ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1962)

Sur les plans osculateurs orientés

par K. RADZISZEWSKI (Lublin)

Il y a souvent lieu de considérer des plans sculateurs de différents types. Mais, suivant la courbe envisagée, il est souvent facile de démontrer l'existence d'un plan osculateur d'un type déterminé, tandis qu'il y a de grandes difficultés à démontrer l'existence de plans osculateurs d'autres types, bien que leur existence soit très importante pour le problème donné (p. ex. dans le travail [4], pour la démonstration du théorème: Si $\langle A \ast B\rangle$ (1) est une ligne géodésique sur une surface convexe lisse S, alors son rayon-vecteur $\boldsymbol{r}(s) = AM$, $M \in \langle A \ast B\rangle$ peut être exprimé comme il suit:

$$\boldsymbol{r}(s) = s\boldsymbol{t}_0 + \Big[\int_0^s k(u)\,du\Big]\boldsymbol{\nu}(s)$$

où s désigne la longueur de l'arc $\langle A \ast M\rangle$, $\boldsymbol{t}_0$ est le vecteur-unité tangent à la ligne géodésique au point A, $k(s)$ désigne la courbure intégrale [5] de l'arc $\langle A \ast M\rangle$ de la ligne géodésique, tandis que $\boldsymbol{\nu}$ est un vecteur tendant vers le vecteur-unité $\boldsymbol{n}_0$, normal à la surface S au point A). Il semble donc assez important de trouver les conditions d'équivalence de toutes les définitions des plans osculateurs.

Comme un plan peut être déterminé par trois points, ou par un point et une droite, ou bien par deux droites, on peut définir de plusieurs différentes manières les plans osculateurs d'une courbe dans l'espace euclidien à trois dimensions.

C'est M. Van der Waag qui a donné dans son travail [1] une classification des plans osculateurs.

Nous énumérons à la page 160, suivant M. Van der Waag, les huit types (I-VIII) de plans osculateurs. M. Van der Waag a introduit la notion de plan osculateur défini avant la limite, c'est-à-dire tel que les éléments de la courbe donnée (points, droites tangentes) d'un certain entourage du point limitrophe sur la courbe, déterminent univoquement le plan osculateur avant le passage à la limite (c'est-à-dire trois points n'appartiennent pas à une droite, le point n'appartient pas à la tangente

(1) v. la définition de ce symbole à la page 160.

voisine, etc.). Dans le travail [1] l'auteur a donné les conditions d'existence des plans osculateurs et la dépendance entre les plans osculateurs des différents types, en général, avec la condition d'existence du plan osculateur défini avant la limite (II→I, III→I, IV→I, IV→V, V→IV±, VI→(VIII-I), VII→VI, VIII→VI).

Dans ce travail, nous établissons certaines conditions pour l'équivalence des plans osculateurs de tous les types I-VIII. Dans ces conditions la notion de plan osculateur orienté, introduite dans ce travail, joue un rôle très important.

Notations et définitions

M. Van der Waag [1] a disitngué les types suivants de plans osculateurs:

I. $\pi = \lim\limits_{P\to M}[t(M), P]$,

II. $\pi = \lim\limits_{P',P''\to M}[P', M, P'']$, $P' \in \langle A \ast M)$, $P'' \in (M \ast B\rangle$,

III. $\pi = \lim\limits_{P\to M}[t(M), t(P)]$,

IV. $\pi = \lim\limits_{P',P''\to M}[M, P', P'']$,

V. $\pi = \lim\limits_{P\to M}[M, t(P)]$,

VI. $\pi = \lim\limits_{P',P'',P'''\to M}[P', P'', P''']$,

VII. $\pi = \lim\limits_{P',P''\to M}[P', t(P'')]$,

VIII. $\pi = \lim\limits_{P',P''\to M}[t(P'), t(P'')]$,

où $\langle A \ast B\rangle$ désigne l'arc fermé de la courbe contenu entre les points A et B, M un point fixé et P', P'', P''' des points tendant vers M sur $\langle A \ast B\rangle$, $t(P)$ la tangente en un point $P \in \langle A \ast B\rangle$, $[P, t(M)]$ le plan parallèle aux droites PM et $t(M)$, $[P, Q, R]$ le plan parallèle aux droites PQ et QR, $[t(P), t(Q)]$ le plan parallèle aux droites $t(P)$ et $t(Q)$.

Dans la suite de ce travail nous nous occuperons seulement des courbes admettant une tangente ordinaire continue (c'est-à-dire telles que le contingent en chaque point intérieur se compose de deux demi-droites opposées).

Soit $\boldsymbol{t}(P)$ le vecteur tangent à la courbe $\langle A \ast B\rangle$ au point P, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{t}(P) = \lim_{P'\to P} \varepsilon \frac{\boldsymbol{PP'}}{|\boldsymbol{PP'}|} \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad P' \in (P \ast B\rangle, \\ -1 & \text{si} \quad P' \in \langle A \ast P) \end{cases}$$

et $\boldsymbol{PP'}$ désigne le vecteur d'origine P et d'extrémité P', $|\boldsymbol{PP'}|$ = longeur de $\boldsymbol{PP'}$.

Nous allons introduire la notion de plan osculateur orienté. Dans ce but, nous associerons à ces plans osculateurs, définis par les formules I-VIII, les vecteurs normaux définis de la manière suivante:

I. $N = \lim\limits_{P\to M} \dfrac{t(M)\times MP}{|t(M)\times MP|}$ lorsque $P \in (M \ast B\rangle$,

$N = \lim\limits_{P\to M} \dfrac{PM\times t(M)}{|PM\times t(M)|}$ lorsque $P \in \langle A \ast M)$,

II. $N = \lim\limits_{P',P''\to M} \dfrac{P'M\times MP''}{|P'M\times MP''|}$ lorsque $P' \in \langle A \ast M)$, $P'' \in (M \ast B\rangle$,

III. $N = \lim\limits_{P\to M} \dfrac{t(M)\times t(P)}{|t(M)\times t(P)|}$ lorsque $P \in (M \ast B\rangle$,

$N = \lim\limits_{P\to M} \dfrac{t(P)\times t(M)}{|t(P)\times t(M)|}$ lorsque $P \in \langle A \ast M)$,

IV. comme dans le cas II,

V. comme dans le cas I,

VI. comme dans le cas II,

VII. comme dans le cas I,

VIII. comme dans le cas III.

Le plan osculateur de la courbe $\langle A \ast B\rangle$ au point M, pris avec son vecteur normal défini plus haut, sera appelé "orienté" et désigné par le symbole $\pi(M)$.

La règle générale, plus expressive mais moins précise, servant à la définition du plan osculateur orienté, peut être mise sous la forme suivante:

Le plan osculateur en un point $M \in \langle A \ast B\rangle$ est la limite des plans parallèles aux vecteurs $P'P''$ et $P''P'''$, ou $P'P''$ et $t(P'')$, ou $t(P')$ et $P'P''$, ou $t(P')$ et $t(P'')$, où P', P'', P''' sont trois points pris dans l'ordre de croissance de leurs paramètres sur la courbe $\langle A \ast B\rangle$ et $t(P)$ le vecteur tangent à $\langle A \ast B\rangle$. A ces plans nous associerons leurs vecteurs normaux ayant la direction du produit vectoriel des vecteurs cités plus haut, où les facteurs sont notés dans l'ordre de leur localisation sur la courbe $\langle A \ast B\rangle$.

Les plans: $[P, Q, R]$, $[P, t(M)]$, $[t(M), P]$, $[t(P), t(Q)]$ munis respectivement des vecteur normaux: $\dfrac{PQ\times QR}{|PQ\times QR|}$, $\dfrac{PM\times t(M)}{|PM\times t(M)|}$, $\dfrac{t(M)\times MP}{|t(M)\times MP|}$, $\dfrac{t(P)\times t(Q)}{|t(P)\times t(Q)|}$ seront désignés respectivement par les symboles: $\{P, Q, R\}$ ou $\{PQ, QR\}$, $\{P, t(M)\}$ ou $\{PM, t(M)\}$, $\{t(M), P\}$ ou $\{t(M), MP\}$, $\{t(P), t(Q)\}$ ou $\{t(P), t(Q)\}$.

Dans le cas où la courbe $\langle A \ast B\rangle$ contient des segments de droite, nous admettrons comme plan osculateur en un point intérieur de ces segments, le plan qui convient le mieux à nos considérations, mais le même pour tous les points du segment donné (p. ex. si le plan osculateur est continu le long de la courbe contenant des segments de droite, alors sur chaque segment nous prendrons pour plan osculateur celui pour lequel la continuité sera conservée).

Equivalence des plans osculateurs

LEMME 0. *Si la courbe $\langle A \ast B\rangle$ admet un vecteur tangent continu $\mathbf{t}(P)$ et un plan osculateur orienté continu de type* I, *et si $M \in \langle A \ast B\rangle$ n'est pas un point intérieur d'un segment de droite, alors il existe un entourage $U(M)$ du point M sur la courbe $\langle A \ast B\rangle$ tel qu'aucun point de cet entourage, outre le point M, ne soit contenu sur la tangente $t(M)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite de points $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots \to M$, $M_i \in \langle M \ast B\rangle$, $M_i \neq M$, $i = 1, 2, \ldots$ telle que $M_i \in t(M)$.

Si $\tau(M)$ désigne le plan contenant la droite $t(M)$ et perpendiculaire au plan osculateur $\pi(M)$ de la courbe $\langle A \ast B\rangle$ au point M, alors il existe un entourage $U(M)$ du point M sur $\langle A \ast B\rangle$ tel que tous les points de $U(M)$ se trouvent d'un côté du plan $\tau(M)$ (car si les points $X \in (M \ast B\rangle$ et $Y \in (M \ast B\rangle$ appartenant à différents côtés du plan $\tau(M)$, existaient, alors les plans orientés $\{\mathbf{t}(M), MX\}$ et $\{\mathbf{t}(M), MY\}$ auraient des limites différentes).

Maintenant, nous allons déplacer le plan $\tau(M)$ parallèlement dans la direction où se trouve l'arc $\langle M \ast M_i\rangle$, $M_i \in U(M)$. Le plan $\tau(M)$ a avec l'arc $\langle M_{i-1} \ast M_i\rangle$ les points communs M_{i-1} et M_i. En vertu de la continuité de la courbe $\langle A \ast B\rangle$, le plan τ_a obtenu du plan $\tau(M)$ par un déplacement parallèle sur une distance égale à a, aura au moins deux points communs, E et F, avec l'arc $\langle M_{i-1} \ast M_i\rangle$. La droite EF tendra vers la tangente $t(N_i)$, lorsque les points E et F tendent vers le point N_i, ou vers la tangente $N_i'N_i''$, lorsque les points E et F tendent vers les points N_i' et N_i'', $a \to \infty$.

Le raisonnement étant le même pour tous les deux cas, supposons que la limite des droites EF soit la tangente $t(N_i)$. Supposons aussi que la tangente $t(N_i)$ ne soit pas contenue dans le plan $\tau(M)$, ce qui peut être réalisé, car dans tout l'entourage du point M sur $\langle A \ast B\rangle$ il existe des arcs $\langle M_n \ast M_{n+1}\rangle$ qui ne se trouvent pas dans le plan $\tau(M)$.

De la définition du point N_i résulte l'existence d'une suite de points $N_i^k \to N_i$, $N_i^k \in (N_i \ast M_i\rangle$ telle que $\sphericalangle(N, N_iN_i^k) > \pi/2$, où N désigne le vecteur normal du plan $\tau(M)$ dirigé vers le côté de $\tau(M)$, où se trouve l'arc $\langle M \ast M_i\rangle$.

Ainsi, les plans orientés $\{\mathbf{t}(M), MN_i\}$ et $\lim\limits_{N_i^k \to N_i} \{\mathbf{t}(N_i), N_iN_i^k\}$ auront des limites différentes, lorsque $M_i \to M$, car les vecteurs normaux des plàns limites auront des directions différentes. Alors, nous avons une contradiction avec la supposition que le plan osculateur orienté du type I est continu, ce qui prouve le lemme 0.

Evidemment, ce lemme n'est plus vrai si l'on ne suppose pas la continuité du plan osculateur orienté, comme le montre l'exemple de la courbe plane, située d'un côté de sa tangent $t(A)$ et tangente à la droite $t(A)$ au point $M_i \to A$.

Nous prouverons dans la suite que l'existence d'un plan osculateur orienté continu du type I entraîne celle d'un plan osculateur orienté continu de tous les autres types II-VIII. Dans ce but, nous prouverons seulement que l'existence du plan osculateur orienté continu du type I entraîne l'existence du plan osculateur orienté continu des types VI et VIII, car l'existence de tous les autres types en résulte trivialement.

Remarquons que le lemme 0 peut aussi être énoncé sous la forme suivante:

LEMME 1. *Si la courbe $\langle A \divideontimes B\rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* I, *alors ce plan est défini avant la limite au sens de M. Van der Waag* [1].

LEMME 2. *Si la courbe $\langle A \divideontimes B\rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté $\pi(M)$ du type* I, *alors $\pi(M)$ sera aussi un plan osculateur orienté du type* II.

Démonstration. Prenons les points $P' \in \langle A \divideontimes M)$ et $P'' \in (M \divideontimes B\rangle$. Les plans orientés $\{P'M, \boldsymbol{t}(M)\}$ et $\{\boldsymbol{t}(M), MP''\}$ tendent vers le plan orienté $\pi(M)$, lorsque $P', P'' \to M$. Le plan orienté $\{P'M, MP''\}$ tend aussi vers le plan orienté $\pi(M)$, comme le on voit aisément en considérant le triangle sphérique dont les sommets sont les extrémités des vecteurs $\dfrac{P'M}{|P'M|}, \dfrac{MP''}{|MP''|}, \boldsymbol{t}(M)$, d'origines au centre de la sphère-unité.

LEMME 3. *Si la courbe $\langle A \divideontimes B\rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* I, *alors elle admet aussi un plan osculateur orienté continu du type* III.

Démonstration. Soit $\langle A \divideontimes B\rangle$ la courbe ayant un vecteur tangent continu $\boldsymbol{t}(M)$, $M \in \langle A \divideontimes B\rangle$, $|\boldsymbol{t}(M)| = 1$. Par $\pi_{\mathrm{I}}(M)$ nous désignerons le plan osculateur orienté du type I au point M de la courbe $\langle A \divideontimes B\rangle$.

Il résulte de l'hypothèse qu'il existe un entourage $U(A)$ du point A sur la courbe $\langle A \divideontimes B\rangle$ tel que

$$(1) \qquad \sphericalangle\big(\pi_{\mathrm{I}}(A), \pi_{\mathrm{I}}(M)\big) < \varepsilon, \quad \sphericalangle\big(\pi_{\mathrm{I}}(A), \{\boldsymbol{t}(A), AM\}\big) < \varepsilon \quad \text{pour } M \in U(A).$$

Soit $\langle A \divideontimes B\rangle \subset U(A)$. Supposons que le plan $\{\boldsymbol{t}(A), \boldsymbol{t}(M_n)\}$ contenant le point A et parallèle aux vecteurs $\boldsymbol{t}(A)$ et $\boldsymbol{t}(M_n)$, $M_n \in (A \divideontimes B\rangle$, $M_n \to A$, $n = 1, 2, \ldots$, tende vers le plan $\pi_{\mathrm{II}}(A) \neq \pi_{\mathrm{I}}(A)$. Il en résulte que le plan $\{\boldsymbol{t}(A), \boldsymbol{t}(M_n)\}$ ne coupe pas l'arc $\langle A \divideontimes M_n\rangle$, le point A

excepté, pour $n > n_0$ (car s'il coupait l'arc $\langle A \divideontimes M_n \rangle$ aux points $Q_{n_k} \in \langle A \divideontimes M_{n_k} \rangle$, alors la droite AQ_{n_k} serait contenue dans le plan $\{\boldsymbol{t}(A), \boldsymbol{t}(M_{n_k})\}$ et les plans $\{\boldsymbol{t}(A), AQ_{n_k}\}$ tendraient vers le plan $\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{II}}(A)$, en contradiction avec le fait que $\{\boldsymbol{t}(A), AQ_{n_k}\} \to \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{I}}(A) \neq \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{II}}(A)$.

Désignons par $\boldsymbol{N}_n$ le vecteur normal du plan $[t(A), t(M_n)]$ dirigé vers le côté de ce plan où se trouve la courbe $\langle A \divideontimes M_n \rangle$. Evidemment, le vecteur $\boldsymbol{N}_n$ est perpendiculaire aux vecteurs $\boldsymbol{t}(A)$ et $\boldsymbol{t}(M_n)$.

En vertu de la continuité du vecteur $\boldsymbol{t}(M)$ il existe un point $M' \in \langle A \divideontimes M_n \rangle$ tel que $\sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(M'), \boldsymbol{N}_n\big) < \pi/2$. Si nous déplaçons le point M sur l'arc $\langle M' \divideontimes M_n \rangle$ du point M' jusqu'au point M_n, alors, il existe un premier point M'' tel que $\sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(M''), \boldsymbol{N}_n\big) = \pi/2$.

En vertu de l'hypothèse, il existe un entourage $U(M'')$ du point M'' tel que $U(M'') \subset \langle A \divideontimes M'' \rangle$ et $\sphericalangle\big(\{MM'', \boldsymbol{t}(M'')\}, \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{I}}(M)\big) < \varepsilon$.

D'où et de (1) nous avons

$$\sphericalangle\big(\{MM'', \boldsymbol{t}(M'')\}\,, \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{I}}(A)\big) < 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad M \in U(M'')\,. \tag{2}$$

Soit $M' \in U(M'')$. Maintenant, si dans l'arc $\langle M' \divideontimes M'' \rangle$ nous inscrivons une ligne brisée, alors ses côtés (vecteurs) formeront avec le vecteur $\boldsymbol{N}_n$ un angle moindre que $\pi/2$, pourvu que la longueur du côté maximal soit assez petite (car les droites déterminées par les côtés tendent vers les tangentes, et ces tangentes forment avec le vecteur $\boldsymbol{N}_n$ un angle moindre que $\pi/2$ sur chaque arc $\langle M' \divideontimes M \rangle \subset \langle M' \divideontimes M'' \rangle$), donc l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{M'M''}$ et $\boldsymbol{N}_n$ sera moindre que $\pi/2$.

D'où, comme $\sphericalangle(\boldsymbol{N}_n, \boldsymbol{AM}) < \pi/2$ et $\sphericalangle(\boldsymbol{N}_n, \boldsymbol{M'M''}) < \pi/2$, en profitant du fait que les plans $[\boldsymbol{t}(A), AM]$ et $[M'M'', \boldsymbol{t}(M'')]$ forment avec le plan $\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{I}}(A)$ un angle arbitrairement petit, donc un angle plus grand que $\sphericalangle\big(\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{I}}(A), \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{II}}(A)\big) - \varepsilon > a$ avec le plan $\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{II}}(A)$ (donc un angle plus grand que $a - \varepsilon_1$ avec le plan $[\boldsymbol{t}(A), \boldsymbol{t}(M_n)]$), où a est un nombre positif fixé, nous obtenons

$$\sphericalangle\big(\{\boldsymbol{t}(A), AM\}, \{M'M'', \boldsymbol{t}(M'')\}\big) > \pi - \varepsilon_2 \tag{3}$$

pour M assez proches de A, M' assez proches de M'', M_n assez proches de A, relativement choisis en dépendence des nombres positif ε, ε_1 et ε_2, ce qu'on peut réaliser parce que le plan $\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{I}}(M)$ est continu.

Mais, l'inégalité (3) est en contradiction avec (2), car le plan $\{\boldsymbol{t}(A), AM\}$ diffère arbitrairement peu du plan $\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{I}}(A)$.

La supposition $\{\boldsymbol{t}(A), \boldsymbol{t}(M_n)\} \to \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{II}}(A) \neq \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{I}}(A)$ conduit donc à une contradiction, ce qui prouve le lemme.

La conclusion du lemme 3 peut être énoncée sous une forme différente. Notamment, nous prenons l'indicatrice sphérique par les tangentes de la courbe $\langle A \divideontimes B \rangle$ (décrite par l'extrémité du vecteur-unité tangent à la courbe $\langle A \divideontimes B \rangle$, tandis que leurs origines se trouvent au centre de la sphère). Nous appelons "image sphérique du plan a" le grand cercle formé par l'intersection de la surface sphérique avec le plan parallèle au plan a et contenant le centre de la sphère.

Dans cette terminologie, on peut énoncer le lemme 3 sous la forme suivante:

LEMME 3'. *Si la courbe $\langle A \ast B\rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* I, *alors leur indicatrice sphérique admet un vecteur tangent continu.*

D'où, en vertu du théorème: "Si la courbe admet en chaque point une tangente ordinaire continue, alors elle admet aussi une tangente au sens strict" ([3], p. 103) il résulte:

LEMME 4. *Si la courbe $\langle A \ast B\rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* III, *alors elle admet aussi un plan osculateur orienté continu du type* VIII.

LEMME 5. *Si la courbe $\langle A \ast B\rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* VIII, *alors elle admet aussi un plan osculateur orienté continu du type* VII.

Démonstration. Soit $M' \in \langle A \ast M_0\rangle$, $\langle A \ast M_0\rangle \subset \langle A \ast B\rangle$. Sur l'arc $\langle M' \ast M_0\rangle$ il existe un point M'' tel que le vecteur $\boldsymbol{t}(M'')$ est parallèle au plan $\{M'M_0, \boldsymbol{t}(M_0)\}$. Comme, par hypothèse, le plan $\{\boldsymbol{t}(M''), \boldsymbol{t}(M_0)\} \to \pi(A)$, lorsque $M_0 \to A$, donc le plan $[M'M_0, \boldsymbol{t}(M_0)] \to \pi(A)$.

Il reste à prouver que le vecteur normal $\dfrac{M'M_0 \times \boldsymbol{t}(M_0)}{|M'M_0 \times \boldsymbol{t}(M_0)|}$ du plan $\{M'M_0, \boldsymbol{t}(M_0)\}$ et le vecteur $\dfrac{\boldsymbol{t}(M'') \times \boldsymbol{t}(M_0)}{|\boldsymbol{t}(M'') \times \boldsymbol{t}(M_0)|}$ tendent vers la même limite.

Désignons par $\boldsymbol{N}_0$ le vecteur perpendiculaire à $\boldsymbol{t}(A)$ et parallèle au plan $\pi(A)$. Soit $\sphericalangle\big(\boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{t}(M_0)\big) < \pi/2$.

Désignons par a le plan contenant la droite $M'M_0$ et perpendiculaire au plan $\{(M'M_0, \boldsymbol{t}(M_0)\}$. Le vecteur-unité $\boldsymbol{N}$, normal à a, vérifie l'inégalité $\sphericalangle(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}_0) < \pi/2$.

Si l'on avait

$$\sphericalangle\big(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{t}(M_0)\big) > \sphericalangle(\boldsymbol{N}, M'M_0) = \pi/2\ ,$$

il existerait sur l'arc $\langle M' \ast M_0\rangle$ un point P tel que le vecteur $\boldsymbol{t}(P)$ tangent à la courbe $\langle A \ast B\rangle$ serait parallèle au plan a et le plan orienté $\{\boldsymbol{t}(P), \boldsymbol{t}(M_0)\}$ tendrait vers un plan autre que le plan $\{\boldsymbol{t}(A), \boldsymbol{t}(M_0)\}$ et nous aurions une contradiction. Donc on a

$$\sphericalangle\big(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{t}(M_0)\big) \leqslant \sphericalangle(\boldsymbol{N}, M'M_0)\,,$$

d'où les plans $\{M'M_0, \boldsymbol{t}(M_0)\}$ et $\{\boldsymbol{t}(P), \boldsymbol{t}(M_0)\}$ tendent vers la même limite, ce qui prouve le lemme.

Pour simplifier l'écriture, nous avons donné cette démonstration pour le cas où les points M' et M_0 se trouvent en localisation spéciale par rapport au point A. La démonstration des autres cas est identique à la précédente.

LEMME 6. *Si la courbe* $\langle A \ast B\rangle$ *admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* VII, *elle admet aussi un plan osculateur orienté continu du type* VI.

Démonstration. Soit $M_0, M_1, M_2 \in \langle A \ast B\rangle$, $M_0 \in \langle A \ast M_1)$, $M_1 \in \langle A \ast M_2)$. Le plan $\{M_0M_1, M_1M_2\}$ tend vers la même limite que les plans $\{M_0M_1, \boldsymbol{t}(M_1)\}$ et $\{\boldsymbol{t}(M_1), M_1M_2\}$, lorsque les points M_0, M_1, M_2 tendent vers le point M. On le voit immédiatement en considérant le triangle sphèrique dont les sommets sont les extrémités des vecteurs $\dfrac{M_0M_1}{|M_0M_1|}, \dfrac{M_1M_2}{|M_1M_2|}, \boldsymbol{t}(M_1)$, d'origines au centre de la sphère-unité. En effet, l'angle dont le sommet est l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{t}(M_1)$ tend vers π, donc les autres angles tendent vers zéro, ce qui prouve le lemme.

En vertu de ces lemmes nous pouvons maintenant énoncer le

LEMME 7. *Si la courbe* $\langle A \ast B\rangle$ *admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* I, *elle admet aussi un plan osculateur orienté continu de tous les autres types* II-VIII.

Nous prouverons maintenant que l'existence d'un plan osculateur orienté continu des types V ou III entraîne celle d'un plan osculateur orienté continu du type I. L'existence d'un plan osculateur orienté continu du type I, sous la supposition d'existence des types II, IV, V, VI, VII, résulte d'une manière triviale. L'implication VIII→VII a déjà été étudiée dans le lemme 5.

LEMME 8. *Si la courbe* $\langle A \ast B\rangle$ *admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* V, *ce plan est aussi défini avant la limite au sens de M. Van der Waag.*

Démonstration. Supposons que le plan $\pi(A)$ ne soit pas défini avant la limite, c'est-à-dire qu'il existe une suite de points M_n, $n = 1, 2, \ldots$, telle que $M_n \to A$, $M_n \in \langle A \ast B\rangle$ et $A \in t(M_n)$.

Prenons deux suites de points $M_n^i \in \langle A \ast M_n)$ et $\bar{M}_n^j \in (M_n \ast B\rangle$ telles que

$$\sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(M_n^i), M_n^iM_n, \boldsymbol{\pi}(M_n)\big) < \varepsilon, \qquad \sphericalangle\big(\{M_n\bar{M}_n^j, \boldsymbol{t}(M_n^j)\}, \boldsymbol{\pi}(M_n)\big) < \varepsilon$$

pour $i, j > i_0$, $M_n^i \to M_n$, $\bar{M}_n^j \to M_n$.

Soit $\boldsymbol{N}$ le vecteur perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{t}(A)$ et situé dans le plan $\pi(A)$, $|\boldsymbol{N}| = 1$. Par a_n désignons un plan contenant la droite AM_n et perpendiculaire au plan $\pi(A)$, et par $\boldsymbol{N}_n$ désignons le vecteur normal de a_n, $\sphericalangle(\boldsymbol{N}_n, \boldsymbol{N}) < \pi/2$.

Soit $\bar{a}_n^j$ le plan contenant la droite $M_n\bar{M}_n^j$ et perpendiculaire au plan $\pi(A)$. Désignons par $\bar{N}_n^j$ le vecteur normal de $\bar{a}_n^j$, satisfaisant à la condition $\sphericalangle(\bar{N}_n^j, N_n) < \pi/2$.

Soit a_n^i le plan contenant la droite $M_n^iM_n$ et perpendiculaire au plan $\pi(A)$. Désignons par N_n^i le vecteur normal de a_n^i, satisfaisant à la condition $\sphericalangle(N_n^i, N_n) < \pi/2$. Le plan osculateur orienté existe, d'ou on a p. ex.

$$\sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(M_n^i), N_n^i\big) \leqslant \sphericalangle(M_n^iM_n, N_n^i) = \pi/2; \quad i > i_0, \tag{4}$$

et cette inégalité sera aussi vérifiée pour tous les points M d'un certain entourage $U^-(M_n) \subset \langle A \divideontimes M_n\rangle$ du point M_n sur la courbe $\langle A \divideontimes B\rangle$ (car si la suite $P_i \to M_n$ satisfaisait à l'inégalité contraire, le plan $\{\boldsymbol{t}(P_i), P_iM_n\}$ aurait une limite autre que le plan $\{\boldsymbol{t}(M_n^i), M_n^iM_n\}$, le plan a_n^i formant avec le plan $[\boldsymbol{t}(P_i), P_iM_n]$ un angle plus grand que $\pi/2-\varepsilon$).

D'où il résulte

$$\sphericalangle(M_n\bar{M}_n^j, N_n^j) \leqslant \sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(\bar{M}_n^j), \bar{N}_n^j\big); \quad j > j_0, \tag{5}$$

pour tous les points M d'un entourage $U^+(M_n) \subset \langle M_n \divideontimes B\rangle$ (en vertu des mêmes considérations, car les plans $\{\boldsymbol{t}(M_n^i), M_n^iM_n\}$ et $\{M_n\bar{M}_n^i, t(\bar{M}_n^i)\}$ tendent vers la même limite, lorsque $M_n^i \to M_n$, $\bar{M}_n^j \to M_n$).

De (4) il résulte que l'arc $\langle M_n^i \divideontimes M_n\rangle$ tout entier doit être du côté positif du plan a_n^i, c'est-à-dire du côté vers lequel est dirigé le vecteur N_n^i, (car si p. ex. le point $P \in \langle M_n^i \divideontimes M_n\rangle$ se trouvait du côté négatif du plan a_n^i, il existerait un arc $\langle Q \divideontimes Q'\rangle \subset \langle M_n^i \divideontimes M_n\rangle$, $Q, Q' \in a_n^i$, qui se trouverait du côté négatif du plan a_n^i, donc il existerait un point P' tel que la tangente $t(P')$ serait parallèle au plan a_n^i et $\sphericalangle(P'M_n, N_n^i) < \sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(P'), N_n^i\big) = \pi/2$. D'où, le plan $\{\boldsymbol{t}(P'), P'M_n\}$ aurait une autre limite que le plan $\{\boldsymbol{t}(M_n^i), M_n^iM_n\}$, lorsque $M_n^i \to M_n$), pour i assez grand.

Par analogie avec (5) il résulte que l'arc $\langle M_n \divideontimes \bar{M}_n^j\rangle$ tout entier est du côté positif du plan $\bar{a}_n^j$, pour j assez grand.

Il en résulte que l'arc $\langle M_n^i \divideontimes M_n\rangle$ se trouve du côté négatif du plan a_n, car si le point M_n^i se trouvait du côté positif du plan a_n, alors en vertu du fait l'arc $\langle M_n^i \divideontimes M_n\rangle$ se trouve du côté positif du plan a_n^i, la courbe $\langle A \divideontimes B\rangle$ ne serait pas tangente à la droite $t(M_n)$.

Par analogie, l'arc $\langle M_n \divideontimes \bar{M}_n^j\rangle$ se trouve du côté négatif du plan a_n.

Ainsi, nous avons prouvé que l'arc $\langle M_n^i \divideontimes \bar{M}_n^j\rangle$, dont M_n est un point intérieur, se trouve tout entier du côté négatif du plan a_n.

Si au lieu de (4) on suppose l'inégalite contraire, on obtiendra le méme résultat, mais l'arc $\langle M_n^i \divideontimes \bar{M}_n^j\rangle$ se trouvera du côté opposé du plan a_n.

Considérons maintenant le plan β_n perpendiculaire au plan $\pi(A)$ et contenant le point A. Supposons que son vecteur normal $\boldsymbol{B}_n$ forme avec le vecteur $\boldsymbol{N}$ un angle moindre que $\pi/2$. Lorsque le plan β_n se trouvera assez près du plan a_n, il coupera l'arc $\langle M_n^i \divideontimes \bar{M}_n^j\rangle$ en deux points $X_n \in \langle M_n^i \divideontimes M_n\rangle$ et $Y_n \in \langle M_n \divideontimes \bar{M}_n^j\rangle$, $X_n \to M_n$, $Y_n \to M_n$, lorsque $\beta_n \to a_n$.

Admettons que l'arc $\langle M_n^i \ast \bar{M}_n^j \rangle$ se trouve du côté négatif du plan a_n. Alors de (4) et (5)

$$\sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(X_n), \boldsymbol{B}_n\big) < \pi/2 \quad \text{et} \quad \sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(Y_n), \boldsymbol{B}_n\big) > \pi/2 \, .$$

D'où, le plan $\{AX_n, \boldsymbol{t}(X_n)\}$ aurait une autre limite que le plan $\{AY_n, \boldsymbol{t}(Y_n)\}$, lorsque $X_n \to A$, $Y_n \to A$. Les autres cas sont analogues.

Ainsi, nous obtenons une contradiction avec la supposition qu'il existe un plan osculateur orienté du type V, ce qui prouve le lemme.

LEMME 9. *Si la courbe $\langle A \ast B \rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* V, *alors elle admet aussi un plan osculateur orienté continu du type* I.

Démonstration. En vertu du théorème 4.6 ([1], p. 52) et du lemme 8, la courbe admet des plans osculateurs à droite et à gauche du type IV, d'où résulte l'existence d'un plan osculateur du type I.

Nous prouverons encore qu'il existe un plan osculateur du type I orientè.

Menons le plan a perpendiculaire au plan $\pi(A)$ et contenant la droite $t(A)$. Supposons que le plan osculateur $\pi(A)$ du type I ne soit pas orienté, c'est-à-dire qu'il existe une suite de points $M_n \in \langle A \ast B \rangle$ tels que les points M_{2n} se trouveront du côté positif du plan a et les points M_{2n+1} du côté négatif du plan a, $M_n \to A$.

Alors l'arc $\langle M_{2n-1} \ast M_{2n} \rangle$ coupera le plan a en un point N_{2n} et l'arc $\langle M_{2n} \ast M_{2n+1} \rangle$ en un point N_{2n+1}. Admettons que l'arc $\langle N_{2n} \ast N_{2n+1} \rangle$ se trouve complètement du côté positif du plan a. Sur l'arc $\langle N_{2n} \ast N_{2n+1} \rangle$ il existe un point P_{2n} tel que la tangente $t(P_{2n})$ sera parallèle au plan a. Par analogie, admettons que l'arc $\langle N_{2n_i+1} \ast N_{2n_i+2} \rangle$ soit tout entier du côté négatif du plan a et que le point P_{2n+1} soit tel que la tangente $t(P_{2n+1})$ est parallèle au plan a.

Alors, les plans $\{AP_{2n}, \boldsymbol{t}(P_{2n})\}$ tendraient vers une autre limite que les plans $\{AP_{2n+1}, \boldsymbol{t}(P_{2n+1})\}$, ce qui est en contradiction avec l'existence d'un plan osculateur orienté du type V.

Le lemme 9 est donc prouvé.

LEMME 10. *Si la courbe $\langle A \ast B \rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu du type* III, *elle admet aussi un plan osculateur orienté continu du type* I.

Démonstration. Sur l'arc $\langle A \ast M \rangle$ il existe un point P tel que la tangente $t(P)$ est parallèle au plan $[\boldsymbol{t}(A), AM]$. Comme le plan $[\boldsymbol{t}(A), \boldsymbol{t}(P)] \to \pi(A)$, le plan $[\boldsymbol{t}(A), AM]$ tendra aussi vers la même limite.

Nous prouverons maintenant qu'il existe un plan osculateur orienté. Dans ce but nous répéterons le raisonnement du lemme 9 avec les mêmes notations. Sur l'arc $\langle N_{2n} \ast N_{2n+1} \rangle$ il existe des points R_n et Q_n tels que $\sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(R_n), \boldsymbol{N}\big) < \pi/2$ et $\sphericalangle\big(\boldsymbol{t}(Q_n), \boldsymbol{N}\big) > \pi/2$, où $\boldsymbol{N}$ est le vecteur normal du plan α. D'où le plan $\{t(A), t(R_n)\}$ tendrait vers une limite autre que le plan $\{t(A), t(Q_n)\}$ et nous aurions contradiction, ce qui prouve notre lemme.

Ainsi, nous avons montré que l'existence d'un plan osculateur orienté continu du type I entraîne celle de tous les autres types et que l'existence d'un plan osculateur orienté continu d'un quelconque des types II-VIII entraîne celle d'un plan osculateur orienté continu du type I. Tous ces résultats être exprimés sous la forme suivante:

THÉORÈME. *Si la courbe $\langle A \ast B\rangle$ admet en chaque point un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu de l'un des types* I-VIII, *elle admet aussi des plans osculateurs orientés continus de tous les autres types* I-VIII.

Travaux cités

[1] E. J. van der Waag, *Sur les plans osculateurs, I, II*, Indagationes Mathematicae 14 (1952), p. 41-62.

[2] B. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris 1932.

[3] Ch. Pauc, *Les méthodes directes en géométrie différentielle*, Paris 1941.

[4] K. Radziszewski, *Sur la courbe intégrale d'une classe de courbes*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska 17 (1962).

[5] А. Д. Александров, *Теория кривых на основе приближения ломаными*, Успехи матем. наук, Том II, выпуск 3 (19) (1947), p. 182-184.

Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1961