ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1964)

Sur l'unicité des solutions de certains problèmes aux limites pour l'équation hyperbolique-parabolique

par J. Weiss (Kraków)

1. Introduction. Considérons l'équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme:

$$(1.1)\qquad \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{k=1}^{m} b_k(X)\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial t}+c(X)u = f(X,t),$$

où $X = X(x_1, \ldots, x_m)$, et l'opérateur différentiel

$$H[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

est du type hyperbolique normal ([1]).

Soit D un domaine cylindrique borné, constituant le produit topologique d'un certain domaine Δ, fermé et borné de l'espace $\mathcal{E}^m$ des variables $x_1, \ldots, x_m$ et de l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ de l'axe t. La surface latérale σ du domaine D, c'est-à-dire la surface $F(\Delta)\times\langle 0, T\rangle$ ($F(\Delta)$ étant la frontière de Δ), est la somme de deux ensembles σ_E et σ_T; σ_E se compose d'un nombre fini de surfaces de classe C^1, ayant en chaque point l'orientation caractéristique ou celle de l'espace par rapport à l'équation (1.1); σ_T se compose d'un nombre fini de surfaces de classe C^1, orientées dans le temps par rapport à (1.1) ([2]).

([1]) L'opérateur $H[u]$ est hyperbolique normal, si la forme caractéristique $\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X)\lambda_i\lambda_j$ representée sous la forme canonique contient exactement $m-1$ carrés de mêmes signes (v. [1]).

([2]) Nous convenons de dire que la surface $G(x_1, \ldots, x_m) = 0$ a au point $X^{\circ}(x_1^{\circ}, \ldots, \ldots, x_m^{\circ})$ l'orientation caractéristique par rapport à l'opérateur $H[u]$, lorsqu'on a

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X)G'_{x_i}(X)G'_{x_j}(X) = 0,$$

Nous supposons que, sur certaine partie $\sigma_E^{(0)}$ de l'ensemble σ_E on a $\cos(n, x_m) > 0$, où n désigne la normale intérieure à σ_E.

Nous posons pour l'équation (1.1), le problème aux limites suivant qui sera appelé brièvement problème (P): on cherche une fonction $u(X, t)$ birégulière dans le domaine D (³), satisfaisant à l'équation (1.1) à l'intérieur du domaine D et aux conditions:

$$\begin{cases} u(X,0) = \Phi(X), \quad \text{pour} \quad X \in \Delta, \\ \left.\begin{aligned} u(X,t) &= \psi_0(X,t), \\ u'_{x_m}(X,t) &= \psi_1(X,t), \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad (X,t) \in \sigma_E^0, \\ u(X,t) = \varphi(X,t), \quad \text{pour} \quad (X,t) \in \sigma_T, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $\Phi(X)$, $\psi_0(X, t)$, $\psi_1(X, t)$, $\varphi(X, t)$ sont des fonctions données.

Remarque. Il est facile de vérifier que lorsque l'équation de la surface σ_E^0 est de la forme

$$G(x_1, \dots, x_m) = 0,$$

où $G(X)$ est de classe C^1, et telle que $G'_{x_m}(X) = 0$ pour $X \in \sigma_E^0$, alors le changement des variables indépendantes

$$\begin{cases} t = t, \\ y_i = x_i, \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, m-1, \\ y_m = G(x_1, \dots, x_m), \end{cases} \tag{T}$$

transforme la surface σ_E^0 en l'hyperplan $y_m = 0$. La transformation (T) est non singulière, donc elle ne change ni le type de l'équation (1.1), ni l'orientation des surfaces $\Delta, \sigma_E, \sigma_T$ ([1], chap. II, § 11). C'est pourquoi on peut admettre dans la suite que σ_E^0 constitue un domaine du plan $x_m = 0$.

Le problème étudié dans ce travail a été considéré pour la première fois par Piskunov en 1938, [4], mais seulement pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

---

l'orientation de l'espace si l'on a

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X) G'_{x_i}(X) G'_{x_j}(X) < 0,$$

l'orientation dans le temps si

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X) G'_{x_i}(X) G'_{x_j}(X) > 0$$

au point X^0 (v. [1]).

(³) Une fonction sera appelée birégulière dans un ensemble, si elle est de classe C^1 dans cet ensemble et de classe C^2 aux points intérieurs de cet ensemble (v. [1]).

Il a démontré l'unicité des solutions dans le cas où les conditions aux limites sont posées dans les plans $x = 0$ et $y = 0$, et il a aussi démontré que, pour les conditions posées dans le plan $t = 0$, la solution n'existe pas ou n'est pas unique.

2. Théorème de Picone. Dans la démonstration du théorème qui va suivre, nous nous référons au théorème suivant de M. Picone ([1], chap. XV, § 35):

Soit $f(t)$ une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Posons

$$h(\lambda) = \int_0^T f(t)e^{-\lambda t}dt\,.$$

Lorsqu'il existe des nombres réels $\lambda_0 > 0$, $K \geqslant 0$ et p tels qu'on a, pour $\lambda > \lambda_0$, l'inégalité

$$|e^{\lambda t}h(\lambda)| = \left|\int_0^T f(t)e^{\lambda(T-t)}dt\right| \leqslant K\lambda^p\,,$$

alors $f(\tau) \equiv 0$, pour chaque $\tau \in \langle 0, T\rangle$.

3. Théorème. *Nous supposons que*:

1° *les coefficients* $a_{ij}(X)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ *de l'équation* (1.1) *sont de classe* C^1 *dans* $\bar{D}$;

2° *les coefficients* $b_k(X)$ $(k = 1, \ldots, m)$, $c(X)$ *et la fonction* $f(X, t)$ *sont continus dans* $\bar{D}$;

3° *la forme quadratique* $\sum_{i,j=1}^{m-1} a_{ij}(X)\lambda_i\lambda_j$ *est définie positive et* $a_{mm}(X) < 0$ *dans* $\bar{D}$ *(il en résulte que l'opérateur* $H[u]$ *est hyperbolique normal).*

Nous admettons les hypothèses suivantes sur le domaine $\varDelta$:

4° *l'intersection* S_ξ *du domaine* $\varDelta$ *avec l'hyperplan* $x_m = \xi$ *varie avec* ξ *de façon à assurer la continuité par rapport à* ξ *de l'intégrale*

$$I(\xi) = \iint\limits_{S_\xi} \psi(x_1, \ldots, x_m)dx_1 \ldots dx_{m-1}$$

pour toute fonction continue $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ *dans le domaine* $\bar{\varDelta}$;

5° *chaque intersection du domaine* $\varDelta$ *avec l'hyperplan* $x_m =$ const *est un domaine simplement connexe*;

6° *on a* $\cos(n, x_m) < 0$ *sur* σ_E *et* $\cos(n, x_m) > 0$ *sur* σ_T, *où* n *désigne la normale intérieure à* $\varDelta$;

7° *les fonctions* $\varPhi, \psi_0, \psi_1, \varphi$ *intervenant dans les conditions* (1.2) *sont de classe* C^1 *et satisfont aux conditions de compatibilité*:

$$\left.\begin{aligned}\psi_0(X,0)&=\Phi(X),\\ \psi_1(X,0)&=\Phi'_{x_m}(X),\end{aligned}\right\}\quad \textit{pour}\quad X\in\Delta\cdot\overset{0}{\sigma}_E\,,$$
$$\varphi(X,0)=\Phi(X),\quad \textit{pour}\quad X\in\Delta\cdot\sigma_T\,,$$
$$\left.\begin{aligned}\psi_0(X,t)&=\varphi(X,t),\\ \psi_1(X,t)&=\varphi'_{x_m}(X,t),\end{aligned}\right\}\quad \textit{pour}\quad X\in\overset{0}{\sigma}_E\cdot\sigma_T\,.$$

Tout cela étant supposé, le problème (P) *admet une solution au plus.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que la solution unique de l'équation homogène correspondant à (1.1) ($f(X,t)\equiv 0$), avec les conditions (1.2) homogènes, est la solution triviale $u(X,t)\equiv 0$. Par conséquent nous allons considérer le problème (P) homogène:

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m} b_k(X)\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial t}+c(X)u=0\,, \tag{3.1}$$

$$\left\{\begin{aligned}u(X,0)&=0,\quad \text{pour}\quad X\in\Delta\,,\\ \left.\begin{aligned}u(X,t)&=0,\\ u'_{x_m}(X,t)&=0,\end{aligned}\right\}&\quad\text{pour}\quad (X,t)\in\overset{0}{\sigma}_E\,,\\ u(X,t)&=0,\quad \text{pour}\quad (X,t)\in\sigma_T\,.\end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

Après l'application de la transformation de Laplace dans un intervalle d'intégration fini (transformation de Laplace-Picone [1], [2])

$$v(X,\lambda)=\int_0^T e^{\lambda(T-t)}u(X,t)\,dt\,, \tag{3.3}$$

l'équation (3.1) se transforme en l'équation:

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m} b_k(X)\frac{\partial v}{\partial x_k}+[c(X)-\lambda]v=u(X,T)\,. \tag{3.4}$$

L'hypothèse que l'opérateur $H[u]$ est hyperbolique normal, implique que (3.4) est une équation hyperbolique normal dans le domaine Δ.

La frontière de Δ est la projection de la surface σ sur l'espace $\mathcal{E}^m$ des variables $x_1,\ldots,x_m$. Elle se compose des parties suivantes:

S^0 — constituant la projection de l'hyperplan $\overset{0}{\sigma}_E$,

S_E — ayant l'orientation caractéristique ou celle de l'espace par rapport à l'équation (3.4), constituant la projection σ_E, sur laquelle $\cos(n,x_m)<0$,

S_T — orientée dans le temps par rapport à l'équation (3.4), constituant la projection σ_T.

Les conditions aux limites (3.2) se transforment en les conditions:

$$\left.\begin{aligned} v(X,\lambda) &= 0\,, \\ v'_{x_m}(X,\lambda) &= 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad X \in S_0\,,$$

$$v(X,\lambda) = 0, \quad \text{pour} \quad X \in S_T\,.$$

Nous partons de l'équation (3.4) et nous posons:

$$G[v] = \sum_{i,j=1}^{m-1} a_{ij} v'_{x_i} v'_{x_j} - a_{mm} v'^2_{x_m} + \lambda v^2\,.$$

On peut supposer que $\lambda > 1$, alors on a:

$$G[v] \geqslant \sum_{i,j=1}^{m-1} a_{ij} v'_{x_i} v'_{x_j} - a_{mm} v'^2_{x_m} + v^2 \geqslant \mu(X)\Big(\sum_{j=1}^{m} v'^2_{x_j} + v^2\Big)\,,$$

où $\mu(X)$ désigne la valeur minimum sur la sphère unitaire de l'espace des variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$, de la forme positive définie:

$$\sum_{i,j=1}^{m-1} a_{ij} \lambda_i \lambda_j - a_{mm} \lambda_m^2 + \lambda_{m+1}^2\,.$$

L'application d'un procédé identique à celui qui est exposé dans les travaux de S. Zaremba [5], Friedrichs et Levy [6], S. Sobolev [7] (voir aussi [1]) et surtout dans le travail de J. Szarski et T. Ważewski [3], permet d'évaleur l'intégrale

$$E(\xi) = \iint_{S_\xi} G[v]\, d\sigma$$

par une fonction continue ne renfermant pas le paramètre λ; à savoir on a

$$E(\xi) \leqslant \sigma(\xi), \qquad \text{pour} \qquad \xi = x_m \in \Delta\,,$$

où $\sigma(\xi)$ est l'intégrale de l'équation différentielle ordinaire

$$y' = k_0(\xi) y + g(\xi)\,,$$

issue du point $\xi = 0$, $y = E(0)$, et $k_0(\xi)$ est une fonction positive continue qui ne dépend que du domaine Ω et des coefficients figurant dans l'équation (3.4).

Il existe un nombre constant $M > 0$, tel que $\sigma(\xi) \leqslant M$; on a donc

$$E(\xi) \leqslant M\,, \qquad \text{pour} \qquad \xi = x_m \in \Delta\,,$$

or

$$E(\xi) \geqslant \iint_{S_\xi} v^2(X,\lambda)\, d\sigma\,,$$

donc $\iint_{S_\xi} v^2(X,\lambda)\, d\sigma \leqslant M$.

Il en résulte qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\iiint_{\tilde{\Delta}} v^2(X, \lambda)\,dV \leqslant K, \qquad \text{pour chaque domaine} \quad \tilde{\Delta} \subset \Delta .$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\Big|\iiint_{\tilde{\Delta}} v(X, \lambda)\,dV\Big| \leqslant K\sqrt{|\tilde{\Delta}|}\,.$$

D'après (3.3) on a

$$\Big|\iiint_{\tilde{\Delta}} v(X, \lambda)\,dV\Big| = \Big|\iiint_{\tilde{\Delta}} \Big[\int_0^T e^{\lambda(T-t)} u(X, t)\,dt\Big]dV\Big|\,. \tag{3.5}$$

En posant

$$U_{\tilde{\Delta}}(t) = \iiint_{\tilde{\Delta}} u(X, t)\,dV\,,$$

et en changeant l'ordre des intégrations dans (3.5) on obtient l'inégalité

$$\Big|\int_0^T e^{\lambda(T-t)} U_{\tilde{\Delta}}(t)\,dt\Big| \leqslant K\sqrt{|\tilde{\Delta}|}\,.$$

D'après le théorème de Picone, $U_{\tilde{\Delta}}(t) \equiv 0$, pour $t \in \langle 0, T\rangle$, c'est-à-dire pour chaque $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ et $t \in \langle 0, T\rangle$, on a

$$\iiint_{\tilde{\Delta}} u(X, t)\,dV \equiv 0\,.$$

Il en résulte que $u(X, t) \equiv 0$ dans $\bar{D}$.

4. Remarque. On peut déduire du théorème qui vient d'être démontré l'unicité de la solution des problèmes aux limites dans un domaine qui n'est pas borné, c'est-à-dire dans la demi-couche Σ limitée par les hyperplans: $t = 0$, $t = T$ et $x_m = 0$, pour l'équation (1.1) en supposant que les coefficients $a_{ij}(X)$ satisfont aux conditions:

$$\lim_{\varrho/\infty} a_{ij}(X) = A_{ij} \qquad (i, j = 1, \dots, m)\,,$$

où $\varrho = \big(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\big)^{1/2}$ et A_{ij} sont des constantes convenables, telles que la forme quadratique $A[\Lambda] = \sum_{i,j=1}^{m-1} A_{ij}\lambda_i\lambda_j$ soit définie positive et $A_{mm} < 0$.

Fixons le vecteur $\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$; on a

$$\lim_{\varrho/\infty} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X)\lambda_i\lambda_j = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\lambda_i\lambda_j\,.$$

Supposons qu'on ait $\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\lambda_i\lambda_j < 0$.

Il existe un nombre $\bar{\varrho} > 0$, tel que

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X)\lambda_i\lambda_j < 0, \qquad \text{pour} \qquad |X| > \bar{\varrho}.$$

Il en résulte que $\tilde{X}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ étant un point du plan $t = 0$, nous pouvons construire un domaine borné Ω, contenant $\tilde{X}$ et limité par les plans:

$$x_m = 0, \tag{4.1}$$

$$x_m = h, \quad h > 0, \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_i(x_i - x_i^\circ) + x_m &= 0, \quad (4.3)\\ -a_i(x_i + x_i^\circ) + x_m &= 0, \quad (4.4)\end{aligned}\right\} \; x_i^\circ > 0,\; a_i > 0 \;\; (i = 1, \ldots, m-1)$$

h étant une constante telle que $\tilde{x}_m < h$, les a_i étant choisies de façon qu'on ait $A[A_i] < 0$, pour les vecteurs $A_i(0, \ldots, a_i, 0, \ldots, 1)$ $(i = 1, \ldots, \ldots, m-1)$.

Les points $X_i^\circ(0, \ldots, x_i^\circ, \ldots, 0)$ sont choisis de façon que les plans (4.3) passent en dehors de la sphère $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \bar{\varrho}^2$.

Il est aisé de voir que les plans (4.1)-(4.4) ont l'orientation de l'espace par rapport à l'équation (1.1), de sorte que le domaine Ω satisfait aux hypothèses du théorème 3.

Il en résulte que, si l'on pose le problème (P) homogène relatif au domaine Σ, la solution unique du problème homogène analogue relatif au domaine Ω est $u(x_1, \ldots, x_m, t) \equiv 0$ et on a en particulier $u(\tilde{X}, \tilde{t}) = 0$.

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à M. M. Krzyżański qui a bien voulu diriger les recherches exposées dans ce travail.

Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, I, II, Warszawa 1957 et 1962.

[2] M. Picone, *Nuovi determinazioni per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali*, Rend. R. Acad. Naz. Lincei 28 (1938), p. 1-10.

[3] J. Szarski et T. Ważewski, *Sur une méthode de comparaison des équations hyperboliques aux dérivées partielles du second ordre avec les équations differentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci. 1-2 (1953), p. 6-10.

[4] Н. С. Пискунов (N. S. Piscunov), *Уравнение гиперболо-параболического типа*, Mat. Sborn. 3 (1938), p. 259-270.

[5] S. Zaremba, Rendic Acc. Lincei, Ser. 5, 14 (1915), p. 904.

[6] Friedrichs, Levy, Math. Ann. 98 (1928), p. 192.

[7] С. Л. Соболев (S. L. Sobolev), *Уравнения математической физики*, Moscou 1950.

Reçu par la Rédaction le 12. 1. 1963