ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1962)

Sur l'approximation du diamètre transfini

par W. Kleiner (Kraków)

1. Soit C un ensemble connexe, borné et fermé dans le plan complexe, et $\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ son système de points extrémaux de rang n par rapport à la distance, c'est-à-dire un système de n points de C tel que la valeur de l'expression

$$d_n = \sqrt[n(n-1)]{\prod_{i\neq k} |\eta_i - \eta_k|} \tag{1}$$

soit la plus grande. On sait [1] que $d_n \downarrow d = d(C)$; d est dit diamètre transfini de C ([1]). Nous le supposons positif.

On doit à M. F. Leja [2, 3, 4] la construction de la représentation conforme d'un domaine simplement connexe sur un cercle (et de plusieurs autres fonctions remarquables) par sa méthode des points extrémaux, construction pratiquement effective pour une machine 'électronique. Pour étudier l'exactitude des approximations, il faut étudier la convergence de la suite d_n. Si l'on transforme C par la formule $z' = tz$, on a $d'_n = |t| d_n$, $d' = |t| d$; c'est alors l'erreur relative $(d_n - d)/d$ qui nous interessera.

2. Désignons par M la classe des measures positives μ pour lesquelles

$$\mu(C) = 1\,, \quad \mu(E) = 0 \quad \text{si} \quad E\cdot C = 0\,.$$

Il existe [5] une mesure $\eta = \eta_C \in M$ telle que l'intégrale d'énergie

$$I(\mu) = \iint \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta) d\mu(z) \geqslant I(\eta)\,, \quad \mu \in M\,. \tag{2}$$

η est dite mesure d'équilibre ou mesure extrémale sur C.

La mesure $\eta^{(n)}$, défine par

$$\eta^{(n)} \in M\,, \quad \eta^{(n)}(\{\eta_i\}) = 1/n\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

([1]) P. ex., si C est le cercle-unité, $\eta_j = \exp 2\pi i j/n$, $|\eta_1 - \eta_2||\eta_1 - \eta_3| \ldots |\eta_1 - \eta_n| = |P'(\eta_1)| = n$, où $P(z) = (z-\eta_1)\ldots(z-\eta_n) = z^n - 1$; or $d_n = n^{1/(n-1)} \to d = 1$.

est une mesure d'énergie infinie; mais

$$(3)\qquad I_n \underset{\mathrm{df}}{=} \iint\limits_{z\neq\zeta} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\eta^{(n)}(\zeta)\,d\eta^{(n)}(z)$$
$$= \frac{n-1}{n}\log\frac{1}{d_n} \to \log\frac{1}{d} = I(\eta) < \infty\,.$$

La dernière égalité est due à M. G. Szegö [6].

3. Soit K_i une circonférence de rayon $1/n^2$ et de centre η_i, et ϑ_i la mesure d'équilibre sur K_i multipliée par $1/n$; nous pouvons la considérer comme la masse $1/n$ balayée hors du point η_i. Soit $\vartheta = \Sigma\vartheta_i$. On a

$$(4)\qquad I(\vartheta) = \sum_{i,k=1}^{n} I_{ik}\,,\qquad I_{ik} = \iint \log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\vartheta_i(\zeta)\,d\vartheta_k(z)\,.$$

Or

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{n} I_{ii} = \frac{1}{n^2}\sum \log\frac{1}{d(K_i)} = \frac{2\log n}{n}\,.$$

On vérifie sans peine l'inégalité (qui résulte d'ailleurs du théorème du balayage)

$$U_i(z) \underset{\mathrm{df}}{=} \iint \log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\vartheta_i(\zeta) \leqslant \frac{1}{n}\log\frac{1}{|z-\eta_i|}\,,$$

donc

$$(6)\qquad \sum_{i\neq k} I_{ik} = \sum\int U_i(z)\,d\vartheta_k(z) \leqslant \sum \frac{1}{n}\,U_k(\eta_i) = \frac{1}{n^2}\sum \log\frac{1}{|\eta_i-\eta_k|} = I_n\,.$$

En vertu de l'inégalité (voir, p. ex., [7])

$$D = d\Big(C + \sum K_i\Big) \leqslant d(C) + \sum d(K_i) = d + 1/n$$

nous avons

$$(7)\qquad I(\vartheta) \geqslant I(\eta_{C+\Sigma K_i}) = \log\frac{1}{D} \geqslant \log\frac{1}{d+1/n} \geqslant \log\frac{1}{d} - \frac{1}{nd} = I(\eta_C) - \frac{1}{nd}\,;$$

par (7), (4), (5) et (6)

$$I(\eta) - I_n \leqslant 2n^{-1}\log n + (nd)^{-1}\,.$$

Exprimons les intégrales par (3) et rappelons que $d \leqslant d_n$; il suit de là

$$0 \leqslant \log d_n/d \leqslant (2\log n + \log d + 1/d)/(n-1) = M(d)\,.$$

Transformons C par la relation $z' = tz$; on a

$$\log d_n/d = \log d'_n/d' \leqslant M(d') = M(|t|\,d)\,,$$

et si l'on y prend la borne inférieure, égale à $M(1)$, on obtient:

THÉORÈME.

$$1 \leqslant \frac{d_n}{d} \leqslant \sqrt[n-1]{n^2 e}.$$

L'erreur relative satisfait donc à l'inégalité

$$0 \leqslant \frac{d-d_n}{d} \leqslant 1-\sqrt[n-1]{n^2 e} \cong 2\frac{\log n}{n}.$$

4. Si C est le cercle-unité, $I(\eta)-I_n = n^{-1}\log n$. Notre résultat est alors le meilleur au sens qualitatif. On peut espérer que la différence $I-I_n$ soit la plus petite pour un cercle; l'une des formules

$$d(C) \approx d_n / \sqrt[n-1]{n} \qquad \text{ou} \qquad d(C) \approx d_n / \sqrt[2(n-1)]{n^3 e}$$

serait alors à recommander pour les calculs numériques.

Travaux cités

[1] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Math. Zeitschrift 17 (1923), p. 228-249.

[2] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957, 553 p.

[3] — *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 57-71.

[4] — *Sur une suite de polynômes et la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle*, Ann. Soc. Pol. Math. 14 (1935), p. 116-134.

[5] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Thèse pour le doctorat, Lund 1935.

[6] M. M. Schiffer, *Applications of variational methods in the theory of conformal mapping*, Proc. Sympos. Appl. Math. 8 (1959), p. 93-113.

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
UNIVERSITÉ JAGELLONNE
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 20. 12. 1960