ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1970)

Sur un problème de S. Gołąb

par K. RADZISZEWSKI (Lublin)

Dans le travail [1] Gołąb a posé le problème suivant: Si S est une surface fermée dans l'espace euclidien E_3 et χ_1, χ_2 ses courbures normales dans les directions principales de S, alors l'intégrale $I_i = \int_S \chi_i dS$ dépend de la forme de S et peut être évaluée par les quantités globales, p.ex. diamètre et largeur de S, en certain sens caractérisant cette forme. Quelle est la meilleure évaluation de cette intégrale par largeur et diamètre, ou par les autres quantités globales caractérisant S^2. Il a obtenu l'égalité

$$I_1 = \int_S \chi_1 dS = 2\pi h$$

pour la surface de révolution $S \in C^{(2)}$, et l'évaluation

$$\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{h} \leqslant I_2 = \int_S \chi_2 dS \leqslant \pi^2 b$$

pour la surface de révolution $S \in C^{(2)}$ fermée et convexe, où h dénote la largeur de S au sens de l'axe de révolution l, b — la largeur au sens perpendiculaire à l, χ_1 — la courbure normale au sens des parallèles, χ_2 — au sens des méridiens de S, dS — l'élément de l'aire de S.

Siwek et Zajtz dans [2] ont amélioré l'évaluation pour I_2. Notamment ils ont démontré l'évaluation exacte

$$2\pi \operatorname{arctg} \frac{b}{h} \leqslant I_2 \leqslant \pi^2 b\ .$$

Ils ont considéré aussi le cas de la surface férmée S de genre 1 obtenue par la rotation de la courbe plane convexe autour de l'axe l. Pour ce cas ils ont obtenu l'évaluation exacte

$$(1) \qquad 4\pi\left(a\pi + b \operatorname{arctg} \frac{2b}{h}\right) \leqslant I_2 \leqslant 4\pi\left((a+b)\pi - b \operatorname{arctg} \frac{2b}{h}\right),$$

où a est le minimum de rayons des parallèles de S, et b, h ont été déterminés plus haut.

Le but de ce travail est suivant: démontrer les résultats de [2] pour les surfaces de révolution, qui ont les méridiens convexes mais sans hypothèse de la régularité.

1. Notations et définitions. Soit donnée une courbe rectifiable plane $A \ast B$: $x = x(s)$; $y = y(s)$; $x(s) \geqslant 0$; sur le plan euclidien E_2, où sont introduites les coordonnées ortonormales x, y. Les vecteurs-unités des axes x et y désignons par e_1 et e_2. Si $M_i = M(s_i)$, $s_i < s_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $s_0 = 0$, $s_n = \hat{s}$, $M_0 = M(0) = A$, $M_n = M(\hat{s}) = B$, sont des points sur $A \ast B$ et s est la longueur de l'arc $A \ast M(s)$, alors M_i déterminent une ligne brisée $L_n = (M_0, M_1, \ldots, M_n)$ inscrite dans $A \ast B$. Introduisons les notations suivantes:

MN — le vecteur d'origine M et d'extrémité N;

$\Delta s_i = M_i M_{i+1}$ — la longueur du vecteur $M_i M_{i+1}$,

$a_i = \sphericalangle (M_{i-1}M_i, M_i M_{i+1})$ — la mesure de l'angle orienté entre les vecteurs $M_{i-1}M_i$ et $M_i M_{i+1}$, $\sphericalangle (M_{i-1}M_i, M_i M_{i+1}) = - \sphericalangle (M_i M_{i+1}, M_{i-1}M_i)$;

$x_i = x(s_i)$, $y_i = y(s_i)$ — les coordonnées du point M_i;

$t^+(M)$ et $t^-(M)$ — les vecteurs-unités tangents au point M à $A \ast B$ de droite et de gauche (s'ils existent).

La limite

$$k(A \ast B) = k(\hat{s}) = \lim_{L_n \to A \ast B} \sum a_i$$

nous appelons *courbure* intégrale de l'arc $A \ast B$, si cette limite ne dépend pas de choix des lignes brisées L_n inscrites dans $A \ast B$.

Si $\gamma_0 = \sphericalangle (e_1, M_0 M_1)$, $\beta_0 = \sphericalangle (e_2, M_0 M_1)$, $\gamma_0 - \beta_0 = \pi/2$, alors

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + \Delta s_1 \cos\gamma_0 + \Delta s_2 \cos(\gamma_0 + a_1) + \ldots + \Delta s_{i-1} \cos(\gamma_0 + a_1 + \ldots + a_{i-2}) \\ &= x_0 - \Delta s_1 \sin\beta_0 - \Delta s_2 \sin(\beta_0 + a_1) - \ldots - \Delta s_{i-1} \sin(\beta_0 + a_1 + \ldots + a_{i-2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_i &= y_0 + \Delta s_1 \sin\gamma_0 + \Delta s_2 \sin(\gamma_0 + a_1) + \ldots + \Delta s_{i-1} \sin(\gamma_0 + a_1 + \ldots + a_{i-2}) \\ &= y_0 + \Delta s_1 \cos\beta_0 + \Delta s_2 \cos(\beta_0 + a_1) + \ldots + \Delta s_{i-1} \cos(\beta_0 + a_1 + \ldots + a_{i-2}), \end{aligned}$$

d'où, en passant à la limite, nous obtenons les coordonnées du point $M(x, y) \in A \ast B$ sous la forme suivante:

$$x = x_0 + \int_0^s \cos\big(\gamma + k(s)\big)\, ds = x_0 - \int_0^s \sin\big(\beta + k(s)\big)\, ds;$$

$$y = y_0 + \int_0^s \sin\big(\gamma + k(s)\big)\, ds = y_0 + \int_0^s \cos\big(\beta + k(s)\big)\, ds,$$

où $\gamma = \sphericalangle \big(e_1, t^-(A)\big)$, $\beta = \sphericalangle \big(e_2, t^-(A)\big)$, $\gamma - \beta = \pi/2$.

Cette formule est valable pour les courbes admettant la courbure intégrale finie de chaque son arc.

Considérons maintenant une surface de révolution S, obtenue par la rotation d'une courbe $A \divideontimes B$ admettant la courbure intégrale, autour de l'axe y.

Nous allons définir l'intégrale I_2 pour telle surface. Si L_n est une ligne brisée inscrite dans $A \divideontimes B$, alors en tournant le segment M_iM_{i+1} autour de l'axe y nous obtiendrons une partie P_i de la surface du cône. On peut facilement calculer que son aire est égale à

$$(2) \qquad P_i = \pi \Delta s_i (x_i + x_{i+1}) .$$

Posons

$$(3) \quad I_2 = \lim_{L_n \to A * B} \sum \frac{a_i}{\Delta s_i} P_i = \pi \lim_{L_n \to A * B} \sum (x_i + x_{i+1}) a_i = 2\pi \int_0^{\hat{s}} x(s) dk(s) ,$$

si cette limite ne dépend pas de choix de $L_n \to A \divideontimes B$.

Nous voyons que I_2 est une intégrale de Stieltjes. Pour les courbes convexes ou étant une somme finie des arcs convexes, cette intégrale est bien déterminée.

Passons à la définition de I_1 pour les courbes $x = x(s)$, $y = y(s)$, satisfaisant à la condition: $x(s) > 0$ pour $0 < s < \hat{s}$.

Soit M_i^y la projection orthogonale du point M_i sur l'axe y et M_iN_i le vecteur-unité perpendiculaire à M_iM_{i+1} et tel que l'angle $\sphericalangle(M_iM_{i+1}, M_iN_i)$ est positif. Introduisons les notations suivantes:

$$(4) \quad \eta_i = \sphericalangle(M_iN_i, M_iM_i^y) , \quad \chi_1^i = \frac{\cos \eta_i}{x_i} , \quad k_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i .$$

Comme $\sphericalangle(M_i^yM_i, M_iM_{i+1}) = \sphericalangle(e_1, M_iM_{i+1}) = \gamma_0 + a_1 + \ldots + a_i = \gamma_0 + k_i$, donc $k_i + \gamma_0 + \pi/2 + \eta_i = \pi$ et $\eta_i = \pi/2 - (\gamma_0 + k_i)$.

Posons

$$(5) \quad I_1 = \lim_{L_n \to A * B} \sum \chi_1^i P_i = \int_S \chi_1 dS , \quad \chi_1 = \frac{\cos \sphericalangle(MN, MM^y)}{x} , \quad M = M(x, y) \in A \divideontimes B ,$$

si cette limite ne dépend pas de choix des $L_n \to A \divideontimes B$, où M^y est la projection orthogonale du point $M(x, y) \in A \divideontimes B$ sur l'axe y et MN, $|MN| = 1$, est le vecteur orthogonal à $t^+(M)$, $\sphericalangle\big(t^+(M), MN\big) > 0$.

En profitant de (2), (4) et (5) nous obtiendrons

$$\begin{aligned} I_1 = \lim \sum \chi_1^i P_i &= \lim \sum \cos \eta_i P_i / x_i = \lim \sum \cos \eta_i \Delta s_i \pi (x_i + x_{i+1}) / x_i \\ &= \pi \lim \sum (x_i + x_{i+1}) \Delta s_i \sin(\gamma_0 + k_i) / x_i \\ &= \pi \lim \sum (x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i) / x_i = 2\pi \int_0^{\hat{s}} dy = 2\pi \big(y(\hat{s}) - y(0)\big) . \end{aligned}$$

Dans la formule (5) et dans ces considérations nous posons $\chi_1^0 P_0 = 0$ si $x_0 = 0$, où $i = 1, \ldots, n-1$.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour la surface de révolution S obtenue par la rotation autour de l'axe y d'une courbe rectifiable $A \ast B$: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \hat{s}$, $A = A(x(0), y(0))$, $B = B(x(\hat{s}), y(\hat{s}))$; $x(s) > 0$ pour $0 < s < \hat{s}$, on a*

$$I_1 = 2\pi\big(y(\hat{s}) - y(0)\big),$$

où I_1 est donné par la formule (5).

Si la surface S est de classe $C^{(2)}$, ce résultat est identique à celui donné dans [1] ou [2].

2. Une évaluation auxiliaire. Remarquons que I_2 peut être écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi \int_0^{\hat{s}} x\,dk = 2\pi \lim \big(x(s_1)a_1 + \ldots + x(s_n)a_n\big) \\ &= 2\pi \lim[(x_0 + \Delta x_1)a_1 + \ldots + (x_0 + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n)a_n] \\ &= 2\pi \lim[x_0(a_1 + \ldots + a_n) + \Delta x_1(a_1 + \ldots + a_n) + \\ &\quad + \Delta x_2(a_2 + \ldots + a_n) + \ldots + \Delta x_n a_n] \\ &= 2\pi\Big[x_0 k(\hat{s}) + \int_0^{\hat{s}} [k(\hat{s}) - k(s)]\,dx(s)\Big] = 2\pi\Big[x(\hat{s})k(\hat{s}) - \int_0^{\hat{s}} k(s)\,dx(s)\Big], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$I_2 = 2\pi\Big[x(\hat{s})k(\hat{s}) - \int_0^{\hat{s}} k(s)\,dx(s)\Big]. \tag{6}$$

Admettons maintenant que $A \ast B$: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $A = A(x_0, y_0)$, $B = B(x(\hat{s}), y(\hat{s}))$, $x_0 \geqslant 0$, est une courbe convexe satisfaisant aux conditions: $-\pi/2 \leqslant k(s) \leqslant 0$, $x(s) \leqslant x(\hat{s})$, $y(s) \leqslant y(\hat{s})$.

Nous allons répéter en abregé la démonstration du lemme 2, donnée par Siwek et Zajtz dans [2]. Cette démonstration sera adaptée aux nos notions.

Dans ce but partageons l'intervalle $\langle x(0), x(\hat{s})\rangle$ en 2^n parties égales de longueurs égales à $\Delta^n x = [x(\hat{s}) - x(0)]/2^n = x(s_{i+1}) - x(s_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n$, $x(s_i) = x_i$, $y(s_i) = y_i$, $M(x_i, y_i) = M_i \in A \ast B$. Les points M_i forment une ligne brisée L_n inscrite dans $A \ast B$. Soit $a_i^n = \sphericalangle(M_{i-1}M_i, M_iM_{i+1})$, $k_i^n = a_1^n + \ldots + a_i^n$, $\gamma_0^n = \sphericalangle(e_1, M_0M_1)$, $\gamma_{i-1}^n = \sphericalangle(e_1, M_{i-1}M_i)$. On a $\gamma_{i-1}^n = \gamma_0^n + k_{i-1}^n$. Désignons par $\delta_0^n = \sphericalangle(M_0M_1, e_2) = \pi/2 - \gamma_0^n$, $\beta_i^n = \sphericalangle(M_iM_{i+1}, M_{i-1}M_i) = -a_i^n$, $h_i^n = \beta_1^n + \ldots + \beta_i^n = -k_i^n$. On a $\sphericalangle(M_iM_{i+1}, e_2) = \delta_0^n + \beta_1^n + \ldots + \beta_i^n = \delta_0^n + b_i^n$.

On voit immédiatement que

$$\begin{aligned}\sphericalangle(M_iM_{i+1}, e_2)+\sphericalangle(M_{i-1}M_i, e_2) &= \delta_0^n+b_i^n+\delta_0^n+b_{i-1}^n\\ &= 2(\delta_0^n+b_{i-1}^n)+\beta_i^n \geqslant 2(\delta_0^n+b_{i-1}^n)+2\sphericalangle(M_{i-1}M_{i+1}, M_{i-1}M_i)\\ &= 2\sphericalangle(M_{i-1}M_{i+1}, e_2),\end{aligned}$$

parce que $x_{i+1}-x_i = x_i-x_{i-1}$, d'où $|M_{i-1}M_i| \geqslant |M_iM_{i+1}|$ et $\sphericalangle(M_{i-1}M_{i+1}, M_{i-1}M_i) \leqslant \sphericalangle(M_{i+1}M_i, M_{i+1}M_{i-1})$, $\beta_i^n = \sphericalangle(M_{i-1}M_{i+1}, M_{i-1}M_i)+ \sphericalangle(M_{i+1}M_i, M_{i+1}M_{i-1}) \geqslant 2\sphericalangle(M_{i-1}M_{i+1}, M_{i-1}M_i)$.

Les points $M_0, M_2, M_4, \ldots$ forment une autre ligne brisée inscrite dans $A \ast B$ pour laquelle on a

$$x(M_2)-x(M_0) = x(M_4)-x(M_2) = \ldots = 2\Delta^n x = \Delta^{n-1}x,$$

$$\begin{aligned}\sum \sphericalangle(M_iM_{i+1}, e_2)\Delta^n x &\geqslant \sum \sphericalangle(M_{2k}M_{2k+1}, e_2)2\Delta^n x\\ &= \sum{}' \sphericalangle(M_{2k}M_{2k+1}, e_2)\Delta^{n-1}x.\end{aligned}$$

En répétant cette considération par rapport aux lignes brisées $M_0, M_2, M_4, \ldots$; $M_0, M_4, M_8, \ldots$; ... nous obtiendrons l'évaluation suivante

$$\sum \sphericalangle(M_iM_{i+1}, e_2)\Delta^n x \geqslant \sphericalangle(AB, e_2)\Delta^0 x = \sphericalangle(AB, e_2)\big(x(\hat{s})-x(0)\big)$$

ou

$$\sum (\delta_0^n+b_i^n)\Delta^n x \geqslant \sphericalangle(AB, e_2)\big(x(\hat{s})-x(0)\big).$$

Désignons par $\varphi = \sphericalangle\big(AB, t^+(A)\big)$, $\delta = \sphericalangle\big(t^+(A), e_2\big)$. Alors nous obtiendrons à la limite l'évaluation suivante:

$$\int_{x(0)}^{x(\hat{s})} \big(\beta+b(x)\big)dx \geqslant (\beta+\varphi)\big(x(\hat{s})-x(0)\big) \tag{7}$$

ou

$$\int_{x(0)}^{x(\hat{s})} b(x)dx \geqslant \varphi\big(x(\hat{s})-x(0)\big),$$

où $b(x) = -k(x)$, $\varphi = \sphericalangle\big(AB, t^+(A)\big)$; $k(x)$ désigne la courbure intégrale de l'arc $A \ast M(x, y) \subset A \ast B$. Dans la suite de ce travail nous utiliserons les notations: $k(x) = k\big(x(s)\big) = \hat{k}(s)$.

3. Une évaluation pour les surfaces convexes de révolution. Soit $A \ast B$: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $x(s) \geqslant 0$, $A = A\big(x(0), y(0)\big)$, $B = B\big(x(\hat{s}), y(\hat{s})\big)$, $y(s) \leqslant y(\hat{s})$, une courbe convexe sur E_2 ayant au plus un point ou un segment (de droite) d'intersection avec chaque droite parallèle à l'axe x et la courbure integrale $\hat{k}(s) = k(x(s))$ non négative, $\hat{k}(s) \geqslant 0$. Désignons par $M \in A \ast B$ le point le plus éloigné de l'axe y et par $x_1 = x(s_1)$, $y_1 = y(s_1)$ leur coordonnées.

Considérons la surface S obtenue par la rotation de la courbe $A \ast B$ autor de l'axe y. En vertu de (6) il suffit évaluer intégrale

$$(8) \qquad I = \int_0^{\hat{s}} \hat{k}(s)\,dx \qquad \Big(= \int_{x(0)}^{x_1} k(x)\,dx + \int_{x_1}^{x(\hat{s})} k(x)\,dx\,, \text{ où } k(x) = k(x(s)) = \hat{k}(s)\Big)$$

pour obtenir l'évaluation de I_2.

Nous allons évaluer l'intégrale (8) pour chaque des arcs $A \ast M$ et $M \ast B$ séparement.

(a) L'arc $A \ast M$.

Introduisons sur E_2 les coordonnées u, v données par les formules

$$x = x_1 - u\,, \quad y = -v\,.$$

On voit immédiatement que dans les coordonnées u, v l'arc $A \ast M$ satisfait aux conditions de la formule (7), où

$$b(u) = k(x_1) - k(x) = k(x_1) - k(x_1 - u)\,, \qquad u_1 = x_1 - x(0)\,.$$

Maintenant la formule (7) prend la forme suivante:

$$\int_0^{u_1} b(u)\,du = \int_0^{u_1} \big(k(x_1) - k(x_1 - u)\big)\,du = \int_{x_0}^{x_1} \big(k(x_1) - k(x)\big)\,dx$$
$$= k(x_1)(x_1 - x_0) - \int_{x_0}^{x_1} k(x)\,dx \geqslant \varphi_1(x_1 - x_0)\,,$$

d'où

$$(9) \qquad -\int_{x_0}^{x_1} k(x)\,dx \geqslant \big(\varphi_1 - k(x_1)\big)(x_1 - x_0)\,,$$

où $\varphi_1 = \sphericalangle\big(MA, t^-(M)\big)$.

(b) L'arc $M \ast B$.

La courbure intégrale $k(x)$ de l'arc $A \ast X \subset A \ast B$, $X(x, y) \in M \ast B$, est égale à

$$k(x) = k(x_1) + \theta_1 + k_1(x)\,,$$

où $k_1(x)$ est la courbure intégrale de l'arc $M \ast X$ (ouvert) et θ_1 signifie l'angle $\theta_1 = \sphericalangle\big(t^-(M), t^+(M)\big)$.

Introduisons les coordonnées u, v par la formule

$$x = x_1 - u\,, \quad y = v\,.$$

Dans ces coordonnées l'arc $M \ast B$ satisfait aux conditions de la formule (7), où

$$b(u) = k_1(x_1 - x)\,, \qquad u_2 = x_1 - x_2\,,$$

$$\int_0^{u_2} b(u)\,du = \int_0^{u_2} k_1(u)\,du = -\int_{x_1}^{x(\hat{s})} k_1(x)\,dx \geqslant \varphi_2 u_2 = \varphi_2(x_1 - x_2)$$

et

$$(10) \qquad -\int_{x_1}^{x(\hat{s})} k(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x(\hat{s})} \big(k(x_1) + \theta_1 + k_1(x)\big)\,dx$$
$$= -\int_{x_1}^{x(\hat{s})} k_1(x)\,dx + \big(k(x_1) + \theta_1\big)(x_1 - x_2)$$
$$\geqslant \big(\varphi_2 + k(x_1) + \theta_1\big)(x_1 - x_2)\,,$$

où $\varphi_2 = \sphericalangle\big(t^+(M), MB\big)$.

Admettons maintenant que A et B sont des points de l'axe y. La rotation de l'arc $A \ast B$ autour de l'axe y détermine une surface convexe fermée S, pour laquelle nous allons donner l'évaluation de I_2. En vertu de (6), dans ce cas, l'intégrale I_2 prend la forme

$$I_2 = -2\pi\Big(\int_0^{s_1} \hat{k}(s)\,dx + \int_{s_1}^{\hat{s}} \hat{k}(s)\,dx\Big)$$

ou

$$I_2 = -2\pi\Big(\int_0^{x_1} k(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \big(k(x_1) + \theta_1 + k_1(x)\big)\Big)\,dx\,.$$

En profitant de (9) et (10) nous obtenons

$$(11) \qquad I_2 \geqslant 2\pi\big(\varphi_1 + \varphi_2 + \theta_1 + k(x_1) - k(x_1)\big)(x_1 - x_0) = \pi(\varphi_1 + \varphi_2 + \theta_1)b\,,$$

où $b = 2(x_1 - x_0) = 2x_1$ est la largeur de S dans la direction perpendiculaire à l'axe de révolution y.

Considérons le triangle AMB et l'angle $\sphericalangle(MB, MA) = \pi - (\varphi_1 + {} + \varphi_2 + \theta_1)$. Cet angle sera le plus petit quand $|AM| = |MB|$. Alors

$$(12) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \theta_1 = \pi - \sphericalangle(MB, MA) = \pi - \big(\pi - 2\sphericalangle(MB, BA)\big)$$
$$= 2\operatorname{arctg}[(x_1 - x_0)/(h/2)] = 2\operatorname{arctg}(b/h)\,,$$

où $h = |AB|$ est la largeur de S dans la direction de l'axe de révolution y.

D'autre part on a évidemment

$$(13) \qquad I_2 = 2\pi \int_0^{\hat{s}} x\,dk \leqslant 2\pi\frac{b}{2}(\beta_B - \beta_A) = \pi b(\beta_B - \beta_A)\,,$$

où $\beta_A = \sphericalangle\big(e_1, t^+(A)\big)$, $\beta_B = \sphericalangle\big(e_1, t^-(B)\big)$.

En vertu de (11), (12) et (13) nous pouvons anoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si S est une surface férmée et convexe, obtenue par la rotation de la courbe convexe $A \ast B$ autour de l'axe l, $A \in l$, $B \in l$, alors*

$$2\pi b \operatorname{arctg}\frac{b}{h} \leqslant I_2 \leqslant \pi b(\varphi_B - \varphi_A)\,, \tag{14}$$

où h est la largeur de S dans la direction de l, b — la largeur de S dans la direction perpendiculaire à l, $\beta_A = \sphericalangle\big(e_1, t^+(A)\big)$, $\beta_B = \sphericalangle\big(e_1, t^-(B)\big)$, et $t^-(A)$, $t^+(B)$ sont les vecteurs tangents à $A \ast B$ aux points A et B respectivement.

On peut vérifier sans peine que la formule (14) est exacte, parce que pour la surface obtenue par la rotation de la ligne brisée: AMB, $|AM| = |MB| = |AB| = 1$ autour de l'axe l, $A \in l$, $B \in l$, on a $2\pi b \operatorname{arctg}(b/h) = I_2 = \pi b(\beta_B - \beta_A)$ ($\beta_A = \pi/2 - \pi/3$, $\beta_B = \pi/3 + \pi/2$, $b = \sqrt{3}$, $h = 1$).

Cette démonstration est une adaptation aux notions de ce travail de la démonstration donnée par Siwek et Zajtz dans [2].

Par analogie, en répétant la démonstration de l'évaluation (1) donnée dans [2] et adaptée aux nos notions, nous obtiendrons l'évaluation (1) pour la surface de genre 1 obtenue par la rotation de la courbe convexe fermée $A \ast B$ autour de l'axe l. Dans ce cas il faut prendre en considération que la courbure intégrale est donnée par la formule: $k(0) = a_0$, $k(s) = k\big(A \ast M(s)\big) + a_0$, où $a_0 = \sphericalangle\big(t^-(A), t^+(A)\big)$, $A = A\big(x(0), y(0)\big)$, et $k\big(A \ast M(s)\big)$ est la courbure intégrale de l'arc ouvert $A \ast M(s) \subset A \ast B$.

Travaux cités

[1] S. Gołąb, *Sur un théorème de la géométrie différentielle globale*, Ann. Polon. Math. 12 (1962), pp. 39-47.

[2] E. Siwek et A. Zajtz, *Sur un problème de S. Gołąb*, ibidem 22 (1969), pp. 107-120.

Reçu par la Rédaction le 15. 7. 1968