ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVI (1985)

Применение многомерного логарифмического вычета к теории чисел. Интегральная формула для разности между числом целых точек в области и её объёмом

Л. А. Айзенберг (Красноярск)

Franciszek Leja in memoriam

Резюмэ. В работе с помощью многомерного логарифмического вычета получена простая формула, в которой в виде интеграла по границе области записана разность между числом целых точек в области и её объёмом.

§ 1. Введение. Хорошо известно, какую большую роль сыграли в развитии теории чисел методы теории функций одного комплексного переменного. Данная заметка представляет собой попытку применить к классическим задачам теории чисел методы теории функций многих комплексных переменных. Точнее, речь идет о применении к теории чисел формулы многомерного логарифмического вычета.

Пусть D — ограниченная область пространства C^n комплексных переменных $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z$. Рассмотрим голоморфное в замкнутой области $\bar{D}$ отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и предположим, что граница ∂D кусочно-гладкая и не содержит нулей этого отображения. Тогда хорошо известно (см., например, [1], §2; в этой книге можно найти дальнейшие библиографические указания), что отображение f имеет в D только изолированные нули и число их, если считать каждый нуль столько раз, какова его кратность, выражается формулой многомерного логарифмического вычета

$$(1) \qquad N = N(f, D) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{1}{|f|^{2n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \bar{f}_j d\bar{f}[j] \wedge df,$$

где $|f|^2 = |f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2$, знак $\wedge$ означает внешнее умножение соответствующих дифференциалов, $df = df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$, знак $[j]$ означает, что соответствующий дифференциал (с номером j) пропущен, т.е.

$$d\bar{f}[j] = d\bar{f}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{f}_{j-1} \wedge d\bar{f}_{j+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{f}_n,$$

граница ∂D ориентирована так, что

$$(-1)^n \int_{\partial D} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \bar{z}_j d\bar{z}[j] \wedge dz > 0.$$

С помощью формулы (1) мы получим интегральную формулу для разности между числом целых точек в области и её площадью (объёмом). Ряд классических задач теории чисел (проблема числа целых точек в круге, проблема делителей Дирихле, проблема Виноградова числа целых точек в шаре и др. ...) являются задачами о вычислении асимптотики указанной разности (см., например, [3], [5]).

Таким образом, эти задачи мы сводим к изучению асимптотики указанного ниже интеграла. Данную асимптотику нельзя вычислить простым применением известных методов (Лапласа, стационарной фазы, перевала; об этих методах см. книгу [4]). О вычислении обсуждаемого интеграла будет идти речь в следующей статье.

§2. Случай двумерной области. Пусть Q — ограниченная область плоскости действительных переменных (x_1, x_2) с кусочно-гладкой границей ∂Q, которую мы ориентируем естественным способом. Обозначим $N(Q)$ — число целых точек, лежащих в Q, а $S(Q)$ — площадь Q.

Теорема 1. *Если на границе ∂Q нет целых точек, то разность $N(Q)-S(Q)$ записывается в виде*

(2) $N(Q)-S(Q) =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty dt_1 \wedge dt_2 \int_{\partial Q} \frac{t_2 \sin 2\pi x_1 dx_2 - t_1 \sin 2\pi x_2 dx_1}{(t_1^2 - 2t_1 \cos 2\pi x_1 + t_2^2 - 2t_2 \cos 2\pi x_2 + 2)^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим в C^2 область $D = Q \times G$, где G — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $G \subset R_y^2$, $Q \subset R_x^2$, $(0,0) \in G$, точки $(z_1, z_2) \in D$ имеют вид $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. В качестве отображения, имеющего нули только в целых точках $Q \times (0,0)$, возьмем следующее $f = (f_1, f_2)$, $f_1(z) = e^{2\pi i z_1} - 1$, $f_2 = e^{2\pi i z_2} - 1$.

Тогда из формулы (1) получаем

$$N(Q)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\partial D}\frac{[(\overline{e^{2\pi i z_1}}-1)d\overline{e^{2\pi i z_2}}-(\overline{e^{2\pi i z_2}}-1)d\overline{e^{2\pi i z_1}}]\wedge de^{2\pi i z_1}\wedge de^{2\pi i z_2}}{(|e^{2\pi i z_1}-1|^2+|e^{2\pi i z_2}-1|^2)^2}=$$

$$=-2\pi i\int\limits_{\partial D}\frac{[(e^{-4\pi y_1}-e^{2\pi i(x_1+iy_1)})e^{-4\pi y_2}d\bar z_2-(e^{-4\pi y_2}-e^{2\pi i(x_2+iy_2)})e^{-4\pi y_1}d\bar z_1]\wedge dz}{(e^{-4\pi y_1}-2e^{-2\pi y_1}\cos 2\pi x_1+e^{-4\pi y_2}-2e^{-2\pi y_2}\cos 2\pi x_2+2)^2}.$$

Далее учитывая, что $\partial D=(\partial Q\times G)\cup(Q\times\partial G)$, а

$$d\bar z_2\wedge dz_1\wedge dz_2=-2i dy_2\wedge dx_1\wedge dx_2-2dx_2\wedge dy_1\wedge dy_2,$$

$$d\bar z_1\wedge dz_1\wedge dz_2=-2i dy_1\wedge dx_1\wedge dx_2-2dx_1\wedge dy_1\wedge dy_2,$$

$$N(Q)=$$

$$-4\pi\int\limits_Q dx_1\wedge dx_2\int\limits_{\partial G}\frac{e^{-2\pi(y_1+2y_2)}(e^{-2\pi y_1}-e^{2\pi i x_1})dy_2-e^{-2\pi(2y_1+y_2)}(e^{-2\pi y_2}-e^{2\pi i x_2})dy_1}{(e^{-4\pi y_1}-2e^{-2\pi y_1}\cos 2\pi x_1+e^{-4\pi y_2}-2e^{-2\pi y_2}\cos 2\pi x_2+2)^2}+$$

$$+4\pi i\int\limits_G dy_1\wedge dy_2\times$$

$$\times\int\limits_{\partial Q}\frac{e^{-2\pi(y_1+2y_2)}(e^{-2\pi y_1}-e^{2\pi i x_1})dx_2+e^{-2\pi(2y_1+y_2)}(e^{-2\pi y_2}-e^{2\pi i x_2})dx_1}{(e^{-4\pi y_1}-2e^{-2\pi y_1}\cos 2\pi x_1+e^{-4\pi y_2}-2e^{-2\pi y_2}\cos 2\pi x_2+2)^2}.$$

Число $N(Q)$ действительно, поэтому в этих интегралах можно рассматривать только их действительную часть. Кроме того, сделаем замену переменных: $e^{-2\pi y_1}=t_1$, $e^{-2\pi y_2}=t_2$. Теперь

$$N(Q)=2\int\limits_Q dx_1\wedge dx_2\int\limits_{\partial G'}\frac{(t_1-\cos 2\pi x_1)t_1t_2dt_2-(t_2-\cos 2\pi x_2)t_1t_2dt_1}{(t_1^2-2t_1\cos 2\pi x_1+t_2^2-2t_2\cos 2\pi x_2+2)^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{G'}dt_1\wedge dt_2\int\limits_{\partial Q}\frac{t_2\sin 2\pi x_1dx_2-t_1\sin 2\pi x_2dx_1}{(t_1^2-2t_1\cos 2\pi x_1+t_2^2-2t_2\cos 2\pi x_2+2)^2}=I_1+I_2,$$

где G' — образ области G при указанной замене переменных, $(1, 1)\in G'$. Придадим области G' следующий конкретный вид:

$$G'=\{t\colon r^2<t_1^2+t_2^2<\varrho^2\}\cap\{t\colon t_1>\varepsilon,\ t_2>\varepsilon\},\qquad \varepsilon>0.$$

Граница $\partial G'$ состоит из части окружности

$$\{t\colon t_1^2+t_2^2=r^2\},\qquad r<\sqrt{2},$$

части окружности

$$\{t\colon t_1^2+t_2^2=\varrho^2\},\qquad \varrho>\sqrt{2}$$

(их мы обозначим с учетом ориентации, соответственно, γ_1 и γ_3), отрезка γ_2, параллельного оси t_1, и отрезка γ_4, параллельного оси t_2. При этом I_1 представим, соответственно, в виде суммы интегралов $I_{11}+I_{12}+$ $+I_{13}+I_{14}$. Устремим теперь отрезок γ_2 к оси t_1. На этой оси

$$|t_1^2-2t_1\cos 2\pi x_1+t_2^2-2t_2\cos 2\pi x_2+2|^2=|(t_1-\cos 2\pi x_1)^2+1+\sin 2\pi x_1|^2\geqslant 1.$$

Поэтому предел I_{12}, когда γ_2 стремится к оси t_1, равен нулю. Аналогично, устремим отрезок γ_4 к оси t_2, тогда тоже $\lim I_{14}=0$. Осталось два интеграла I_{11} и I_{13} по четверть-окружностям радиусов, соответственно, $r<\sqrt{2}$ и $\varrho>\sqrt{2}$. Рассмотрим пределы этих интегралов, когда $r\to 0$, $\varrho\to\infty$. Пусть $\gamma=\{\tau=(\tau_1,\tau_2)\colon \tau_1^2+\tau_2^2=1,\ 0\leqslant\tau_1\leqslant 1,\ 0\leqslant\tau_2\leqslant$ $\leqslant 1\}$ — четверть-окружность с обычной ориентацией, так что $\gamma_1=$ $=-r\gamma$, $\gamma_2=\varrho\gamma$ (когда мы γ_2, устремили к оси t_1, а γ_4 — к оси t_2, то γ_1 и γ_3 превратились в четверть-окружности),

$$I_{11}=-2\int\limits_Q dx_1\wedge dx_2\int\limits_\gamma \frac{r^3\tau_1\tau_2[(r\tau_1-\cos 2\pi x_1)d\tau_2-(r\tau_2-\cos 2\pi x_2)d\tau_1]}{(r^2-2r\tau\cos 2\pi x_1-2r\tau\cos 2\pi x_2+2)^2}\xrightarrow{r\to 0}0,$$

$$I_{13}=2\int\limits_Q dx_1\wedge dx_2\int\limits_\gamma \frac{\varrho^3\tau_1\tau_2[(\varrho\tau_1-\cos 2\pi x_1)d\tau_2-(\varrho\tau_2-\cos 2\pi x_2)d\tau_1]}{(\varrho^2-2\varrho\tau_1\cos 2\pi x_1-2\varrho\tau_2\cos 2\pi x_2+2)^2}$$

$$\xrightarrow{\varrho\to\infty}2\int\limits_Q dx_1\wedge dx_2\int\limits_\gamma \tau_1\tau_2(\tau_1 d\tau_2-\tau_2 d\tau_1)=\int\limits_Q dx_1dx_2=S(Q).$$

Итак, когда область G' указанным выше образом расширяется до четверть-плоскости, интеграл I_1 стремится к $S(Q)$. При этом интеграл I_2 тоже имеет предел, равный интегралу в правой части (2).

Замечание 1. Заметим ещё, что в интеграле (2) можно поменять местами порядок интегрирования и вычислить в замкнутом виде интеграл по t_1 и t_2. Тогда этот интеграл принимает вид ([1]):

$$(3)\quad \int\limits_{\partial Q}\left[\frac{1}{4}\,\frac{\cos 2\pi x_2+\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_1}}{\sin^2 2\pi x_1+\sin^2 2\pi x_2}+\frac{1}{2\pi}\,\frac{\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_1}}{\sin^2 2\pi x_1+\sin^2 2\pi x_2}\times\right.$$

$$\times\operatorname{arctg}\frac{\cos 2\pi x_1}{\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_1}}+\frac{1}{4}\,\frac{\cos 2\pi x_1\cos 2\pi x_2}{(\sin^2 2\pi x_1+\sin^2 2\pi x_2)\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_2}}+$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\,\frac{\cos 2\pi x_1\cos 2\pi x_2}{(\sin^2 2\pi x_1+\sin^2 2\pi x_2)\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_2}}\operatorname{arctg}\frac{\cos 2\pi x_2}{\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_2}}\right]\sin 2\pi x_1\,dx_2-$$

$$-\left[\frac{1}{4}\,\frac{\cos 2\pi x_1+\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_2}}{\sin^2 2\pi x_1+\sin^2 2\pi x_2}+\frac{1}{2\pi}\,\frac{\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_2}}{\sin^2 2\pi x_1+\sin^2 2\pi x_2}\times\right.$$

$$\times\operatorname{arctg}\frac{\cos 2\pi x_2}{\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_2}}+\frac{1}{4}\,\frac{\cos 2\pi x_1\cos 2\pi x_2}{(\sin^2 2\pi x_1+\sin^2 2\pi x_2)\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_1}}+$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\,\frac{\cos 2\pi x_1\cos 2\pi x_2}{(\sin^2 2\pi x_1+\sin^2 2\pi x_2)\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_1}}\operatorname{arctg}\frac{\cos 2\pi x_1}{\sqrt{1+\sin^2 2\pi x_1}}\right]\sin 2\pi x_2\,dx_1.$$

Полученный интеграл (3) представляет собой довольно громоздкое выражение, которое трудно исследовать. Поэтому, видимо, целесообразнее оставить интеграл в виде (2), что удобнее для изучения его асимптотики.

§3. Распространение на многомерные области. Методом, указанным в §2, можно с помощью формулы (1) получить интегральную формулу для разности между числом $N(Q)$ целых точек в многомерной области $Q\subset R^n$ и её объёмом $V(Q)$. Приведем соответствующий результат, ограничившись для простоты важным для решения классических задач теории чисел случаем $n=3$.

Теорема 2. *Пусть Q — ограниченная область пространства R^3 с кусочно-гладкой границей ∂Q. Если на ∂Q нет целых точек, то справедлива формула*

$$(4)\quad N(Q)-V(Q)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty dt_1\wedge dt_2\wedge dt_3\times$$

$$\times\int\limits_{\partial}\int\limits_{Q}\frac{t_2t_3\sin 2\pi x_1\,dx_2\wedge dx_3-t_1t_3\sin 2\pi x_2\,dx_1\wedge dx_3+t_1t_2\sin 2\pi x_3\,dx_1\wedge dx_2}{(t_1^2-2t_1\cos 2\pi x_1+t_2^2-2t_2\cos 2\pi x_2+t_3^2-2t_3\cos 2\pi x_3+3)^3}.$$

([1]) Автор благодарит стажеров и студентов О. Н. Жданова, О. Н. Лой, С. Г. Мысливец и Б. Б. Пренова, которые взяли на себя труд проверить утомительные выкладки, приводящие от интеграла (2) к интегралу (3).

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1.

§4. Заключительные замечания.

Замечание 2. Можно рассматривать и другие отображения f, имеющие нули в целых действительных точках и толко в них. Например, можно взять $f_i(z) = \sin \pi z_i$, что приводит к несколько более сложным формулам, чем (2) или (4).

Замечание 3. Есть значительно более общие формулы многомерного логарифмического вычета, чем формула (1). Приведем одну из них — формулу Руса (о других формулах см. §3 в книге [1]). Пусть D и f удовлетворяют условиям §1 и вектор-функция $w = (w_1, \ldots, w_n) \in C^{(1)}(\partial D)$ такова, что на ∂D справедливо неравенство $\langle w, f\rangle \neq 0$, где $\langle w, f\rangle = w_1 f_1 + \ldots + w_n f_n$. Тогда

$$N = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k dw[k] \wedge df}{\langle w, f\rangle^n}. \tag{5}$$

Формула (5) превращается в формулу (1) при $w = \bar{f}$.

Используя обобщенную формулу многомерного логарифмического вычета (5) и рассуждая так же, как и выше, можно получать различные обобщения формул (2) и (4). Например, рассмотрим функцию $\varphi(x_1, x_2)$, которая входит в класс $C^{(1)}(\bar{Q})$ и положительна на $\bar{Q}$. Положив $w_1 = \varphi \bar{f}_1$, $w_2 = \bar{f}_2$ (где f определено при доказательстве теоремы 1), приходим к следующему обобщению формулы (2)

$$\begin{aligned} N(Q) = &\iint_Q \frac{\varphi - \frac{1}{2}\varphi'_{x_1} - \frac{1}{2}\varphi'_{x_2}}{\varphi} dx_1 \wedge dx_2 + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty dt_1 \wedge dt_2 \int_{\partial Q} \Big[[\varphi t_2 \sin 2\pi x_1 + \tfrac{1}{2}\varphi'_{x_2}(-t_1 \sin 2\pi x_2 - t_2 \sin 2\pi x_1) + \\ &+ \sin 2\pi(x_1 + x_2)] dx_2 - [\varphi t_1 \sin 2\pi x_2 + \tfrac{1}{2}\varphi'_{x_1}(-t_1 \sin 2\pi x_2 - t_2 \sin 2\pi x_1) + \\ &+ \sin 2\pi(x_1 + x_2)] dx_1\Big] / [\varphi(t_1^2 - 2t_1 \cos 2\pi x_1 + 1) + t_2^2 - 2t_2 \cos 2\pi x_2 + 1]^2. \end{aligned}$$

Кратко эта работа анонсировалась в [2].

Литература

[1] Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Новосибирск, „Наука", 1979, 366.

[2] Л. А. Айзенберг, *Применение многомерного логарифмического вычета для представления в виде интеграла разности между числом целых точек в области и ее объёмом*, Докл. АН СССР, т. 270, № 3 (1983) 521–523.

[3] И. М. Виноградов, *Особые варианты метода тригонометрических сумм*, М., „Наука", 1976, 119.

[4] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, М., „Наука", 1977, 368.

[5] К. Чандрасекхаран, *Введение в аналитическую теорию чисел*, М., „Мир", 1974, 187.

Reçu par la Rédaction le 4.02.1984