ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1962)

# Une propriété des solutions de l'équation linéaire du type parabolique à coefficients non bornés

par M. KRZYŻAŃSKI (Kraków)

*A la mémoire de Mieczysław Biernacki*

**1.** Considérons l'équation linéaire normale du type parabolique

$$(1)\quad \mathcal{F}(u) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X) u''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k(t, X) u'_{x_k} + c(t, X) u - u'_t = f(t, X) \qquad (a_{ij} = a_{ji}) .$$

Nous supposons que les coefficients de l'équation (1) et la fonction $f(t, X)$ sont déterminés dans une couche $0 < t < T_0$, $X \in \mathcal{E}^m$ ($\mathcal{E}^m$ étant l'espace cartésien à $m$ dimensions), les coefficients $a_{ij}(t, X)$ y étant bornés et la forme

$$\mathcal{A}[\Lambda] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X) \lambda_i \lambda_j$$

définie positive. Quant aux coefficients $b_k(t, X)$ et $c(t, X)$ nous admettons l'existence des nombres $A_0$, $B_0$, $A_1 \geqslant 0$ et $B_1 \geqslant 0$ tels que l'on ait

$$(2)\quad c(t, X) \leqslant A_0 |X|^2 + B_0 , \quad |b_k(t, X)| \leqslant A_1 |X| + B_1 \quad (k = 1, \ldots, m) ,$$

où $|X| = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$.

Dans un travail récent [2] j'ai étudié un cas particulier de l'équation (1), à savoir

$$(3)\qquad \Delta u - u'_t + c(t, X) u = 0 ,$$

en appliquant la solution fondamentale de l'équation (3) correspondant au cas où l'on a $c(t, X) = \alpha |X|^2 + \beta$ ($\alpha > 0$), déterminée par A. Szybiak (voir [3]; voir aussi dans [2] une remarque concernant l'observation de A. Szybiak à propos le sujet de cette note) j'ai fait observer que si l'on a $c(t, X) \geqslant a|X|^2+\beta$ $(a > 0)$ et si $u(t, X)$ est une solution de (3) de classe $E_2$ (1), déterminée dans une couche $0 \leqslant t \leqslant T$, $X \in \mathcal{E}^m$, où $T < \min(T_0, \pi/4\sqrt{A_0})$, telle que $u(0, X) \geqslant \mu$, $\mu$ étant une constante positive, alors

$$u(t, X) \geqslant \mu(\cos 2\sqrt{a}t)^{-m/2}\exp\left[\frac{\sqrt{a}}{2}|X|^2 \operatorname{tg} 2\sqrt{a}t+\beta t\right].$$

Dans la présente note nous allons démontrer un théorème concernant une évaluation analogue relative au cas général. (2)

**2.** Nous supposons que les coefficients de l'équation (1) satisfont aux hypothèses précisées au n° 1. Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Nous supposons l'existence des nombres $a > 0$ et $\beta$ tels que l'on ait*

$$a|X|^2+\beta \leqslant c(t, X) \leqslant A_0|X|^2+B_0 \quad \textit{pour} \quad (t, X) \in \Sigma, \tag{4}$$

*$\Sigma$ étant une couche définie par les inégalités $0 \leqslant t \leqslant T$, $X \in \mathcal{E}^m$. Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation* (1) *régulière* (3) *et de classe $E_2$ dans la couche $\Sigma$. Si l'on a $f(t, X) \leqslant 0$ dans l'intérieur $\Sigma^i$ de $\Sigma$ et $u(0, X) \geqslant \mu$ pour $X \in \mathcal{E}^m$, $\mu$ étant un nombre positif, il existe deux nombres $\lambda > 0$ et $\nu$ tels que*

$$u(t, X) \geqslant \mu\exp[\lambda|X|^2t+\nu t] \quad \textit{pour} \quad (t, X) \in \Sigma. \tag{5}$$

Démonstration. Posons

$$u(t, X) = v(t, X)\exp[\lambda|X|^2t+\nu t], \tag{6}$$

$\lambda > 0$ et $\nu$ étant des constantes que nous allons déterminer convenablement dans la suite de la démonstration. La fonction $v(t, X)$ satisfait dans $\Sigma^i$ à une équation de la forme

$$\bar{\mathcal{F}}(v) \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)v''_{x_ix_j}+\sum_{k=1}^{m}\bar{b}_k(t, X)v'_{x_k}+\bar{c}(t, X)v-v'_t = \bar{f}(t, X) \tag{7}$$

où $\bar{f}(t, X) \leqslant 0$ et à la condition initiale

$$v(0, X) = u(0, X) \geqslant \mu. \tag{8}$$

(1) Nous appelons classe $E_2$ une classe de fonctions $F(t, X)$ satisfaisant à une inégalité de la forme $|F(t, X)| \leqslant M\exp K|X|^2$, où $M$ et $K$ sont des constantes non négatives qui dépendent en général de la fonction $F(t, X)$ elle-même.

(2) Je viens d'apprendre qu'un pareil théorème a été démontré par M. P. Besala. Ce théorème concerne une évaluation plus précise, mais l'Auteur y fait des hypothèses plus restrictives. Il sera publié dans un travail de M. P. Besala, qui va paraître au Colloquium Mathematicum.

(3) C'est-à-dire continue dans la couche $\Sigma$ et admettant des dérivées du premier et second ordre par rapport aux variables $x_i$ et une dérivée première par rapport à $t$, continues à l'intérieur de $\Sigma$.

Il est aisé de démontrer moyennant un simple calcul que les coefficients $\bar{b}_k(t, X)$ $(k = 1, \ldots, m)$ et $\bar{c}(t, X)$ satisfont à des conditions analogues à (2), soit

(9) $\bar{c}(t, X) \leqslant \bar{A}_0|X|^2 + \bar{B}_0, \quad |\bar{b}_k(t, X)| \leqslant \bar{A}_1|X| + \bar{B}_1 \quad (k = 1, \ldots, m),$

$\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{A}_1 \geqslant 0$ et $\bar{B}_1 \geqslant 0$ étant des constantes. On a, en particulier

$$\bar{c}(t, X) = 4\lambda^2 t^2 \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_i x_j + 2\lambda t\Big[\sum_{j=1}^{m} a_{jj} + \sum_{k=1}^{m} b_k x_k\Big] - \lambda|X|^2 - \nu + c;$$

il existe un nombre $\mathcal{B} > 0$ tel que l'on a

$$\sum_{k=1}^{m} b_k x_k \geqslant -\mathcal{B}(m + |X|^2),$$

donc

$$\begin{aligned}\bar{c}(t, X) &\geqslant -2\lambda\mathcal{B}T(m + |X|^2) - \lambda|X|^2 - \nu + \alpha|X|^2 + \beta\\ &= (\alpha - \lambda - 2\lambda\mathcal{B}T)|X|^2 + (\beta - \nu - 2\lambda\mathcal{B}mT).\end{aligned}$$

Nous choisissons les nombres $\lambda > 0$ et $\nu$ de façon que l'on ait

$$\alpha - \lambda - 2\lambda\mathcal{B}T \geqslant 0, \quad \beta - \nu - 2\lambda\mathcal{B}mT \geqslant 0.$$

On a alors

(10) $$\bar{c}(t, X) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad (t, X) \in \Sigma^i.$$

Posons ensuite

$$v(t, X) = w(t, X) + \mu.$$

La fonction $w(t, X)$ satisfait, d'après (10), à l'inégalité

(11) $$\bar{\mathcal{F}}(w) = \bar{f}(t, X) - \bar{c}(t, X)\mu \leqslant 0.$$

L'inégalité (8) entraîne l'inégalité

(12) $$w(0, X) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad X \in \mathcal{E}^m.$$

Il résulte de (9), (11), (12) et du théorème 1 de [1] que $w(t, X) \geqslant 0$ dans $\Sigma$, d'où il suit que $v(t, X) \geqslant \mu$. On a donc, en tenant compte de (6), l inégalité (5). Le théorème est ainsi démontré.

## Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation du type parabolique linéaire normale*, Bull. Acad. Polon. Sc., Sér. des Sc. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 131-135.

[2] — *Évaluations des solutions de l'équation linéaire du type parabolique à coefficients non bornés*, Annales Polon. Math. 11 (1961), p. 253-260.

[3] — et A. Szybiak, *Construction et étude de la solution fondamentale de l'équation du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné*, Atti Accad. Naz. Lincei, cl. Sc. fis. mat. e natur., ser. VIII, 27 fasc. 1-2 et 3-4 (1959), p. 1-10.

*Reçu par la Rédaction le 21. 11. 1961*