phi],$$

où le second terme du second membre est une pseudo-convolution de la q.s.s.  $({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)})$  et du noyau  $({}_A \Phi)$ :

$$(1.9) \quad ({}_A \Phi(x, t, y, \tau)) = \sum_{l=1}^{\infty} ({}_A \mathcal{N}_l^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)),$$

$$(1.10) \quad ({}_A \mathcal{N}_l^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)) = ({}_A \mathcal{N}^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)) = L_0(D, \partial/\partial t)({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau))$$

et  $({}_A \mathcal{N}_l^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau))$  est la  $l$ -ième pseudo-itération du noyau  $({}_A \mathcal{N}^{(y, \tau)})$ :

$$(1.11) \quad ({}_A \mathcal{N}_{l+1}^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)) = \int_{\tau}^t \int_{\Omega} ({}_A \mathcal{N}^{(u, \zeta)}(x, t, u, \zeta)) ({}_A \mathcal{N}_l^{(y, \tau)}(u, \zeta, y, \tau)) du d\zeta,$$

$l = 1, 2, \dots$ , et

$$(1.12) \quad [{}_A \mathcal{G} \times {}_A \Phi] = \int_{\tau}^t \int_{\Omega} ({}_A \mathcal{G}^{(u, \zeta)}(x, t, u, \zeta)) ({}_A \Phi^{(y, \tau)}(u, \zeta, y, \tau)) du d\zeta.$$

On peut écrire, d'accord avec la définition (1.1), la q.s.s. comme fonction des variables  $z = x - y$  et  $\theta = t - \tau$ , ce qui permet de remplacer la formule (1.10) par

$$(1.13) \quad ({}_A \mathcal{N}_1^{(y, \tau)}(z, \theta)) = ({}_A \mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta)) = L_0\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta)).$$

Alors on aura

$$({}_A \mathcal{N}_2^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)) = \int_{\tau}^t \int_{\Omega} ({}_A \mathcal{N}^{(u, \zeta)}(x - u, \theta - \zeta)) ({}_A \mathcal{N}^{(y, \tau)}(u - y, \zeta - \tau)) du d\zeta.$$

En posant  $u - y = v$ ,  $\zeta - \tau = \xi$ , nous trouvons:

$$\begin{aligned} &({}_A \mathcal{N}_2^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)) \\ &= \int_0^{\theta} \int_{\Omega_1} ({}_A \mathcal{N}^{(v+\theta, \xi+\tau)}(z - v, \theta - \xi)) ({}_A \mathcal{N}^{(y, \tau)}(v, \xi)) dv d\xi, \quad \Omega_1 = \Omega - y. \end{aligned}$$

Il est donc raisonnable de poser:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} &({}_A \mathcal{N}_2^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)) = ({}_A \mathcal{N}_2^{(y, \tau)}(z, \theta)), \quad z \in \Omega_1, y \in \Omega. \\ &({}_A \mathcal{N}_l^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)) = ({}_A \mathcal{N}_l^{(y, \tau)}(z, \theta)). \end{aligned}$$

En effet:

$$\begin{aligned} &({}_A \mathcal{N}_{l+1}^{(y, \tau)}(x, t, y, \tau)) = \int_{\tau}^t \int_{\Omega} ({}_A \mathcal{N}^{(u, \zeta)}(x - u, t - \zeta)) ({}_A \mathcal{N}_l^{(y, \tau)}(u - y, \zeta - \tau)) du d\zeta \\ &= \int_0^{\theta} \int_{\Omega_1} ({}_A \mathcal{N}^{(v+\theta, \xi+\tau)}(z - v, \theta - \xi)) ({}_A \mathcal{N}_l^{(y, \tau)}(v, \xi)) dv d\xi = ({}_A \mathcal{N}_{l+1}^{(y, \tau)}(z, \theta)). \end{aligned}$$

Nous avons, à cause de la formule (1.9):

$$(1.15) \quad ({}_A\Phi(x, t, y, \tau)) = ({}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta)), \quad z \in \Omega_1, y \in \Omega, \theta > 0,$$

ce qui permet de remplacer la formule (1.12) par:

$$(1.16) \quad [{}_A\mathcal{G} \times \Phi_A] \\ = \int_0^\theta \int_{\Omega_1} ({}_A\mathcal{G}^{(v+\nu, \xi+\tau)}(z-v, \theta-\xi)) ({}_A\Phi^{(y, \tau)}(v, \xi)) dv d\xi, \quad z \in \Omega_1, y \in \Omega.$$

La pseudo-convolution (1.16) est donc une fonction de  $(y, \tau) \in \epsilon(\Omega, (0, \infty))$  et de  $(z, \theta) \in (\Omega_1, (0, \infty))$ . On peut donc écrire la s.f.s. (1.8) de l'opérateur (1.3) comme il suit:

$$(1.17) \quad ({}_AG^{(y, \tau)}) = ({}_AG^{(y, \tau)}(z, \theta)), \quad (y, \tau) \in (\Omega, (0, \infty)), (z, \theta) \in (\Omega_1, (0, \infty)).$$

La solution fondamentale spéciale (s.f.s.) du système (1.1) sera, d'accord avec la partie 8 du travail [2], égale à

$$(1.18) \quad ({}_A\Gamma) = ({}_AG^{(y, \tau)}(z, \theta)) + [{}_AG \times {}_AF],$$

où le second terme du second membre désigne une pseudo-convolution,

$$(1.19) \quad ({}_AF) = \sum_{l=1}^{\infty} ({}_AN^{(l)}), \quad ({}_AN^{(1)}) = ({}_AN),$$

$$(1.20) \quad ({}_AN) = \left( \sum_{|k|=2b} (A^{(k)}(x, t) - A^{(k)}(y, \tau)) D^{(k)} {}_AG^{(y, \tau)}(z, \theta) \right) + \\ + \left( \sum_{k < 2b} A^{(k)}(x, t) D^{(k)} {}_AG^{(y, \tau)}(z, \theta) \right),$$

$({}_AG^{(y, \tau)}(z, \theta))$  est définie par les formules de (1.8) à (1.17) et  $({}_AN^{(l)})$  est la  $l$ -ième pseudo-convolution du noyau  $({}_AN)$ .

Remarque 1.1. Nous avons dit, dans la partie 8 du travail [2], que la pseudo-convolution est associative et distributive. Nous le démontrerons dans la partie 2.

2. Observons que la méthode du travail [2], aussi bien que celle du travail actuel, consiste à remplacer, dans la formule de la s.f.s. de la formule (3.3) du travail [3], la q.s.s. de l'opérateur (1.3) par la s.f.s. de cet opérateur, c'est-à-dire, dans notre cas, de la matrice (1.5) par la matrice (1.8). On doit donc d'abord étudier la matrice (1.5). Dans le travail [3] ce sont les matrices (5.2) et (5'.2). Mais dans les évaluations de ces matrices, dans les formules (7.2) et (7'.2) se sont glissées de manifestes erreurs: dans les premiers membres des inégalités (7.2) et (7'.2) il faut remplacer l'ordre de la dérivée  $p$  par  $m$ . On a donc dans le cas du travail actuel pour la matrice (1.5) et  $|m| = 2b - n + 1 + p$ ,  $p \geq 0$ , l'inégalité:

$$(2.1) \quad (|D^{(m)} {}_A\mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta)|) \leq \text{const } \theta^{-[1+(p+1)/2b]}, \quad \theta = t - \tau > 0.$$

Rappelons que cette inégalité est une simple conséquence de la définition (1.5) et de l'inégalité (33) du travail de W. Pogorzelski [8], à savoir de l'inégalité

$$(2.2) \quad (|D^{(m)} G^{(v, \tau)}(x, t, y, \tau)|) \leq C_m \theta^{-(n+|m|)/2b} \exp - c_m \left( \frac{|x-y|}{\theta^{1/2b}} \right)^{2b/2b-1},$$

$\theta = t - \tau > 0$ ,  $(m) = (m_1, \dots, m_n)$ ,  $|m| = m_1 + \dots + m_n$ ,  $C_m$  et  $c_m$  étant des constantes positives.

Or nous pouvons écrire, en différentiant les deux membre de la formule (1.6) par rapport à la variable  $x$ :

$$(2.3) \quad D_x^{(m)} ({}_A \mathcal{G}^{(v, \tau)}(z, \theta)) = D_x^{(m)} (G^{(v, \tau)}(z, \theta)) - D_x^{(m)} ({}_A P^{(v, \tau)}(z, \theta)).$$

Mais dans le cas où  $|m| \geq 2b - n + 1$ , c'est-à-dire où  $|m| = 2b - n + 1 + p$ ,  $p \geq 0$ , nous avons

$$(2.4) \quad D_x^{(m)} ({}_A P^{(v, \tau)}(z, \theta)) \equiv 0,$$

car il résulte de la formule (1.7) que les polynômes  $({}_A P^{(v, \tau)}(z, \theta))$  sont, par rapport à la variable  $x$ , d'ordre  $(2b - n)$ .

Alors dans le cas de  $|m| = 2b - n + 1 + p$ ,  $p \geq 0$ :

$$(2.5) \quad D_x^{(m)} ({}_A \mathcal{G}^{(v, \tau)}(z, \theta)) = D_x^{(m)} (G^{(v, \tau)}(z, \theta)).$$

Les formules (2.5) et (2.2) donnent la formule (2.1), c.q.f.d.

Le cas de  $m < 2b - n + 1$  n'a pas été discuté dans le travail [3]. Nous le ferons à présent. Il résulte de la formule (1.5) que:

$$\begin{aligned} & D_x^{(m)} ({}_A \mathcal{G}^{(v, \tau)}(z, \theta)) \\ &= \sum_{|l|=2b-n+1}^{\infty} \frac{1}{l!} D_x^{(m)} \left[ (z_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (z_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{(l)} (G^{(v, \tau)}(z, \theta)|_{z=A}) \\ &= \sum_{|l|=2b-n+1}^{\infty} \frac{1}{|l|!} \sum_{l_1 + \dots + l_n = |l|} \frac{|l|!}{l_1! \dots l_n!} \times \\ &\quad \times D_x^{(m)} (z_1 - a_1)^{l_1} \dots (z_n - a_n)^{l_n} (D^{(l)} G^{(v, \tau)}(z, \theta)|_{z=A}). \end{aligned}$$

Soit  $(m) = (m_1, \dots, m_n)$ ; alors on a:

$$\begin{aligned} & D_x^{(m)} (z_1 - a_1)^{l_1} \dots (z_n - a_n)^{l_n} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{pour } m_i > l_i, \ i = 1, \dots, n, \\ \frac{l_1! \dots l_n!}{(l_1 - m_1)! \dots (l_n - m_n)!} (z_1 - a_1)^{l_1 - m_1} \dots (z_n - a_n)^{l_n - m_n}, & m_i \leq l_i, \ i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

et on trouve en posant  $l_i = m_i + k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $(k) = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $|k| = k_1 + \dots + k_n$ ,

$$\begin{aligned} D_x^{(m)}({}_A \mathcal{G}^{(v, \tau)}(z, \theta)) &= \sum_{|k|=2b-n+1-|m|}^{\infty} \frac{1}{|k|!} \sum_{k_1+\dots+k_n=|k|} \frac{|k|!}{k_1! \dots k_n!} \times \\ &\quad \times (z_1 - a_1)^{k_1} \dots (z_n - a_n)^{k_n} (D^{(k+m)} G^{(v, \tau)}(z, \theta)|_{z=A}) \\ &= \sum_{|k|=2b-n+1-|m|}^{\infty} \frac{1}{|k|!} \left[ (z_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (z_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{|k|} \times \\ &\quad \times D^{(m)}(G^{(v, \tau)}(z, \theta)|_{z=A}) \\ &= \frac{1}{(2b-n+1-|m|)!} \left[ (z_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (z_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{2b-n+1-|m|} \times \\ &\quad \times (D^{(m)} G^{(v, \tau)}(z, \theta))|_{z=A'}, \end{aligned}$$

où

$$A' = A + \eta(x - y - A) = [a_1 + \eta_1(z_1 - a_1), \dots, a_n + \eta_n(z_n - a_n)], \quad |\eta| < 1.$$

On a donc, d'accord avec la formule (2.2):

$$(2.6) \quad |D_x^{(m)}({}_A \mathcal{G}^{(v, \tau)}(z, \theta))| \leq \text{const } \theta^{-(1+1/2b)}, \quad |m| < 2b - n + 1.$$

Nous pouvons énoncer le

**LEMME 2.1.** *La dérivée d'ordre  $(m) = (m_1, \dots, m_n)$  par rapport à la variable spatiale  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de la q.s.s. de l'opérateur (1.1) vérifie l'inégalité double:*

$$(2.7) \quad |D_x^{(m)}({}_A \mathcal{G}^{(v, \tau)}(z, \theta))| \leq \begin{cases} \text{const } \theta^{-(1+1/2b)}, & |m| < 2b - n + 1, \\ \text{const } \theta^{-(1+(1+p)/2b)}, & |m| = 2b - n + 1 + p, \quad p \geq 0, \end{cases}$$

$$x, y \in \Omega, \quad t > \tau \geq 0, \quad \theta = t - \tau > 0.$$

L'évaluation de la singularité spatiale est la même que dans la formule (8.2) du travail [3]:

$$(2.8) \quad |D_x^{(m)}({}_A \mathcal{G}^{(v, \tau)}(z, \theta))| \leq \text{const } \theta^{-\mu} |z|^{-(n+|m|-2b\mu)}, \quad \theta > 0, \quad 0 < \mu < 1, \\ m = 1, 2, \dots$$

Observons que la première des deux inégalités (2.7) est la plus faible,  $\theta \rightarrow \infty$ , et c'est seulement celle-ci qui a été utilisée dans le travail [3].

**Remarque 2.1.** Observons encore qu'il résulte des égalités (2.5), (1.13), (1.6) et (1.7) que:

$$(2.9) \quad ({}_A \mathcal{N}^{(v, \tau)}(z, \theta)) = \frac{\partial}{\partial \theta} ({}_A P^{(v, \tau)}(z, \theta)), \quad z^2 + \theta^2 > 0.$$

La matrice  $(\mathcal{A}\mathcal{N}^{(v,\tau)}(z, \theta))$  est donc un polynôme de la variable  $z$ , ou  $x$ , de degré  $(2b-n)$ .

LEMME 2.2. *La pseudo-convolution est associative et distributive.*

Soient  $(\varphi^{(u,\zeta)}(x, t, y, \tau))$ ,  $(\psi^{(v,\xi)}(x, t, y, \tau))$  et  $(\chi^{(v,\tau)}(x, t, y, \tau))$  les matrices des fonctions intégrables par rapport à  $(x, t)$ ,  $(y, \tau) \in (\Omega, (0, \infty))$ . Ecrivons:

$$(2.10) \quad \int_{\tau}^t \int_{\Omega} \int_{\xi}^{\zeta} \int_{\Omega} (\varphi^{(u,\zeta)}(x, t, u, \zeta)) (\psi^{(v,\xi)}(u, \zeta, v, \xi)) (du d\zeta (\chi^{(v,\tau)}(v, \xi, y, \tau)) dv d\xi \\ = \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (\varphi^{(u,\zeta)}(x, t, u, \zeta)) \int_{\tau}^{\zeta} \int_{\Omega} (\psi^{(v,\xi)}(u, \zeta, v, \xi)) (\chi^{(v,\tau)}(v, \xi, y, \tau)) dv d\xi du d\zeta,$$

ou

$$(2.11) \quad \{[\varphi \times \psi] \times \chi\} = \{\varphi \times [\psi \times \chi]\}.$$

En effet, nous pouvons écrire, à cause du théorème de Hadamard:

$$\{[\varphi \times \psi] \times \chi\} \\ = \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (\varphi^{(u,\zeta)}(x, t, u, \zeta)) \int_{\tau}^{\zeta} \int_{\Omega} (\psi^{(v,\xi)}(u, \zeta, v, \xi)) (\chi^{(v,\tau)}(v, \xi, y, \tau)) dv d\xi du d\zeta, \\ \text{c.q.f.d.}$$

La seconde partie du lemme (2.2) n'est qu'une conséquence de la distributivité de l'intégrale. Nous pouvons donc écrire:

$$(2.12) \quad \{\varphi \times [\psi + \chi]\} = [\varphi \times \psi] + [\varphi \times \chi].$$

3. Pour étudier le noyau résolvant (1.16)  $(\mathcal{A}\Phi^{(v,\tau)}(z, \theta))$ , exprimé par les formules de (1.9) à (1.15), il nous faut étudier le noyau  $(\mathcal{A}\mathcal{N}^{(v,\tau)}(z, \theta))$ . Mais la définition du noyau  $(\mathcal{A}\mathcal{N}^{(v,\tau)}(z, \theta))$  dans les formules (1.10) et (1.13) est la même que celle du noyau  $(\mathcal{A}\mathcal{N}(z, \theta))$  dans la formule (5.2) du travail [2], pour  $Z = y$ ,  $\zeta = \tau$ ,  $\theta = t - \tau$ ,  $z = x - y$ . Nous pouvons donc appliquer au noyau  $(\mathcal{A}\mathcal{N}^{(v,\tau)}(z, \theta))$  le lemme (5.1) du travail [2], ce que nous exprimerons sous forme du

LEMME 3.1. *Soit  $\Omega_1 \in K(0, r/3)$ ,  $K(0, r/3)$  étant une sphère centrée au point 0 et de rayon  $r/3$ ; alors il existe une valeur  $A_0$ , ne dépendant que du rayon  $r$  et des coefficients de l'opérateur  $L_0$ , telle qu'on a pour chaque  $\theta = t - \tau > 0$ ,  $x, y \in \Omega$ ,  $t > \tau \geq 0$ ,  $z \in \Omega_1 = \Omega - y$  et  $|A| > A_0$*

$$(3.1) \quad (|\mathcal{A}\mathcal{N}^{(v,\tau)}(z, \theta)|) < C_0/\theta^{1+n/2b}$$

où la constante  $C_0$  ne dépend que du rayon  $r/3$  et des coefficients de l'opérateur  $L_0$ ,

$$(3.2) \quad (|\mathcal{A}\mathcal{N}^{(v,\tau)}(z - u, \theta)|) \leq 1/2 M, \quad u \in \Omega_1,$$

$$(3.3) \quad \int_0^\infty \int_{\Omega_1} (|\mathcal{A}\mathcal{N}^{(v,\tau)}(z - u, \theta)|) du d\theta < 1/2 M;$$

les constantes  $A_0$  et  $C_0$  sont définies par les formules (5.14), (5.17), (5.18) et (5.11) du travail [2],

$$(3.4) \quad \int_0^\infty ({}_A\mathcal{N}^{(y,\tau)}(z, \theta)) d\theta = 0, \quad z \in \Omega, \quad A \neq 0, \quad \tau = \text{const}, \quad d\theta = dt.$$

La démonstration de l'égalité (3.4), qui est nouvelle, résulte immédiatement des formules (1.10), (1.6) et (2.5).

Dans le travail actuel il nous faut encore évaluer la dérivée spatiale du noyau  $({}_A\mathcal{N}^{(y,\tau)}(z, \theta))$ . Nous trouvons, en tenant compte de la définition (1.13), de la formule (1.5) et du fait que  $(G^{(y,\tau)}(z, \theta))$  est la s.f. de l'opérateur  $L_0 \left( D, \frac{\partial}{\partial t} \right)$ , que

$$(3.5) \quad \frac{\partial}{\partial x_l} ({}_A\mathcal{N}^{(y,\tau)}(z, \theta)) = \sum_{|k|=2b} (A^{(k)}(y, \tau)) \sum_{p=0}^{2b-n} \frac{1}{p!} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ (z_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (z_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{(p)} (DG^{(k)}(z, \theta)|_{z=A}).$$

Un simple calcul algébrique donne

$$(3.6) \quad \frac{\partial}{\partial x_l} ({}_A\mathcal{N}^{(y,\tau)}(z, \theta)) = \sum_{|k|=2b} (A^{(k)}(y, \tau)) \sum_{p=0}^{2b-n-1} \frac{1}{p!} \times \\ \times \left[ (z_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (z_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{(p)} \frac{\partial}{\partial x_l} D^{(k)}(G^{(y,\tau)}(z, \theta)|_{z=A}).$$

Observons que  $|z| = |x - y| \leq |x| + |y| \leq 2r/3$ ,  $x, y \in K(0, r/3)$  et  $|z - A| \leq |A|(1 + |z/A|)$ . En outre nous avons l'inégalité (2.2), d'où il vient:

$$(3.7) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_l} ({}_A\mathcal{N}^{(y,\tau)}(z, \theta)) \right| \\ \leq \frac{C}{\theta^{1+(n+1)/2b}} \sum_{p=0}^{2b-n-1} \frac{1}{p!} \left( 1 + \frac{2r}{3|A|} \right)^p \left( \frac{|A|}{\theta^{1/2b}} \right)^p \exp - c \left( \frac{|A|}{\theta^{1/2b}} \right)^{2b/(2b-1)},$$

où les constantes  $C$  et  $c$  ne dépendent que des coefficients de l'opérateur (1.3).

En posant  $p(1 - 1/2b) = q$  et  $[q]$  = entier du nombre  $q$ , on a évalué les éléments de la somme du noyau  $({}_A\mathcal{N})$  dans le travail [2], p. 17.

En tenant compte de cette évaluation nous pouvons écrire:

$$(3.8) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_l} ({}_A\mathcal{N}^{(y,\tau)}(z, \theta)) \right| \leq \frac{C}{\theta^{1+(n+1)/2b}} (\exp - a) \sum_{p=0}^{2b-n-1} \frac{([q] + 1)}{p!} (2(2/c)^{1-1/2b})^p$$

où on a posé:

$$(3.9) \quad a = ((c/2)^{(2b-1)/2b} |A| / \theta^{1/2b})^{2b/(2b-1)}.$$



Il suit de là et de la définition 5.11 du travail [2], que

$$(3.10) \quad \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_l} {}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta) \right| \right) \leq C_0 / \theta^{1+(n+1)/2b}, \quad l = 1, \dots, n,$$

où la constante  $C_0$  ne dépend que des coefficients de l'opérateur (1.3).

Nous avons encore à évaluer l'intégrale de la valeur absolue de la dérivée (3.4), sur le cylindre infini  $(\Omega_1, (0, \infty))$ . Nous démontrerons que

$$(3.11) \quad j_1 = \int_0^\infty \int_{\Omega_1} \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_l} {}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z-u, \theta) \right| \right) du d\theta < 1/2M,$$

dès que le nombre  $|A| > A_2$ , où le nombre  $A_2$  est défini par la formule (5.17) du travail [2], où il faut remplacer  $\Omega$  par  $\Omega_1$ . Nous avons vu que le module de la dérivée première du noyau  ${}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta)$  admet la même évaluation que le module de ce noyau. Nous avons donc aussi:

$$(3.12) \quad \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_l} {}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z-u, \theta) \right| \right) < 1/2M, \quad l = 1, \dots, n, \quad \text{si } |A| > A_1,$$

où  $A_1$  est défini par la formule (5.14) du travail [2].

De même l'intégrale  $j_1$  admet presque la même évaluation que l'intégrale  $j$  de la formule (5.15) du travail [2]. Nous avons donc

$$(3.13) \quad j_1 \leq 1/2M,$$

dès que

$$(3.14) \quad |A| > A_0 = \max(A_1, A_2),$$

où  $A_2$  est défini par la formule (5.17) du travail [2] avec  $\Omega$  remplacé par  $\Omega_1$  et  $n$  par  $n+1$ .

**LEMME 3.2.** *Le module de la dérivée, par rapport à la variable spatiale  $x_l, l = 1, \dots, n$ , du noyau  $({}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta))$  satisfait aux inégalités suivantes :*

$$(3.15) \quad \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_l} {}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta) \right| \right) < C_0 / \theta^{1+(n+1)/2b},$$

$$(3.16) \quad \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_l} {}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta) \right| \right) < 1/2M, \quad |A| > A_1,$$

$$(3.17) \quad \int_0^\infty \int_{\Omega_1} \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_l} {}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z-u, \theta) \right| \right) du d\theta < 1/2M,$$

$$|A| > A_0 = \max(A_1, A'_2).$$

Les constantes  $C_0, A_1, A'_2$  ne dépendent que des coefficients de l'opérateur (1.3) et de la grandeur du domaine  $\Omega$ ; elles sont définies par les formules (5.11), (5.14) et (5.17) pour  $n+1$  du travail [2]; dans ces formules il faut remplacer  $\Omega$  par  $\Omega_1$ .

Nous démontrerons encore le

LEMME 3.3. Soit  $[_A\mathcal{G} \times \varphi]$  la pseudo-convolution de la q.s.s.  $(_A\mathcal{G}^{(y,\tau)}(z, \theta))$  et de la matrice-colonne  $\varphi^{(y,\tau)}(z, \theta) \in C^{a_0}$ ,  $a_0 > 0$ ,  $x, y \in \Omega$ ,  $z \in \Omega_1 = \Omega - y$ ,  $t > \tau \geq 0$ ,  $t - \tau = \theta$ ,  $|A| > A_0$ , alors

$$(3.18) \quad L_0\left(D, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)[_A\mathcal{G} \times \varphi] = -(\varphi^{(y,\tau)}(z, \theta)) + [_A\mathcal{N} \times \varphi].$$

En effet, nous pouvons écrire, à cause des définitions (1.5), (1.8) et (1.16):

$$\begin{aligned} L_0\left(D, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)[_A\mathcal{G} \times \varphi] &= L_0\left(D, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \int_0^\theta \int_{\Omega_1} (_A\mathcal{G}^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) (\varphi^{(y,\tau)}(u, \zeta)) du d\zeta \\ &= L_0\left(D, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \int_0^\theta \int_{\Omega_1} [(G^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) - (_AP^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta))] \times \\ &\quad \times (\varphi^{(y,\tau)}(u, \zeta)) du d\zeta \\ &= -(\varphi^{(y,\tau)}(z, \theta)) - L_0\left(D, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \int_0^\theta \int_{\Omega_1} (_AP^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) \times \\ &\quad \times (\varphi^{(y,\tau)}(u, \zeta)) du d\zeta \\ &= -(\varphi^{(y,\tau)}(z, \theta)) + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\theta \int_{\Omega_1} (_AP^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) (\varphi^{(y,\tau)}(u, \zeta)) du d\zeta \\ &= -(\varphi^{(y,\tau)}(z, \theta)) + \lim_{\zeta \rightarrow \theta} \int_{\Omega_1} (_AP^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) (\varphi^{(y,\tau)}(u, \zeta)) du + \\ &\quad + \int_0^\theta \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial \theta} (_AP^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \alpha-\zeta)) (\varphi^{(y,\tau)}(u, \zeta)) du d\zeta \\ &= -(\varphi^{(y,\tau)}(z, \theta)) + \int_0^\theta \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial \theta - \zeta} (_AP^{(u+y, \zeta_1+\tau)}(z-u, \theta-\zeta))_{\zeta_1=\zeta} \times \\ &\quad \times (\varphi^{(y,\tau)}(u, \zeta)) du d\zeta \\ &= -(\varphi^{(y,\tau)}(z, \theta)) + \int_0^\theta \int_{\Omega_1} (_A\mathcal{N}^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) (\varphi^{(y,\tau)}(u, \zeta)) du d\zeta \\ &= -(\varphi^{(y,\tau)}(z, \theta)) + [_A\mathcal{N} \times \varphi]. \end{aligned}$$

4. Pour étudier le noyau résolvant  $(\Phi^{(y,\tau)}(z, \theta))$ , défini par les formules (1.9) et (1.15), il nous faut suivre les raisonnements de la partie 6 du travail [2], en remplaçant les  $_A\mathcal{N}^{(n)}(z, \theta)$  de cette partie par  $_A\mathcal{N}_n^{(y,\tau)}$ ,

$n = 1, 2, \dots$  et  ${}_A\Phi(z, \theta)$  par  ${}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta)$ , à cause des formules (1.9), (1.13) et (1.14). Le lemme 6.1 du travail [2] prendra la forme du

LEMME 4.1. Si  $\Omega_1 \in K(0, r/3)$ , il existe une valeur  $A_0$ , ne dépendant que de  $r$  et des coefficients de l'opérateur  $L_0$  telle que pour  $|A| > A_0$  ( $A_0$  étant défini par les formules 5.18, 5.17 avec  $n$  remplacé par  $n+1$ , et 5.14 du travail [2], où  $\Omega$  est remplacé par  $\Omega_1$ ) la série (1.15) est absolument et uniformément convergente dans  $(\Omega_1, (0, \infty))$ ; la somme de cette série, dite noyau résolvant  $({}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta))$ , est absolument intégrable dans  $(\Omega_1, (0, \infty))$ , à savoir nous avons pour chaque  $x, y \in \Omega, t > \tau \geq 0, z \in \Omega_1 = \Omega - y$  et  $|A| > A_0$ :

$$(4.1) \quad (|{}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta)|) < 1/M,$$

$$(4.2) \quad \int_0^\infty \int_{\Omega_1} (|{}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta)|) dz d\theta < 1/M.$$

Remarque 4.1. Il résulte de la remarque 2.1 et de la formule (4.4) que la matrice  $({}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta))$  est formée de polynômes, par rapport à la variable  $z$ , ou  $x$ , d'ordre  $(2b - n)$ , les coefficients de ces polynôme dépendant des variables  $y, \tau$  et  $\theta$ .

Le lemme 6.2 du travail [2] est facilement applicable au noyau  $({}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta))$ . Nous rappellerons seulement le système d'équations de Lévy de la solution fondamentale. A savoir on a, d'accord avec les formules (1.10), (1.13), (1.9) et (1.15):

$$(4.3) \quad \begin{aligned} &({}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta)) \\ &= ({}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta)) + \int_{\tau}^t \int_{\Omega} ({}_A\mathcal{N}^{(v, \xi)}(x, t, v, \xi)) ({}_A\Phi^{(y, \tau)}(v, \xi, y, \tau)) dv d\xi \\ &= ({}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta)) + \int_{\tau}^t \int_{\Omega} ({}_A\mathcal{N}^{(v, \xi)}(x - v, t - \xi)) ({}_A\Phi^{(y, \tau)}(v - y, \xi - \tau)) dv d\xi. \end{aligned}$$

En posant  $v = y + u, \Omega - y = \Omega_1, \xi = \tau + \zeta$ , on trouve:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} &({}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta)) \\ &= ({}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta)) + \int_0^\theta \int_{\Omega_1} ({}_A\mathcal{N}^{(u+v, \zeta+\tau)}(z - u, \theta - \zeta)) ({}_A\Phi^{(y, \tau)}(u, \zeta)) du d\zeta. \end{aligned}$$

Le raisonnement du travail [2] peut maintenant être repris: il faut seulement remplacer la matrice  $({}_A\mathcal{N}(z, \theta))$  par la matrice  $({}_A\mathcal{N}^{(y, \tau)}(z, \theta))$ ,  $({}_A\mathcal{N}(z - u, \theta - \zeta))$  par  $({}_A\mathcal{N}^{(u+v, \zeta+\tau)}(z - u, \theta - \zeta))$ ,  $({}_A\Phi(u, \zeta))$  par  $({}_A\Phi^{(y, \tau)}(u, \zeta))$  et  $\Omega$  par  $\Omega_1$ .

L'inégalité 6.7 du travail [2] prend la forme

$$(4.5) \quad (|{}_A\Phi^{(y, \tau)}(z, \theta)|) \leq B_0 \theta^{-(1+n/2b)} = O(\theta^{-(1+n/2b)}),$$

le coefficient  $B$  étant indépendant du nombre  $|A|$ .

Le lemme 6.2 du travail [2] peut être exprimé sous forme du

LEMME 4.2. Le noyau résolvant  $({}_A\Phi^{(v,\tau)}(z, \theta))$ , défini par la formule (1.15), étant un polynôme par rapport à la variable  $z$ , est dérivable par rapport à la variable  $x$ ; il est d'ordre  $O(\theta^{-(1+n/2b)})$ ,  $\theta \rightarrow \infty$ , dès que  $|A| > A_0$ ,  $x, y \in \Omega$ ,  $z \in \Omega - y = \Omega_1$ ,  $t > \tau \geq 0$ ,  $\theta = t - \tau > 0$ .

On démontrera que

$$(4.6) \quad \int_0^\infty ({}_A\Phi^{(v,\tau)}(z, \theta)) d\theta = 0$$

en intégrant l'égalité (4.4). En effet, il résulte du lemme 3.4 et de la formule (3.4) que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ({}_A\Phi^{(v,\tau)}(z, \theta)) d\theta &= \int_0^\infty \int_0^\theta \int_{\Omega_1} ({}_A\mathcal{N}^{(u+v,\zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) ({}_A\Phi^{(v,\tau)}(u, \zeta)) du d\zeta d\theta \\ &= \int_{\Omega_1} \int_0^\infty \int_\zeta^\infty ({}_A\mathcal{N}^{(u+v,\zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) ({}_A\Phi^{(v,\tau)}(u, \zeta)) d\theta d\zeta du \\ &= \int_{\Omega_1} \int_0^\infty \int_0^\infty ({}_A\mathcal{N}^{(u+v,\zeta+\tau)}(z-u, \theta_1)) d\theta_1 ({}_A\Phi^{(v,\tau)}(u, \zeta)) d\zeta du = 0, \end{aligned}$$

car l'intégrale par rapport à  $\theta_1$  est égale à zéro, d'accord avec la formule (3.4).

Il nous faut encore évaluer les modules des dérivées du noyau résolvant  $({}_A\Phi^{(v,\tau)}(z, \theta))$ . La formule (4.6) donne pour  $l = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} (4.7) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} ({}_A\Phi^{(v,\tau)}(z, \theta)) &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} {}_A\mathcal{N}^{(v,\tau)}(z, \theta) \right) + \\ &+ \int_0^\theta \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} {}_A\mathcal{N}^{(u+v,\zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta) \right) ({}_A\Phi^{(v,\tau)}(u, \zeta)) du d\zeta \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} ({}_A\mathcal{N}^{(v,\tau)}(z, \theta)) + \int_0^{\theta/2} \int_{\Omega_1} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} {}_A\mathcal{N}^{(u+v,\zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta) \right) ({}_A\Phi^{(v,\tau)}(u, \zeta)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_1} ({}_A\mathcal{N}^{(u+v,\tau-\zeta)}(z-u, \zeta)) ({}_A\Phi^{(v,\tau)}(u, \theta-\zeta)) \right] du d\zeta. \end{aligned}$$

Pour évaluer le module de la dérivée (4.7) appliquons les lemmes 3.2, 4.1 et 4.2. Nous trouvons pour  $l = 1, \dots, n$ :

$$(4.8) \quad \left| \left( \frac{\partial {}_A\Phi^{(v,\tau)}(z, \theta)}{\partial x_1} \right) \right| \leq C_0/\theta^{1+(n+1)/2b} + 2^{1+(n+1)/2b} C_0/\theta^{1+(n+1)/2b} M + \\ + B_0/2M \theta^{1+n/2b}, \quad |A| > A_0.$$

Les constantes  $C_0, A_0$  et  $B_0$  sont définies dans le lemme 3.2. et par la formule (4.5) et comme telles ne dépendent que des coefficients de l'opérateur (1.3) et de la grandeur du domaine  $\Omega_1$ . Nous pouvons donc écrire pour  $l = 1, \dots, n$ , en posant  $B_1 = \max(C_0, 2^{1+(n+1)/2b} C_0/M, B_0/2M)$

$$(4.9) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_1} {}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta) \right| \leq B_1 / \theta^{1+n/2b} = O(\theta^{-(1+n/2b)}), \quad |A| > A_0,$$

où les constantes  $A_0$  et  $B_1$  ne dépendent que des coefficients de l'opérateur (1.3) et de la grandeur du domaine  $\Omega_1$ .

5. Écrivons maintenant la formule (1.8) en nous basant sur les formules (1.17), (1.15) et (1.16):

$$({}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta)) = ({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta)) + \\ + \int_{\tau}^t \int_{\Omega} ({}_A \mathcal{G}^{(v, \xi)}(x-v, t-\xi)) ({}_A \Phi^{(y, \tau)}(v-y, \xi-\tau)) dv d\xi$$

ou en posant  $\xi = \tau + \zeta$ ,  $v = y + u$ ,  $\Omega - y = \Omega_1$ :

$$(5.1) \quad ({}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta)) = ({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta)) + \\ + \int_0^{\theta} \int_{\Omega_1} ({}_A \mathcal{G}^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) ({}_A \Phi^{(y, \tau)}(u, \zeta)) du d\zeta.$$

Cette formule est analogue à la formule (7.1) du travail [2], où il faut seulement remplacer la matrice  $({}_A G(z, \theta))$  par  $({}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta))$ ,  $({}_A \mathcal{G}(z, \theta))$  par  $({}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta))$ ,  $({}_A \mathcal{G}(z-u, \theta-\zeta))$  par  $({}_A \mathcal{G}^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta))$ ,  $({}_A \Phi(u, \zeta))$  par  $({}_A \Phi^{(y, \tau)}(u, \zeta))$  et  $\Omega$  par  $\Omega_1$ . À présent on peut poursuivre les raisonnements de la partie 7 du travail [2] et énoncer le

**THÉORÈME 5.1.** *Dès que le point  $A = (a_1, \dots, a_n)$  se trouve en dehors de la sphère  $K(0, A_0)$ ,  $A_0$  étant défini dans le lemme 3.1, alors la solution fondamentale spéciale de l'opérateur  $L_0$ , défini par la formule (1.3), dans le domaine  $(\Omega, (0, \infty))$ , tel que  $\Omega - y = \Omega_1 \in K(0, r/3) \in \mathbb{R}^n$ ,  $({}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta))$ ,  $x, y \in \Omega$ ,  $z \in \Omega_1$ ,  $\theta = t - \tau > 0$ , est  $O(\theta^{-(1+1/2b)})$ ,  $\theta \rightarrow \infty$ , où  $2b$  désigne l'ordre de l'opérateur  $L_0$ .*

D'une façon analogue nous avons les mêmes énoncés que dans la partie 7 du travail [2], à savoir la

**Remarque 5.1.** La singularité spatiale de la s.f.s.  $({}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta))$  de l'opérateur  $L_0$  est la même que celle de la q.s.s. de cet opérateur, c'est-à-dire que:

$$(5.2) \quad (|D^{(m)} {}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta)|) \\ \leq \text{const } \theta^{-\mu} |z|^{-(n+|m|-2b\mu)}, \quad \theta > 0, 1 - 1/2b < \mu < 1, |A| > A_0.$$

Cette singularité est faible pour  $|m| = 0, 1, \dots, (2b-1)$ .

De la remarque 5.1 et du théorème 5.1 résulte le

THÉORÈME 5.2. La s.f.s.  $({}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta))$  mentionnée dans le théorème 5.1 est intégrable par rapport à l'accroissement du temps  $\theta$  sur l'axe infini  $(0, \infty)$ ,  $z \neq 0$ ; elle est aussi intégrable sur le cylindre infini  $(\Omega_1, (0, \infty))$ ,  $z \in \Omega_1$ ,  $y \in \Omega$ ,  $\tau \geq 0$ .

En différentiant par rapport à la variable spatiale  $x$  les deux membres de l'égalité (5.1) on a pour  $|m| \leq 2b - 1$ :

$$(5.3) \quad (D^{(m)} {}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta)) \\ = (D^{(m)} {}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta)) + \int_0^\theta \int_{\Omega_1} (D^{(m)} {}_A \mathcal{G}^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) ({}_A \Phi^{(y, \tau)}(u, \zeta)) du d\zeta,$$

car, comme on l'a dit dans la remarque 5.1, la dérivée sous le signe de l'intégrale est à faible singularité spatiale. Dans le cas où  $|m| = 2b$ , la singularité spatiale est forte, mais l'intégrale existe, si la matrice du noyau résolvant est holdérienne par rapport à la variable  $z$ . Nous savons qu'elle l'est, à cause de la remarque 4.1. Nous avons donc pour  $|m| \leq 2b$  la même égalité (5.3).

Dans le cas où  $|m| \leq 2b - 1$ , nous décomposons l'intégrale par rapport à  $\zeta$  en somme de deux intégrales sur les intervalles  $(0, \theta/2)$  et  $(\theta/2, \theta)$  et nous trouvons à cause des inégalités (2.7) et (4.5):

$$(5.4) \quad (|D^{(m)} {}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta)|) \\ = \begin{cases} O(\theta^{-(1+1/2b)}), & |m| \leq 2b - n + 1, \\ O(\theta^{-(1+(1+p)/2b)}) + O(\theta^{-(1+n/2b)}), & |m| = 2b - n + 1 + p, \quad 0 < p < n - 1, \end{cases}$$

mais dans ce dernier cas  $1 + p < n$ , donc on a:

$$(5.5) \quad (|D^{(m)} {}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta)|) \\ = \begin{cases} O(\theta^{-(1+1/2b)}), & |m| \leq 2b - n + 1, \\ O(\theta^{-(1+(1+p)/2b)}), & |m| = 2b - n + 1 + p, \quad 0 < p < n - 1. \end{cases}$$

Le cas où  $|m| = 2b$ , donc  $p = n - 1$ , doit être traité comme il suit. On peut écrire:

$$(5.6) \quad (D^{(m)} {}_A G^{(y, \tau)}(z, \theta)) = (D^{(m)} {}_A \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta)) + \\ + \int_0^\theta \int_{\Omega_1} (D^{(m)} {}_A \mathcal{G}^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) ({}_A \Phi^{(y, \tau)}(u, \zeta) - {}_A \Phi^{(y, \tau)}(z, \zeta)) du d\zeta + \\ + \int_0^\theta \int_{\Omega_1} (D^{(m)} {}_A \mathcal{G}^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) du ({}_A \Phi^{(y, \tau)}(z, \zeta)) d\zeta = i_1 + i_2 + i_3.$$

Nous avons pour le premier membre de la formule (5.6), d'accord avec la formule (2.7):

$$(5.7) \quad i_1 = O(\theta^{-(1+n/2b)});$$

d'accord avec l'égalité (2.5) cette évaluation ne dépend pas du nombre  $|A| > A_0$ .

Ecrivons l'intégrale  $i_2$  comme il suit:

$$(5.8) \quad i_2 = \int_0^{\theta/2} \int_{\Omega_1} (D^{(m)} A \mathcal{G}^{(u+v, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) [({}_A \Phi^{(v, \tau)}(u, \zeta)) - ({}_A \Phi^{(v, \tau)}(z, \zeta))] + \\ + (D^{(m)} A \mathcal{G}^{(u+v, \zeta-\tau)}(z-u, \zeta)) [({}_A \Phi^{(v, \tau)}(u, \theta-\zeta)) - ({}_A \Phi^{(v, \tau)}(z, \theta-\zeta))] du d\zeta \\ = i_{21} + i_{22}.$$

L'inégalité (2.7) et le lemme 4.2 donnent:

$$(5.9) \quad i_{21} = O(\theta^{-(1+n/2b)}).$$

Cette évaluation est en vertu des égalités (2.5) et (4.5) indépendante du nombre  $|A| > A_0$ .

L'intégrale  $i_{22}$  prend la forme:

$$i_{22} = \int_0^{\theta/2} \int_{\Omega_1} (D^{(m)} A \mathcal{G}^{(u+v, \zeta-\tau)}(z-u, \zeta))(z-u) \times \\ \times ({}_A \Phi'(u-\eta(u-z), \theta-\zeta)) du d\zeta, \quad |\eta| < 1,$$

d'où l'on tire à cause des formules (4.9), (2.7) pour  $p = n-1$  et (2.8) pour  $|m| = 2b$ :

$$i_{22} = O(\theta^{-(1+n/2b)}).$$

Pour évaluer l'intégrale  $i_3$  il faut la transformer de même que l'intégrale  $i_2$  dans la formule (5.8). La première de ces intégrales admet l'évaluation (5.9). La seconde par intégrée par parties, nous donne une intégrale sur le bord du domaine  $\Omega_1$ , mais comme le point  $z$  se trouve à l'intérieur de ce domaine, cette intégrale est bornée, et la matrice  $({}_A \Phi^{(v, \tau)}(z, \theta-\zeta))$  pour  $0 < \zeta < \theta/2$  admet l'évaluation (4.5). L'intégrale  $i_3$  est donc évaluée comme l'intégrale  $i_2$ . Nous trouvons ainsi

$$(5.10) \quad (D^{(m)} A G^{(v, \tau)}(z, \theta)) \leq O(\theta^{-(1+n/2b)}), \quad |m| = 2b,$$

où la constante de l'évaluation ne dépend que des coefficients de l'opérateur  $L_0$  et de la grandeur du domaine  $\Omega_1$ , dès que  $|A| > A_0$ , d'accord avec les formules (5.6), (5.7) (5.8) et (5.9). Nous avons donc, comme dans le travail [2] le

**COROLLAIRE 5.1.** La s.f.s.  $({}_A G^{(v, \tau)}(z, \theta))$  de l'opérateur  $L_0(D, \partial/\partial\theta)$ , construite pour  $|A| > A_0$  ( $A_0$  est défini dans le lemme 3.1) vérifie les même inégalités que la q.s.s. de cet opérateur, en supposant cependant que  $|m| \leq 2b$ . Ce sont donc les inégalités (5.2), (5.5) et (5.10).

Les constantes des évaluations ne dépendent pas du nombre  $|A|$ .

Observons qu'en vertu de la formule (2.5), valable pour  $|m| > 2b - n$ , on peut remplacer dans la formule (5.3) la dérivée de la q.s.s. par la dérivée de q.s., de sorte que nous avons pour  $|m| > 2b - n$ :

$$(5.11) \quad (D^{(m)} \mathcal{A} G^{(y, \tau)}(z, \theta)) \\ = (D^{(m)} G^{(y, \tau)}(z, \theta)) + \int_0^\theta \int_{\Omega_1} (D^{(m)} G^{(u+y, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) (\mathcal{A} \Phi^{(y, \tau)}(u, \zeta)) du d\zeta, \\ |m| > 2b - n, \quad x, y \in \Omega, \quad \theta > 0.$$

Rappelons aussi que la q.s. est transformable par la méthode de Fourier ( $F$ -transformable). Cette transformée ( $\hat{G}$ ) est égale à la solution (v) d'un système bien connu d'équations linéaires (voir par exemple [2], formules (1.7), (1.8) et (1.9)). Les dérivées de la q.s. sont aussi  $F$ -transformables. On peut facilement les exprimer au moyen de la même solution (v) (voir par exemple [8], p. 14).

Nous voyons donc que la matrice (5.11) est  $F$ -transformable. Dans le cas où les coefficients de l'opérateur  $L_0$  sont indépendants de la variable-temps, l'intégrale de la matrice (5.11) sur l'axe infini de l'accroissement du temps est égale à la même intégrale de la dérivée de la q.s., à savoir:

$$(5.12) \quad \int_0^\infty (D^{(m)} \mathcal{A} G^{(y, \tau)}(z, \theta)) d\theta = \int_0^\infty (D^{(m)} G(z, \theta)) d\theta, \quad m > 2b - n,$$

et

$$(5.13) \quad \int_0^\infty (D^{(m)} \mathcal{A} G^{(y, \tau)}(z, \theta)) d\theta = \int_0^\infty (D^{(m)} \mathcal{A} \mathcal{G}^{(y, \tau)}(z, \theta)) d\theta, \quad m = 0, 1, 2b - n.$$

Ces deux formules résultent immédiatement de la formule (4.6).

On peut donc énoncer le

LEMME 5.1. *Les hypothèses du théorème 5.1 étant admises, les dérivées spatiales d'ordre  $m$ ,  $|m| > 2b - n$ , de la s.f.s. de l'opérateur  $L_0$  sont égales aux mêmes dérivées de la q.s. de cet opérateur  $L_0$  et de ses pseudo-convolutions avec le noyau  $(\mathcal{A} \Phi^{(y, \tau)})$ . Ces dérivées sont  $F$ -transformables. Leurs intégrales sur l'axe infini de l'accroissement  $\theta$  sont indépendantes du nombre  $|A| > A_0$  dans le cas où les coefficients de l'opérateur  $L_0$  ne dépendent pas de la variable-temps.*

Nous démontrerons encore le

THÉORÈME 5.3. *La s.f.s.  $(\mathcal{A} G^{(y, \tau)}(z, \theta))$  de l'opérateur  $L_0$  vérifie le théorème de Poisson, à savoir on a:*

$$(5.14) \quad L_0(D, \partial/\partial\theta)[\mathcal{A} G \times \varphi] = -(\varphi),$$



dès que  $(\varphi) \in C^{\alpha,0}$ ,  $\alpha > 0$  et  $|A| > A_0$ , où on peut écrire comme dans la formule (1.16):

$$[_A G \times \varphi] = \int_0^\theta \int_{\Omega_1} (_A G^{(u+v, \zeta+\tau)}(z-u, \theta-\zeta)) (\varphi(u, \zeta)) du d\zeta,$$

$$z \in \Omega_1, y \in \Omega, \theta = t - \tau.$$

La démonstration résulte des définitions (1.8), (1.5) des formules (1.16) et (4.3) aussi bien que des lemmes 2.2 et 3.3. Nous avons donc:

$$[_A \mathcal{N} \times _A \Phi] = (_A \Phi^{(v, \tau)}(z, \theta)) - (_A \mathcal{N}^{(v, \tau)}(z, \theta)),$$

alors:

$$\begin{aligned} L_0 \left( D, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [_A G \times \varphi] &= L_0 \left( D, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [(_A \mathcal{G} + [_A \mathcal{G} \times _A \Phi]) \times \varphi] \\ &= -(\varphi(z, \theta)) + [_A \mathcal{N} \times \varphi] + L_0 \left( D, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [_A \mathcal{G} \times [_A \Phi \times \varphi]] \\ &= -(\varphi(z, \theta)) + [_A \mathcal{N} \times \varphi] - [_A \Phi \times \varphi] + [_A \mathcal{N} \times _A \Phi] \times \varphi \\ &= -(\varphi(z, \theta)) + [_A \mathcal{N} \times \varphi] - [_A \Phi \times \varphi] + [(_A \Phi - _A \mathcal{N}) \times \varphi] = -(\varphi(z, \theta)), \end{aligned}$$

c.q.f.d.

6. Ayant d'étudier la matrice de la s.f.s. de l'opérateur  $L_0$ , nous pouvons étudier la matrice  $(_A \Gamma)$  — s.f.s. de l'opérateur (1.1). Il faut donc passer à la pseudo-convolution de la formule (1.18), c'est-à-dire au noyau  $(_A F)$  de la formule (1.19), donc d'abord au noyau  $(_A N)$ , défini par la formule (1.20). Ainsi cette partie sera consacrée au noyau  $(_A N(x, t, y, \tau)) = (_A N^{(v, \tau)}(z, \theta))$ .

LEMME 6.1. *La singularité spatiale du noyau  $(_A N^{(v, \tau)}(z, \theta))$  est faible, à savoir*

$$(6.1) \quad |(_A N^{(v, \tau)}(z, \theta))| < C \theta |z|^{-(n+2b(1-\mu)-h)}, \quad 1 - h/2b < \mu < 1,$$

$C$  ne dépend pas de  $A$ ,  $h \min(\alpha, 2b\beta)$ .

C'est une simple conséquence de la définition (1.20), de l'hypothèse (1.2) et de la formule (5.2) dans le cas où  $|m| = 2b$ .

Il résulte de cette définition (1.20) et des formules (5.3) et (2.5) que si l'opérateur (1.1) est à coefficients constants, d'ordre plus élevé que  $2b - n$ , le noyau  $(_A \mathcal{N})$  est égal à:

$$(6.2) \quad (_A N^{(x, \tau)}(z, \theta)) = \sum_{2b-n < |k| < 2b} (A^{(k)}) (D^{(k)} G^{(v, \tau)}(z, \theta) + [D^{(k)} G \times _A \Phi]),$$

ce noyau est donc  $F$ -transformable.

Il est trivial, que dans le cas où  $|k| = 2b$  et les coefficients sont constants,  $(_A \mathcal{N}) \equiv 0$ , et alors  $(_A \Gamma) = (_A \mathcal{G})$ , comme il le faut. Dans le cas où  $|k| = 2b$  et les coefficients sont variables on trouve, d'accord avec

l'inégalité (5.10)  $(\mathcal{A}N) = O(\theta^{-(1+n/2b)})$ . Dans le cas général nous trouvons d'accord avec le théorème 5.1:

$$(6.3) \quad (\mathcal{A}N) = O(\theta^{-(1+1/2b)}).$$

Le théorème auxiliaire 2 de W. Pogorzelski (travail [8]), appliqué à la décomposition (2.3) en tenant compte de la formule (5.3), donne:

$$(6.4) \quad (|\mathcal{A}N(x, t, y, \tau) - \mathcal{A}N(x', t, y, \tau)|) \\ \leq \text{const} |x - x'|^{a'} / \inf_{x, x' \in \Omega} |x - y|^{n+2b}, \quad a' < a, x, y \in \Omega.$$

Ainsi nous pouvons énoncer le

LEMME 6.2. *Les hypothèses (1.1) et (1.2) étant admises, le noyau  $(\mathcal{A}N)$  du système (1.1) est d'ordre  $O(\theta^{-(1+1/2b)})$ ,  $\theta \rightarrow \infty$ ; il est höldérien par rapport à la variable spatiale  $x \in \Omega$ , dès que  $|A| > A_0$ ,  $A_0$  étant défini le lemme 3.1. Dans le cas particulier où l'opérateur (1.1) est homogène ( $|k| = 2b$ ), nous trouvons  $(\mathcal{A}N) = O(\theta^{-(1+n/2b)})$ , et dans le cas d'un opérateur à coefficients constants, à dérivées d'ordres plus élevés que  $(2b - n)$ , ce noyau est  $F$ -transformable.*

LEMME 6.3. *Dans le cas où les coefficients de l'opérateur  $L$  ne dépendent pas de la variable-temps, c'est-à-dire  $A^{(k)}(x, t) = A^{(k)}(x)$ ,  $|k| \leq 2b$ , on a:*

$$(G^{(y, \tau)}(z, \theta)) = (G^{(y)}(z, \theta)), \quad (\mathcal{A}G^{(y, \tau)}(z, \theta)) = (\mathcal{A}G^{(y)}(z, \theta))$$

et alors:

$$(6.5) \quad \int_0^\infty (\mathcal{A}N) d\theta = \sum_{|k|=2b} (A^{(k)}(x) - A^{(k)}(y)) \int_0^\infty (D^{(k)}G^{(y)}(z, \theta)) d\theta + \\ + \sum_{2b-n < |k| < 2b} (A^{(k)}(x)) \int_0^\infty (D^{(k)}G^{(y)}(z, \theta)) d\theta + \\ + \sum_{|k| \leq 2b-n} (A^{(k)}(x)) \int_0^\infty (D^{(k)}\mathcal{A}G^{(y)}(z, \theta)) d\theta,$$

$|A| > A_0$ ,  $A_0$  étant défini dans le lemme 3.1.

La formule (6.5) est une conséquence immédiate de la définition (1.20) et des formules (5.12) et (5.13).

COROLLAIRE 6.1. *Les hypothèses du lemme 6.3 étant admises, dans le cas où l'opérateur (1.1) ne contient que des dérivées d'ordre plus élevé que  $2b - n$ , l'intégrale du noyau  $(\mathcal{A}N)$ , par rapport au temps  $\theta > 0$ , ne dépend pas du nombre  $|A|$ , à savoir:*

$$(6.6) \quad \int_0^\infty (\mathcal{A}N) d\theta = \sum_{|k|=2b} (A^{(k)}(x) - A^{(k)}(y)) \int_0^\infty (D^{(k)}G^{(y)}(z, \theta)) d\theta + \\ + \sum_{2b-n < |k| < 2b} (A^{(k)}(x)) \int_0^\infty (DG^{(k)}(z, \theta)) d\theta.$$

Cette intégrale est égale à zéro dans le cas où l'opérateur (1.1) est homogène à coefficients constants.

Cependant l'hypothèse que la mesure du domaine  $\Omega$  soit finie est essentielle pour que l'intégrale

$$(6.7) \quad \int_0^\infty \int_{\Omega_1} ({}_A N(z, \theta)) dz d\theta$$

existe. Il peut arriver par exemple, que l'intégrale (6.7) n'existe pas dans un demi-plan.

EXEMPLE 6.1. Soit

$$n = 2, \quad 2b = 2, \quad P = \Delta - \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

alors

$$A^{(1,0)}(x, t) = -1, \quad A^{(1,0)}(x, t) = 0, \quad A^{(2,0)}(x, t) = A^{(0,2)}(x, t) = 1, \\ A^{(1,1)}(x, t) = 0,$$

$$G(z, \theta) = 1/4\pi\theta \exp -|z|^2/4\theta, \quad \theta = t - \tau > 0, \quad z = x - y, \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

$$G'_{z_i}(z, \theta) = -z_i/8\pi\theta^2 \exp -|z|^2/4\theta, \quad i = 1, 2,$$

$$\int_0^\infty ({}_A N) d\theta = \int_0^\infty \left( \frac{z_1}{8\pi\theta^2} \exp -|z|^2/4\theta \right) d\theta = z_1/|z|^2 2\pi,$$

et

$$\int_{z_2 > 0} \int_0^\infty ({}_A N) d\theta = z_1/2\pi \int_{z_2 > 0} \frac{dz_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} = 1/2\pi \int_{z_2 > 0} \frac{dz_2}{\sqrt{1 + (z_2/z_1)^2}} \\ = z_1/2\pi \int_{uz_1 > 0} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

n'existe pas.

On voit donc que l'hypothèse que  $|\Omega|$  soit fini est nécessaire.

7. Le noyau résolvant  $({}_A P)$ , défini par la formule (1.18) a été étudié dans la partie 8 du travail [2]. On rappellera donc ici les résultats.

HYPOTHÈSE (7.1). On suppose que

$$(7.1) \quad \int_0^\infty \int_{\Omega} (|{}_A N|) dy d\theta \leq b_0/M < 1/M, \quad x \in \Omega, \quad t > \tau \geq 0,$$

où  $b_0$  est une constante et le point fixe  $A$  est assujéti à l'inégalité  $|A| > A_0$ ,  $A_0$  est défini par la formule (3.14).

**THÉORÈME 7.1.** *Les hypothèses (1.1), (1.2) et (7.1) étant admises, la série (1.19),  $({}_A F)$  — dite noyau résolvant — et la solution du système intégral de Lévy:*

$$(7.2) \quad ({}_A F) = ({}_A N) + [{}_A N \times {}_A F]$$

*est absolument convergente dans le domaine  $(\Omega, (0, \infty))$ , où elle est absolument intégrable. La matrice  $({}_A F)$  est höldérienne par rapport à la variable spatiale  $x$ ; par rapport à l'accroissement du temps  $\theta = t - \tau$  elle est  $O(\theta^{-(1+1/2b)})$ .*

Il résulte facilement du corollaire 5.1 et théorème 7.1 que la matrice  $({}_A \Gamma)$ , définie par la formule (1.18), vérifie le

**THÉORÈME 7.2.** *Les hypothèses (1.1), (1.2) et (7.1) étant admises, la matrice (1.18),  $({}_A \Gamma)$ , satisfait aux formules suivantes:*

$$(7.3) \quad (|D^{(m)} {}_A \Gamma(x, t, y, \tau)|) \leq \text{const } \theta^{-\mu} |z|^{-(n+m-2b\mu)},$$

$$0 < \theta = t - \tau, \quad x, y \in \Omega, \quad 1 - 1/2b < \mu < 1, \quad m = 0, \dots, 2b;$$

$$(7.4) \quad ({}_A \Gamma) = O(\theta^{-(1+1/2b)}), \quad \theta \rightarrow \infty;$$

$$(7.5) \quad L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)({}_A \Gamma) \equiv 0, \quad x, y \in \Omega, \quad t > \tau \geq 0, \quad x \neq y;$$

$$(7.6) \quad L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)[{}_A \Gamma \times \varphi] = -(\varphi),$$

dès que  $(\varphi) \in C^{a,0}$ ,  $a > 0$ .

Les deux dernières égalités signifient que  $({}_A \Gamma)$  est la s.f. du système (1.1). Elles sont démontrées dans la partie 8 du travail [2].

**8.** Dans le travail [2] on n'a pas étudié le cas particulier où les coefficients de l'opérateur (1.1) sont indépendants de la variable-temps. Dans ce cas on peut écrire  $({}_A \Gamma) = ({}_A \Gamma(x, y, \theta))$ . On a démontré dans le travail [3], où la matrice  $({}_A \Gamma(x, y, \theta))$  est la s.f. du système particulier (1.1):

$$(8.1) \quad L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right) = P(D) - \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{|k| \leq 2b} A^{(k)}(x) D^{(k)} - \frac{\partial}{\partial t}$$

et où elle est construite au moyen de la q.s.s. de ce système, qu'on a:

$$(8.2) \quad ({}^A \Gamma) = ({}_A \mathcal{G}^{(v)}) + [{}_A \mathcal{G} \times {}^A F],$$

où  $({}^A F)$  est le noyau résolvant du système (8.1), donc:

$$(8.3) \quad ({}^A F) = \sum_{l=1}^{\infty} ({}^A N^{(l)}),$$

$({}^A N^{(l)})$  est le  $l$ -ième noyau itéré du noyau

$$(8.4) \quad ({}^A N) = \sum_{|k| \leq 2b} (A^{(k)}(x)) (D^{(k)} {}_A \mathcal{G}^{(v)}).$$

On a démontré dans les parties de 5 à 10 du travail [3] qu'on a, en posant

$$(8.5) \quad \int_0^\infty ({}_A \mathcal{G}^{(v)}) d\theta = ({}_A g^{(v)}),$$

$$(8.6) \quad \int_0^\infty ({}_A N) d\theta = ({}_A n)$$

et pour le  $l$ -ième noyau itéré du noyau  $({}_A n) - ({}_A n^{(l)})$ ,  $l = 1, \dots$ :

$$(8.7) \quad \int_0^\infty ({}_A F) d\theta = \sum_{l=1}^\infty ({}_A n^{(l)}) = ({}_A f),$$

$$(8.8) \quad \int_0^\infty ({}_A \Gamma) d\theta = ({}_A \gamma) = ({}_A g^{(v)}) + [{}_A g \times {}_A f]$$

et que  $({}_A \gamma)$  est la s.f. du système:

$$(8.9) \quad P(D) = \sum_{k \leq 2b} (A^{(k)}(x)) D^{(k)},$$

c'est-à-dire que:

$$(8.10) \quad P(D)({}_A \gamma) \equiv 0, \quad x \neq y, x, y \in \Omega$$

et que pour  $(\varphi) \in C^{\alpha,0}$ ,  $\alpha > 0$ :

$$(8.11) \quad P(D)[{}_A \gamma \times \varphi] = -(\varphi).$$

Observons que dans le cas du système (8.1) nous avons les égalités (5.12) et (5.13), et que le cas particulier du lemme (6.3), en contexte avec l'égalité (2.5) donne:

$$(8.12) \quad ({}_A g^{(v)}(x, y)) = \int_0^\infty ({}_A G^{(v)}(x, y, \theta)) d\theta,$$

et

$$(8.13) \quad ({}_A n) = \int_0^\infty ({}_A N) d\theta = \int_0^\infty ({}_A N) d\theta = ({}_A n),$$

et comme nous savons (voir partie 4 du travail [3]), que

$$(8.14) \quad ({}_A n^{(l)}) = \int_0^\infty ({}_A N^{(l)}) d\theta, \quad l = 1, \dots$$

et aussi que (la démonstration est la même que plus haut):

$$(8.15) \quad ({}_A n^{(l)}) = \int_0^\infty ({}_A N^{(l)}) d\theta, \quad l = 1, \dots,$$

nous trouvons que dans le cas du système (8.1):

$$(8.16) \quad ({}_A n^{(l)}) = ({}^A n^{(l)}),$$

$$(8.17) \quad ({}^A f) = \int_0^\infty ({}^A F) d\theta = \int_0^\infty ({}_A F) d\theta = ({}_A f),$$

et, comme

$$(8.18) \quad ({}_A \gamma) = \int_0^\infty ({}_A \Gamma) d\theta = \int_0^\infty ({}_A G^{(y)}) d\theta + \left[ \int_0^\infty ({}_A G) d\theta \times \int_0^\infty ({}_A F) d\theta \right],$$

on trouve:

$$(8.19) \quad ({}_A \gamma) = \int_0^\infty ({}_A \Gamma) d\theta = \int_0^\infty ({}_A \mathcal{G}^{(y)}) d\theta + \left[ \int_0^\infty ({}_A \mathcal{G}^{(y)}) d\theta \times \int_0^\infty ({}^A F) d\theta \right] \\ = ({}_A g) + [{}_A g \times {}^A f],$$

d'où et de la formule (8.8) résulte que

$$(8.20) \quad ({}_A \gamma) = \int_0^\infty ({}_A \Gamma) d\theta = \int_0^\infty ({}^A \Gamma) d\theta = ({}^A \gamma), \quad x \neq y, \quad x, y \in \Omega.$$

Nous avons donc le

**THÉOREME 8.1.** *On ne change pas la s.f. du système limite (8.10), si l'on remplace dans la s.f. du système (1.1) la q.s.s.  $({}_A \mathcal{G}^{(y)})$ ,  $|A| > A_0$ , de ce système par la s.f.  $({}_A G^{(y)})$  du système*

$$(8.21) \quad L_0 \left( D, \frac{\partial}{\partial t} \right) = P_0(D) - \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{|k|=2b} (A^{(k)}(y)) D^{(k)} - \frac{\partial}{\partial t},$$

dans le cas particulier où les coefficients du système (1.1) sont indépendant de la variable-temps  $t$ ,  $A_0$  étant défini par la formule (3.14).

**COROLLAIRE 8.1.** *Toutes les propriétés de la s.f. (8.8) du système limite (8.9), aussi bien que du noyau résolvant (8.7) de ce système, ou de son noyau (8.6), énumérées dans le travail [3], subsistent dans le cas où l'on remplace dans la s.f. du système (1.1) la q.s.s. de ce système par la s.f. du système  $L_0$ , ici du système (8.21) dans le cas où les coefficients du système (1.1) ne dépendent pas de la variable-temps  $t$ .*

**Remarque 8.1.** Il résulte aussi de la démonstration du Théorème (1.11) du travail [3] sur la limite du potentiel généralisé spécial de simple couche que ce théorème subsiste pour le même potentiel construit avec la nouvelle s.f., introduite dans le travail [2], ou dans ce travail par la formule (1.18).

**9.** On sait (voir par exemple le travail [8]) que la s.f.  $(\Gamma)$  du système (1.1), soumis aux hypothèses (1.1) et (1.2), est égale à la q.s.  $(G^{(y, \tau)})$  de ce

système, la s.f. du système  $L_0$ , et du reste — la pseudo-convolution de la q.s. et du noyau résolvant  $(F)$  de sorte que

$$(9.1) \quad (\Gamma) = (G^{(y, \tau)}) + [G \times F].$$

Si  $2b < n$  la q.s. est intégrable par rapport à  $\theta$  de zéro à l'infini. Dans le cas où  $n \leq 2b$  l'intégrabilité sera conservée, à condition de poser sous chaque terme de cette formule le symbole  $A$ . On aura :

$$(9.2) \quad ({}_A\Gamma) = ({}_AG^{(y, \tau)}) + [{}_AG \times {}_AF], \quad \text{dès que } |A| > A_0,$$

$A_0$ , étant défini par la formule (3.14).

$(F)$  et  $({}_AF)$  sont les séries des noyaux itérés du noyau du système (1.1), mais  $(F)$  est construit avec la s.f. du système  $L_0(G^{(y, \tau)})$  et  $({}_AF)$ , dans le cas où  $n \leq 2b$ , avec la s.f.s. du même système,  $({}_AG^{(y, \tau)})$ , à savoir les noyaux en question sont :

$$(9.3) \quad (N) = L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)(G^{(y, \tau)}), \quad L_0\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)(G^{(y, \tau)}) \equiv 0, \quad x \neq y,$$

$$(9.4) \quad ({}_AN) = L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)({}_AG^{(y, \tau)}), \quad L_0\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)({}_AG^{(y, \tau)}) \equiv 0, \quad x \neq y.$$

Les propriétés de la continuité spatiale, ou le comportement à la limite,  $\theta \rightarrow \infty$ , sont les mêmes pour les éléments qui se correspondent dans les formules (9.1) (cas où  $n > 2b$ ) et (9.2) (cas où  $n \leq 2b$ ). La différence consiste en ce que la s.f.  $(G^{(y, \tau)})$  est la transformée de Fourier de la matrice solution  $(v)$  du système linéaire lié au système  $L_0$ , tandis que la s.f.s. ne l'est pas. Nous avons

$$(9.5) \quad ({}_AG^{(y, \tau)}) = (G^{(y, \tau)}) - ({}_AP^{(y, \tau)}) + [(G - {}_AP) \times {}_A\Phi],$$

où  $({}_A\Phi)$  est la série des itérés du noyau

$$(9.6) \quad ({}_AN) = L_0\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)(G^{(y, \tau)} - {}_AP^{(y, \tau)}) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}({}_AP^{(y, \tau)}), \quad \theta \neq 0,$$

$({}_AP^{(y, \tau)})$  est un polynôme de degré  $2b - n$  par rapport à la variable spatiale  $z = x - y$ ; en le retranchant du noyau  $(G^{(y, \tau)})$  on assure l'intégrabilité sur l'axe infini du temps  $\theta = t - \tau > 0$  de tous les éléments de la formule (9.2), l'hypothèse (7.1) étant admise. Une pareille hypothèse avait été admise dans le travail (5), afin d'assurer la convergence et l'intégrabilité, sur l'axe infini du temps  $\theta > 0$ , de la série  $(F)$ , de même que celle de la s.f.  $(\Gamma)$ . Rappelons que dans le cas où  $n > 2b$  la matrice  $(G^{(y, \tau)})$  est intégrable. Cette hypothèse était :

$$(9.7) \quad \int_0^\infty \int_\Omega (|N|) dy d\theta < 1/M, \quad x \in \Omega, \quad \theta = t - \tau, \quad t > \tau \geq 0.$$

Dans le cas particulier, traité dans les parties 5 et 6, des opérateurs n'ayant que des dérivées d'ordre plus élevés que  $2b-n$ , on trouve en vertu des formules (1.20), (1.8), (2.5) et du lemme 3.3:

$$\begin{aligned}
 (9.8) \quad ({}_A N) &= L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)\{({}_A \mathcal{G}^{(v,v)}) + [{}_A \mathcal{G} \times {}_A \Phi]\} \\
 &= (L - L_0)({}_A \mathcal{G}^{(v,v)}) + L_0({}_A \mathcal{G}^{(v,v)}) + (L - L_0)[{}_A \mathcal{G} \times {}_A \Phi] + L_0[{}_A \mathcal{G} \times {}_A \Phi] \\
 &= (L - L_0)(G^{(v,v)}) + ({}_A \mathcal{N}^{(v,v)}) + [(L - L_0){}_A \mathcal{G} \times {}_A \Phi] - ({}_A \Phi) + [{}_A \mathcal{N} \times {}_A \Phi] \\
 &= L(G^{(v,v)}) + [(L - L_0)(G) \times {}_A \Phi] = L(G^{(v,v)}) + [L(G) \times {}_A \Phi].
 \end{aligned}$$

Nous avons donc dans ce cas particulier

$$(9.9) \quad ({}_A N) = (N) + [N \times {}_A \Phi].$$

L'hypothèse (7.1) prend dans ce cas particulier la forme:

$$(9.10) \quad \int_0^\infty \int_\Omega |({}_A N) + [N \times {}_A \Phi]| d\theta dy < 1, \quad x \in \Omega, \quad t > \tau \geq 0.$$

Il suffit donc qu'on ait:

$$\text{Max}_{x \in \Omega, t > \tau \geq 0} \int_0^\infty \int_\Omega (|N|) d\theta dy \left(1 + \text{Max}_{\pi \in \Omega, \tau \geq 0} \int_0^\infty (|{}_A \Phi(\pi, \zeta + \tau, y, \tau)|) d\zeta dy\right) < 1.$$

Mais il résulte des raisonnements des parties 5 et 6 du travail [2] qu'en choisissant le nombre  $\mathfrak{A}$  suffisamment grand on peut avoir, au lieu de l'inégalité (4.2):

$$(9.11) \quad \int_0^\infty \int_\Omega (|{}_A \Phi|) d\theta dy < a_0/M, \quad \theta = t - \tau, \quad t > \tau \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

pour chaque nombre  $a_0 > 0$  dès que  $|A| > \mathfrak{A} \geq A_0$ .

Nous avons donc le

THÉORÈME 9.1. *Il existe un nombre tel  $\mathfrak{A}$  que les inégalités*

$$\int_0^\infty \int_\Omega (|N|) d\theta dy < 1/M \quad \text{et} \quad |A| > \mathfrak{A}$$

*impliquent:*

$$\int_0^\infty \int_\Omega (|{}_A N|) d\theta dy < 1/M,$$

*dans le cas où l'opérateur (1.1) ne contient que des dérivées d'ordre plus élevé que  $2b-n$ .*

Remarque 9.1. Le noyau  $({}_A \Phi)$ , étant un polynôme par rapport à la variable spatiale  $x = z - y$ , il peut arriver qu'on puisse, en intégrant par parties, réduire la pseudo-convolution  $[N \times {}_A \Phi]$  à zéro.



Remarque 9.2. L'exemple du travail [4] montre que dans le cas où l'opérateur (1.1) contient des dérivées d'ordres plus petits ou égaux à  $2b - n$  (à savoir pour  $2b = 2$  et  $n = 2$ ) la convergence de la série  $({}_A F)$  n'est que locale.

Du lemme 6.2 et de la formule (6.2) la résulte

Remarque 9.3. Les opérateurs à coefficients constants, qui ne possèdent que des dérivées d'ordres plus élevés que  $2b - n$ , peuvent être étudiés au moyen de la transformée de Fournier-Laplace, comme dans le travail [6].

Les résultats de la partie I du travail [2] nous permettent de formuler le

**THÉOREME 9.2.** *Dans le cas où  $\Omega \in R^n$  et la dimension est impaire, on peut remplacer dans les définitions (1.18), (1.19) et (1.20) de la s.f.s. de l'opérateur (1.1) la s.f.s. de l'opérateur  $L_0$  par sa s.f.m. (solution fondamentale modifiée), en obtenant ainsi la s.f.m. de l'opérateur (1.1). Les évaluations des matrices de la s.f.s. et de la s.f.m. sont les mêmes.*

#### Travaux cités

- [1] S. Cakala, *Solution fondamentale spéciale et modifiée de l'équation de la chaleur avec l'application à la construction de la solution fondamentale d'un système parabolique*, Polish Acad. Sci, Institute of Math. March 1972. No. 37.
- [2] H. Milcer-Grużewska, *Sur les solutions fondamentales spéciales et modifiées*, ibidem, Preprint No. 44, July 1972.
- [3] — *Propriété limite de la matrice du potentiel spécial de simple couche d'un système parabolique d'équations*, Ann. Polon. Math. 14 (1964), p. 209–268.
- [4] — *Sur la solution fondamentale de l'équation de la chaleur dans  $R^2$  d'ordre  $O(\theta^{-3/2})$ , par rapport à la croissance du temps  $\theta$ , et son application à la mécanique des fluides*, Polish Acad. Sci., Institute of Math. Preprint No. 22, October 1971.
- [5] — *Propriété limite de la matrice du potentiel généralisé de simple couche du système parabolique d'équations*, Rend. Circ. Mat. Palermo, S. II., t. 11 (1962), p. 1–25.
- [6] — *Sur l'existence des limites,  $t \rightarrow \infty$ , de solutions des problèmes liés aux systèmes paraboliques*, Polish Acad. Sci., Institute of Math., Preprint No. 7, November 1970.
- [7] — *The foundation of a new solution of the 1-st order Volterra equation*, ibidem, Preprint No. 33, January 1972.
- [8] W. Pogorzelski, *Etude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ricerche Mat. 7 (1958), p. 153–185.

Reçu par la Rédaction le 31. 5. 1973