ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
L (1989)

Ensembles pluripolaires exceptionnels pour la croissance partielle des fonctions holomorphes

par AHMED ZERIAHI (Rabat, Maroc)

Résumé. Soit Ω un espace de Stein (irréductible) de dimension $n \geqslant 1$, $E \subset \Omega$ un sous-ensemble pluripolaire de Ω. Soit $\varrho > 0$, $\sigma > 0$ on donne des conditions sur E pour qu'il existe une fonction holomorphe $f\colon \Omega \times C \to C$ dont E soit l'ensemble exceptionnel des points $z \in \Omega$, où la fonction entière $w \to f(z, w)$ a un ordre $\varrho_f(z) < \varrho$ (resp. un type $\sigma_f(z) < \sigma$ pour l'ordre partiel maximum $\bar{\varrho}_f = \sup\{\varrho_f(z)\colon z \in \Omega\} = \varrho$).

On montre en particulier que c'est le cas si E est pluripolaire complet de type F_σ et on donne un encadrement de E par de tels ensembles dans le cas général.

1. Introduction et enonce du problème. Rappelons tout d'abord quelques définitions classiques.

Soit $f\colon C \to C$ une fonction entière. Pour $r > 0$, on pose

$$M_f(r) = \sup\{|f(w)|\colon |w| \leqslant r\}.$$

On définit alors l'ordre de f par la formule

$$\varrho(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\mathrm{Log}^+ \mathrm{Log}\, M_f(r)}{\mathrm{Log}\, r}.$$

Si f est d'ordre fini $\varrho = \varrho(f) > 0$, on définit le type de f par la formule

$$\sigma = \sigma(f; \varrho) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\mathrm{Log}\, M_f(r)}{r^\varrho}.$$

Nous aurons besoin des formules suivantes de Lindelöf pour le calcul de l'ordre et du type d'une fonction entière à l'aide des coefficients de sa série de Taylor à l'origine:

PROPOSITION 1.1. ([3]). *Soit $f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ une fonction entière sur C. On a alors:*

(i) $$\varrho(f) = \limsup_{k \to \infty} \frac{k\, \mathrm{Log}\, k}{-\mathrm{Log}\, |a_k|}.$$

Si de plus f est d'ordre fini $\varrho(f) = \varrho > 0$, on a:

(ii) $$\sigma(f) = \frac{1}{e \cdot \varrho} \limsup_{k \to \infty} k\, |a_k|^{\varrho/k}.$$

Considérons maintenant une fonction holomorphe $f\colon \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$. Pour chaque $z \in \boldsymbol{C}^n$, on peut considérer l'ordre $\varrho_f(z)$ de la fonction entière $w \to f(z, w)$ que l'on appellera l'ordre partiel de f au point z (par rapport à la seconde variable).

Si f est d'ordre partiel maximum $\bar{\varrho}_f = \sup\{\varrho_f(z)\colon z \in \boldsymbol{C}^n\} < +\infty$, alors l'ordre de la fonction entière $w \to f(z, w)$ est égal à $\bar{\varrho}_f$ sauf pour un ensemble exceptionnel de valeurs de z, cet ensemble exceptionnel

(1) $$E_\varrho(f) = \{z \in \boldsymbol{C}^n\colon \varrho_f(z) < \bar{\varrho}_f\}$$

est un ensemble de type F_σ et pluripolaire dans $\boldsymbol{C}^n$ d'après un résultat de Lelong [11].

Si $\bar{\varrho}_f \in]0, +\infty[$, on définit le type partiel de f au point z pour l'ordre $\bar{\varrho}_f$, comme le type de la fonction entière $w \to f(z, w)$ pour l'ordre $\bar{\varrho}_f$.

Si $\varrho = \bar{\varrho}_f \in]0, +\infty[$ et si f est de type partiel maximum $\bar{\sigma}_f = \sup\{\sigma_f(z)\colon z \in \boldsymbol{C}^n\} < +\infty$, alors l'ensemble exceptionnel

(2) $$E_\sigma(f; \varrho) = \{z \in \boldsymbol{C}^n\colon \sigma_f(z) < \bar{\sigma}_f\}$$

est un ensemble de type F_σ et pluripolaire dans $\boldsymbol{C}^n$ ([11]).

Les premiers travaux dans ce sens sont ceux de Sire [16] et Lelong [10] qui ont considéré des fonctions entières de deux variables complexes.

De façon plus générale on peut considérer des fonctions holomorphes sur $\Omega \times \boldsymbol{C}$, où Ω est un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$. Les résultats les plus généraux et les plus précis dans ce sens sont ceux de Kiselman qui a considéré des types de croissance plus variés (voir [8] et [9] où l'on trouvera une bibliographie plus complète sur le sujet).

Dans ce travail nous allons étudier le problème inverse. Soit Ω un espace de Stein irréductible de dimension $n \geqslant 1$.

Problème. Caractériser les sous-ensembles pluripolaires de type F_σ de Ω qui sont de la forme (1) (resp. (2)).

Pour $n = 1$ et $\Omega = \boldsymbol{C}$, des résultats partiels ont été obtenu par Ronkin ([13]) pour le type et Stavskiĭ ([17]) pour l'ordre.

Pour $n \geqslant 2$, Lokšin ([12]) a montré que si E est pluripolaire de type F_σ, il existe une fonction holomorphe $f\colon \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ telle que $\bar{\varrho}_f = \sup\{\varrho_f(z)\colon z \in \boldsymbol{C}^n\} = 1$ et $\varrho_f(z) = 0$ si $\in E$, autrement dit $E \subset E_\varrho(f)$ avec $\varrho = 1$.

Dans ce travail nous considérons des ensembles pluripolaires de type F_σ d'un espace de Stein Ω (irréductible) de dimension $n \geqslant 1$.

Nous montrons que si E est un tel ensemble, alors pour tout ensemble G de type G_δ dans Ω tel que $E \subset E^*_{P(\Omega)} \subset G$ (où $E^*_{P(\Omega)}$ est défini par la formule (1) cidessous), on peut trouver une fonction f: $\Omega \times C \to C$ holomorphe telle que $E \subset E(f) \subset G$ (resp. $E \subset E_\sigma(f) \subset G$). Cela généralise les résultats de Lokšin d'une part et ceux de Ronkin et Stavskiĭ d'autre part.

2. Ensembles pluripolaires. Dans tout ce qui suit Ω sera un espace de Stein de dimension $n \geqslant 1$ que l'on supposera irréductible pour simplifier.

Un sous-ensemble $E \subset \Omega$ sera dit pluripolaire si pour tout $a \in E$, il existe un voisinage U_a de a dans Ω et une fonction u plurisous-harmonique (psh) sur U_a telle que $u(z) = -\infty$ si $z \in E \cap U_a$.

Désignons par $P(\Omega)$ le cône des fonctions plurisous-harmoniques (psh) sur Ω (par définition si $u \in P(\Omega)$ on a $u \not\equiv -\infty$ sur Ω).

D'après le théorème de Josefson (voir [2] et [7] pour $\Omega = C^n$ et [1] pour le cas général) si E est pluripolaire dans Ω alors E est $P(\Omega)$-polaire i.e. il existe $u \in P(\Omega)$ telle que $u(z) = -\infty$ si $z \in E$.

Nous dirons qu'un ensemble $E \subset \Omega$ est *$P(\Omega)$-polaire complet* s'il existe $u \in P(\Omega)$ telle que $E = \{z \in \Omega\colon u(z) = -\infty\}$, un tel ensemble est nécessairement de type G_δ.

Si E est un ensemble $P(\Omega)$-polaire, on définit l'ensemble suivant

(1) $E^*_{P(\Omega)} = \{z \in \Omega\colon u(z) = -\infty$ pour tout $u \in P(\Omega)$ telles que $u/E = -\infty\}$.

Si E est $P(\Omega)$-polaire complet alors $E^*_{P(\Omega)} = E$, mais la réciproque n'est pas vraie. Pour le voir notons que dans le cas où $\Omega = C$, pour tout ensemble polaire $E \subset C$, on a $E^*_{P(C)} = E$.

Par exemple $E = Q$ (ensemble des rationnels de la droite réelle) n'est pas de type G_δ dans C, ce qui prouve que E n'est pas polaire complet, pourtant on a $E = E^*_{P(C)}$. Si $n \geqslant 2$, l'ensemble $E = Q \times C^{n-1}$ est $P(C^n)$-polaire non complet (car non G_δ) et vérifie $E = E^*_{P(C^n)}$.

PROPOSITION 2.1. *Soit E un ensemble pluripolaire dans Ω, F un ensemble de type F_σ, G un ensemble de type G_δ dans Ω tels que $F \subset E \subset E^*_\Omega \subset G$. Alors il existe un ensemble $\tilde{E} \subset \Omega$, $P(\Omega)$-polaire complet tel que $F \subset \tilde{E} \subset G$.*

En particulier, tout ensemble $E \subset \Omega$, qui est à la fois de type F_σ et G_δ et qui vérifie $E = E^*_{P(\Omega)}$, est $P(\Omega)$-polaire complet.

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 2.1. *Soit E un sous-ensemble pluripolaire de Ω, F et K deux compacts de Ω tels que $F \subset E$, $K \subset \Omega \setminus E^*_{P(\Omega)}$ et $\omega \Subset \Omega$. Alors pour tout nombre réel $A > 0$ il existe v* psh, *continue sur Ω et vérifiant les propriétés suivantes*:

(i) $$v(z) \leqslant -A, \quad \forall z \in F,$$

(ii) $$v(z) \geqslant -1, \quad \forall z \in K,$$

(iii) $$\sup_{z \in \bar{\omega}} v(z) = 0.$$

Démonstration. Soit $a \in K \subset \Omega \setminus E^*_{P(\Omega)}$, il existe alors par définition de $E^*_{P(\Omega)}$ une fonction u psh sur Ω telle que $u | E = -\infty$ et $u(a) > -\infty$. Posons $M = \max_{z \in \bar{\omega} \cup K} \{u(z) - u(a), 0\}$ alors: la fonction

$$w(z) = \frac{1}{2M+1}(u(z)-u(a)) - \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour } z \in \Omega,$$

est psh sur Ω est vérifie: $w | E = -\infty$, $w(a) = -\frac{1}{2}$ et $w \leqslant 0$ sur ω.

Comme Ω est un espace de Stein, il existe une suite $\{w_j\}$ de fonction psh continues sur Ω qui décroit vers w ([6]). Soit $A > 0$, en appliquant deux fois le lemme de Dini classique on trouve un entier $j_a > 1$ pour lequel la fonction $v_a = w_{j_a}$ vérifie les deux propriétés suivantes:

(1) $$v_a(z) \leqslant -A, \quad \forall z \in F,$$

(2) $$v_a(z) \leqslant 0, \quad \forall z \in \bar{\omega}.$$

Comme v_a est continue sur Ω et que $v_a(a) \geqslant w(a) = -\frac{1}{2} > -1$, on peut trouver un voisinage U_a de a tel que:

(3) $$v_a(z) \geqslant -1, \quad \forall z \in U_a.$$

Par un argument de compacité, on construit facilement à partir des propriétés (1), (2) et (3), une fonction v psh et continue sur Ω telle que $v \leqslant 0$ sur ω, $v \leqslant -A$ sur F et $v \geqslant -1$ sur K; ce qui prouve le lemme.

Démonstration. Soit $(F_j)_{j \geqslant 1}$ une suite croissante de compacts telle que $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ et $(K_j)_{j \geqslant 1}$ une suite croissante de compacts telle que $\Omega \setminus G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ et (ω_j) une suite croissante d'ouverts telle que $\omega_j \Subset \Omega$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j$. En appliquant le lemme 2.1 à F_j, K_j, ω_j et $A_j = 2^j$, on obtient une fonction psh continue v_j sur Ω telle que:

(4) $$v_j \leqslant 0 \quad \text{sur } \omega_j,$$

(5) $$v_j \leqslant -2^j \quad \text{sur } F_j,$$

(6) $$v_j \geqslant -1 \quad \text{sur } K_j.$$

La fonction $v = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} v_j$ est alors psh sur Ω d'après (4). De plus d'après (5) on a $v(z) = -\infty$ si $z \in F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$. Enfin d'après (6) on a $v(z) > -\infty$ si

$z \in \Omega \setminus G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. En posant $\tilde{E} = \{z \in \Omega \colon v(z) = -\infty\}$, on a $F \subset \tilde{E} \subset \Omega \setminus G$.

Si G est fermé, on peut choisir la suite (K_j) telle que $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ et $\Omega \setminus G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Les conditions (4) et (6) impliquent alors la continuité de v sur $\Omega \setminus G$. D'où le corollaire suivant qui complète un résultat de ([5]):

COROLLAIRE 2.1. *Soit E un sous-ensemble pluripolaire fermé dans Ω. Alors E est $P(\Omega)$-polaire complet si et seulement si $E = E^*_{P(\Omega)}$. Dans ce cas, on peut trouver v psh sur Ω, continue sur $\Omega \setminus E$ telle que $E = \{z \in \Omega \colon v(z) = -\infty\}$.*

Signalons également la propriété suivante:

COROLLAIRE 2.2. *Soit $(E_j)_{j \geq 1}$ une suite de sous-ensembles $P(\Omega)$-polaires complets dans Ω telles que $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ soit de type F_σ. Alors E est $P(\Omega)$-polaire complet si et seulement si E est de type G_δ.*

Démonstration du Corollaire 2.2. Il est clair que la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de prouver, d'après la proposition 2.1, que $E = E^*_{P(\Omega)}$. Soit $a \notin E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, alors pour tout $j \geq 1$, $a \notin E_j$.

Puisque E_j est $P(\Omega)$-polaire complet, il existe v_j psh sur Ω telle que $v_j | E_j = -\infty$ et $v_j(a) \geq 0$.

Soit $(\omega_j)_{j \geq 1}$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts de Ω telle que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j$. Posons $M_j = \sup_{z \in \omega_j} v_j(z)$, $j \geq 1$ et soit $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j |M_j| < +\infty$. Alors la fonction définie par

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j (v_j - M_j)$$

est psh sur Ω et vérifie $v | E = -\infty$ et $v(a) \geq -\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j M_j > -\infty$. Cela prouve que $a \notin E^*_{P(\Omega)}$. $\square$

Pour conclure ce paragraphe on démontre le lemme suivant qui sera utile dans la suite:

LEMME 2.2. *Soit E un ensemble pluripolaire de type F_σ dans Ω et $\tilde{E}$ un ensemble $P(\Omega)$-polaire complet tel que $E \subset \tilde{E} \subset \Omega$. Alors il existe une suite $(h_j)_{j \geq 1}$ de fonctions holomorphes sur Ω et des suites $(c_j)_{j \geq 1}$, $(d_j)_{j \geq 1}$ strictement croissantes d'entiers positifs telles que les propriétés suivantes soient vérifiées:*

(i) *La suite* $\left(\frac{1}{c_j} \operatorname{Log}|h_j|\right)_{j \geqslant 1}$ *est localement majorée sur* Ω.

(ii) $\lim_{j \to \infty} c_j/d_j = 0$.

(iii) $\limsup_{j \to \infty} |h_j(z)|^{1/c_j} > 0, \ \forall z \notin \tilde{E}$.

(iv) $\limsup_{j \to \infty} |h_j(z)|^{1/d_j} = 0, \ \forall z \in E$.

(v) $\limsup_{j \to \infty} |h_j(z)|^{1/d_j \operatorname{Log} d_j} = 1, \ \forall z \in \Omega$.

Démonstration. Par hypothèse il existe une fonction v psh sur Ω telle que $\tilde{E} = \{z \in \Omega \colon v(z) = -\infty\}$. Comme Ω est de Stein, on peut trouver une suite décroissante $\{v_j\}$ de fonctions psh continues sur Ω telle que $v = \lim_{j \to \infty} v_j$ ([6]). Soit F un compact de E, K un compact de Ω et $\varepsilon > 0$.

D'après le lemme de Dini classique, on peut trouver un entier $j = j_\varepsilon > 1$ tel que si on pose $u = v_j$, on ait:

$$u(z) \leqslant \operatorname{Log} \varepsilon, \quad \forall z \in F. \tag{7}$$

Appliquons à la fonction continue u sur l'espace de Stein Ω un raisonnement classique comme dans le lemme de Bremermann (voir [15]) pour trouver des fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_s$ sur Ω et des entiers $j_1, \ldots, j_s > 1$ tels que

$$u(z) - \varepsilon \leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant s} \frac{1}{j_k} \operatorname{Log}|f_{j_k}(z)| \leqslant u(z), \quad \forall z \in K \cup F. \tag{8}$$

Choissons un entier $q > 1$ tel que l'on ait

$$u(z) - \varepsilon > -\varepsilon \operatorname{Log}(q \cdot j_k), \quad \forall z \in K, \ \forall k = 1, \ldots, s. \tag{9}$$

En posant $g_k = f_{j_k}^q$, $m_k = q \cdot j_k$ pour $k = 1, \ldots, s$; on obtient à partir de (8) en tenant compte de (7) et (9) et du fait que $v \leqslant u \leqslant v_1$:

$$\exp(v(z) - \varepsilon) \leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant s} |g_k(z)|^{1/m_k} \leqslant \exp v_1(z), \quad \forall z \in K, \tag{10}$$

$$\exp(v(z) - \varepsilon) \leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant s} |g_k(z)|^{1/m_k} \leqslant \varepsilon, \quad \forall z \in F, \tag{11}$$

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant s} |g_k(z)|^{1/m_k \operatorname{Log} m_k} \geqslant \exp(-\varepsilon), \quad \forall z \in K. \tag{12}$$

Les fonctions holomorphes ainsi obtenues dépendent de la donnée du compact $F \subset E$, du compact $K \subset \Omega$ et du nombre réel $\varepsilon > 0$.

Soit $(F_l)_{l \geqslant 1}$ une suite croissante de compacts telle que $E = \bigcup_{l=1}^{\infty} F_l$ et $(K_l)_{l \geqslant 1}$ une suite croissante de compacts de Ω telle que $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$.

En appliquant ce qui précède pour chaque $l \geqslant 1$ à $F = F_l$, $K = K_l$ et $\varepsilon = l^{-l}$, les inégalités (10), (11) et (12) permettent de construire par récurrence sur $l \geqslant 1$, une suite $(p_l)_{l \geqslant 1}$ strictement croissante d'entiers positifs, une suite $(h_j)_{j \geqslant 1}$ de fonctions holomorphes sur Ω et une suite $(c_j)_{j \geqslant 1}$ strictement croissante d'entiers positifs vérifiant les trois propriétés suivantes:

$$\exp(v(z) - l^{-l}) \leqslant \sup\{|h_j(z)|^{1/c_j}: p_{l-1} < j \leqslant p_l\} \leqslant \exp v_1(z), \quad \forall z \in K_l, \tag{13}$$

$$\operatorname{Sup}\{|h_j(z)|^{1/c_j}: p_{l-1} < j \leqslant p_l\} \leqslant l^{-1}, \quad \forall z \in F_l, \tag{14}$$

$$\operatorname{Sup}\{|h_j(z)|^{1/c_j \operatorname{Log} c_j}: p_{l-1} < j \leqslant p_l\} \geqslant \exp(-l^{-l}), \quad \forall z \in K_l, \tag{15}$$

Ces inégalités étant satisfaites pour tout $l \geqslant 1$.

Posons $d_j = l \cdot c_j$ pour $p_{l-1} < j \leqslant p_l$, $l \geqslant 2$ et $d_j = c_j$ si $j \leqslant p_1$. Il est clair que $\lim\limits_{j \to \infty} (c_j/d_j) = 0$, ce qui prouve la propriété (ii) du lemme. La propriété (i) résulte de (13).

La propriété (iii) du lemme résulte de (13) si l'on tient compte du fait que $v(z) > -\infty$ si $z \notin \tilde{E}$.

La propriété (iv) résulte de (14) compte tenu de la définition de d_j et enfin (v) résulte de (15) compte tenu du fait que $\lim\limits_{j \to \infty} (c_j/d_j) = 0$. Le lemme est démontré.

3. Ensembles exceptionnels pour l'ordre partiel. A l'aide des résultats de la Section 2, nous allons prouver:

THÉORÈME 3.1. *Soit E un ensemble pluripolaire de type F_σ dans Ω et G un ensemble de type G_δ tel que $E^*_{P(\Omega)} \subset G$.*

Alors pour tout $\varrho > 0$, il existe une fonction holomorphe $f\colon \Omega \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que $\bar{\varrho}_f = \varrho$, $\varrho_f(z) = 0$ si $z \in E$ et $\varrho_f(z) = \varrho$, lorsque $z \in \Omega \setminus G$. En particulier, on a: $E \subset E_\varrho(f) \subset G$.

Démonstration. D'après la proposition 2.1, il existe un ensemble $\tilde{E}P(\Omega)$-polaire complet tel que: $E \subset \tilde{E} \subset G$. On peut alors appliquer le lemme 2.2 pour obtenir une suite $(h_j)_{j \geqslant 1}$ de fonctions holomorphes sur Ω ayant les propriétés (i)–(iv) du lemme.

Considérons alors la fonction définie par

$$f(z, w) = \sum_{j=1}^{\infty} d^{-d_j/\varrho} [h_j(z)]^{l_j} w^{d_j}, \quad (z, w) \in \Omega \times \mathbf{C}, \tag{1}$$

où l_j est l'unique entier vérifiant $l_j \leqslant \operatorname{Log} d_j < l_j + 1$.

Montrons que la série du second membre de (1) converge normalement sur tout compact de $\Omega \times \mathbf{C}$.

Soit K un compact de Ω et $U_r = \{w \in \mathbf{C}: |w| < r\}$, $r > 0$.

D'après la condition (i) du lemme 2.2, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|h_j\|_K = \max_{z \in K} |h_j(z)| \leqslant M^{c_j}, \qquad \forall j \geqslant 1.$$

On en déduit que

$$a_j = d_j^{-d_j/\varrho} \|h_j\|_K^{l_j} r^{d_j} \leqslant d_j^{-d_j/\varrho} M^{c_j l_j} r^{d_j}, \qquad \forall j \geqslant 1. \tag{2}$$

Des inégalités (2) il résulte:

$$a_j^{1/d_j} \leqslant r \exp\left(l_j\left(\frac{c_j}{d_j}\operatorname{Log} M - \frac{1}{\varrho}\frac{\operatorname{Log} d_j}{l_j}\right)\right), \qquad j > 1. \tag{3}$$

Comme $l_j \sim \operatorname{Log} d_j$ et que $\lim_{j \to \infty} (c_j/d_j) = 0$ (voir lemme 2.2), on en déduit que $\lim_{j \to \infty} a_j^{1/d_j} = 0$. Ce qui prouve que la série (1) converge normalement sur $K \times \bar{U}_r$. Par suite elle converge normalement sur tout compact de $\Omega \times \boldsymbol{C}$ et définit donc une fonction holomorphe sur $\Omega \times \boldsymbol{C}$. Calculons son ordre partiel en chaque point $z \in \Omega$ en appliquant la proposition 1.1. On a alors pour $z \in \Omega$:

$$\varrho_f(z) = \limsup_{j \to \infty} \{[-\operatorname{Log}(d_j^{-d_j/\varrho} |h_j(z)|^{l_j})]^{-1} d_j \cdot \operatorname{Log} d_j\}.$$

Ce qui implique la formule suivante:

$$\varrho_f(z) = \left(\frac{1}{\varrho} - \limsup \frac{l_j}{d_j \operatorname{Log} d_j} \operatorname{Log} |h_j(z)|\right)^{-1}, \qquad z \in \Omega. \tag{4}$$

D'après la condition (i) du lemme 2.2, on a pour tout $z \in \Omega$, $\sup_{j \geqslant 1}(1/c_j)$, $\operatorname{Log}|h_j(z)| = M(z) < +\infty$. Comme $l_j \sim \operatorname{Log} d_j$ et que d'après la condition (ii) du lemme 2.2, $\lim_{j \to \infty} c_j/d_j = 0$, on déduit de la formule (4) que pour tout $z \in \Omega$, on a $\varrho_f(z) \leqslant \varrho$.

D'après les conditions (ii) et (iii) du lemme 2.2, on a pour tout $z \in \tilde{E}$, $\limsup_{j \to \infty} |h_j(z)|^{1/d_j} \geqslant 1$. De là on déduit en appliquant la formule (4) que si $z \notin \tilde{E}$, on a $\varrho_f(z) \geqslant \varrho$.

En tenant compte de ce qui précède, on en déduit que $\varrho_f(z) = \varrho$ si $z \in \Omega \setminus G$;

Enfin, il résulte de la condition (iv) du lemme 2.2 et de la formule (4) que pour tout $z \in E$, on a $\varrho_f(z) = 0$. $\square$

Ce théorème a une conséquence intéressante:

Corollaire 3.2. *Soit E un ensemble $P(\Omega)$-polaire complet de type F_σ dans Ω. Alors pour tout $\varrho > 0$, il existe une fonction holomorphe $f\colon \Omega \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ telle que $\varrho_f(z) = 0$ si $z \in E$ et $\varrho_f(z) = \varrho$ si $\notin E$. En particulier $E = E_\varrho(f)$.*

Dans le cas où $\Omega = C$, l'enoncé du théorème se simplifie puisque dans ce cas, on a toujours $E = E^*_{P(C)}$:

COROLLAIRE 3.2. *Soit E un ensemble polaire de type F_σ dans C et G un ensemble de type G_δ dans C tel que $E \subset G$. Alors pour tout $\varrho > 0$, il existe une fonction holomorphe f: $C \times C \to C$ telle que $\bar{\varrho}_f = \varrho$, $\varrho_f(z) = 0$ si $z \in E$ et $\varrho_f(z) = \varrho$ si $z \in C \setminus G$.*

En particulier on a $E \subset E_\varrho(f) \subset G$.

Ce corollaire donne comme cas particulier lorsque $G = \bar{E}$, le théorème de Stavskiĭ ([17]) (voir aussi [14], p. 149).

4. Ensembles exceptionnels pour le type partiel. Nous allons démontrer des résultats sur le type partiel, analogues à ceux obtenus pour l'ordre partiel.

THÉORÈME 4.1. *Soit E un ensemble pluripolaire de type F_σ dans Ω et G un ensemble de type G_δ tel que $E^*_{P(\Omega)} \subset G$. Alors pour tout $\varrho > 0$ et $\sigma > 0$, il existe une fonction holomorphe f: $\Omega \times C \to C$ telle que $\varrho_f = \varrho$, $\bar{\sigma}_f = \sigma$, $\sigma_f(z) = 0$ si $z \in E$ et $\sigma_f(z) = \sigma$ si $z \in \Omega \setminus G$. En particulier, on a $E \subset E_\sigma(f) \subset G$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.1, il existe un ensemble $\tilde{E}P(\Omega)$-polaire complet tel que $E \subset \tilde{E} \subset G$. On peut alors appliquer le lemme 2.2 pour obtenir une suite $(h_j)_{j \geq 1}$ de fonctions holomorphes sur Ω vérifiant les conditions (i)–(v) du lemme 2.2.

Considérons cette fois-ci la fonction définie par

$$f(z, w) = \sum_{j=1}^{\infty} (d_j^{-1} \sigma e \varrho)^{d_j/\varrho} h_j(z) w^{d_j}, \qquad (z, w) \in \Omega \times C. \tag{1}$$

On montre comme à la section 3 que la série du second membre de (1) converge normalement sur tout compact de $\Omega \times C$ et qu'elle définit donc une fonction holomorphe sur $\Omega \times C$.

L'ordre partiel de f se calcule grâce à la proposition 1.1. Ce qui donne:

$$\varrho_f(z) = \left[\frac{1}{\varrho} - \limsup (1/d_j \operatorname{Log} d_j) \operatorname{Log} |h_j(z)| \right]^{-1}, \qquad z \in \Omega. \tag{2}$$

D'après la condition (v) du lemme 2.2, la formule (2) montre que $\varrho_f(z) = \varrho$ pour tout $z \in \Omega$.

Le type partiel de f pour l'ordre partiel ϱ se calcule grâce à la proposition 1.1. Ce qui donne:

$$\begin{aligned} \sigma_f(z) &= \frac{1}{e \cdot \varrho} \limsup_{j \to \infty} \left\{ d_j \left(\frac{e \cdot \sigma \cdot \varrho}{d_j} \right)^{d_j/\varrho} |h_j(z)|^{\varrho/d_j} \right\} \\ &= \sigma \limsup_{j \to \infty} |h_j(z)|^{\varrho/d_j}, \qquad z \in \Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

D'après les propriétés (i) et (ii) du lemme 2.2, on a $\sigma_f(z) \leqslant \sigma$ pour tout $z \in \Omega$. D'après les propriétés (ii) et (iii) du lemme 2.2 on a $\sigma_f(z) \geqslant \sigma$ pour tout $z \in \Omega \setminus \bar{E}$. Ce qui prouve compte tenu de ce qui précède que $\sigma_f(z) = \sigma$ si $z \in \Omega \setminus G \subset \Omega \setminus \bar{E}$.

Enfin d'après la propriété (iv) du lemme 2.2 on a $\sigma_f(z) = 0$ si $z \in E$. Ce qui prouve le théorème.

On a également les conséquences suivantes:

COROLLAIRE 4.1. *Soit E un ensemble $P(\Omega)$-polaire complet de type F_σ dans Ω. Alors pour tout $\varrho > 0$ et $\sigma > 0$, il existe une fonction holomorphe f: $\Omega \times C \to C$ telle que $\varrho_f(z) = \varrho$ pour tout $z \in \Omega$, $\bar{\sigma}_f = \sigma$, $\sigma_f(z) = 0$ si $z \in E$ et $\sigma_f(z) = \sigma$ si $z \in \Omega \setminus E$. En particulier $E = E_\sigma(f)$.*

COROLLAIRE 4.2. *Soit E un ensemble polaire de type F_σ dans C et G un ensemble de type G_δ dans C tel que $E \subset G$. Alors pour tout $\varrho > 0$, il existe une fonction holomorphe f: $C \times C \to C$ telle que $\varrho_f = \varrho$ sur C, $\bar{\sigma}_f = \sigma$, $\sigma_f(z) = 0$ si $z \in E$ et $\sigma_f(z) = \sigma$ si $z \in C \setminus G$. En particulier on a $E \subset E_\sigma(f) \subset G$.*

Ce corollaire donne en particulier lorsque $G = \bar{E}$, le théorème de Ronkin [13] (voir aussi [14], p. 151).

Références

[1] E. Bedford, *The operator $(dd^c)^n$ on complex spaces*, Séminaire Lelong–Skoda et Colloque Wimereux, Lecture Notes Math. 919, Springer Verlag, 1980–1981.

[2] — et B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149 (1982), 1–40.

[3] R. P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New York 1954.

[4] M. Brelot, *Éléments de la théorie classique du Potential "Les cours de la Sorbonne"*, C.D.U. 1967.

[5] H. EL Mir, *Sur le prolongement des courants positifs fermés*, Acta Math. 153 (1984), 1–45.

[6] J. E. Fornaess et R. Narasimhan, *The Levi Problem an complex spaces with singularities*, Math. Ann. 248 (1980), 47–72.

[7] B. Josefson, *On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic Functions on C^n*, Ark. för Math. 16 (1978), 109–115.

[8] C. O. Kiselman, *The growth of restrictions of plurisubharmonic functions*, Mathematical Analysis and Applications (1981), 435–454.

[9] —, *Croissance des fonctions plusisousharmoniques en dimension infinie*, Ann. Inst. Fourier 34 (1) (1984), 155–183.

[10] P. Lelong, *Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes*, Ann. Ecole Norm. Sup. 58 (1941), 83–176.

[11] —, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*, Cours d'Eté 1967, Presses Univ. Montréal, 1968.

[12] B. I. Lokšin, *Sets of order reduction of entire functions in C^n*, Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen. 37 (1982), 62–65.

[13] L. I. Ronkin, *On types of an entire function of two complex variables*, Amer. Math. Soc. Transl. 32 (2) (1963), 273–278.

[14] —, *Introduction to the Theory of entire functions of several variables*, Amer. Math. Soc. Providence, 1974.

[15] N. Sibony, *Prolongement des fonctions holomorphes bornéeset métrique de Carathéodory*, Inv. Math. 29 (1975), 205–230.

[16] J. Sire, *Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini*, Rend. circ. Mat. Palermo 31 (1911), 1–91.

[17] M. Š. Stavskiĭ, *The order of growth of entire function of two variables with respect to one of the variables*, Teor. Funktsiĭ, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 8 (1969), 136–142.

UNIVERSITÉ MOHAMMED
FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
RABAT, MAROC

Reçu par la Rédaction le 23.03.1987