ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Étude de la continuité régulière d'une intégrale concernant la dérivée transversale relative à un système parabolique

par A. Piskorek (Warszawa)

1. Introduction. Dans ce travail, qui est une continuation des articles précédents [5] et [6], nous allons étudier la continuité régulière d'une intégrale concernant la dérivée transversale du potentiel de simple couche relatif à un système parabolique au sens de Petrovsky [1].

W. Pogorzelski [2] a étudié certaines propriétés des intégrales de l'équation parabolique d'ordre 2 et démontré (v. [2], p. 81-88) la continuité régulière d'une intégrale concernant la dérivée transversale dans le cas du potentiel de simple couche relatif à cette équation parabolique. Nous employons ici les méthodes exposées dans ce travail [2] et nous profitons de quelques résultats des travaux [3], [4] de W. Pogorzelski et du nôtre [6].

2. Formules principales et définitions. Soit le système parabolique, au sens de Petrovsky [1], de $N \geqslant 1$ équations aux dérivées partielles d'ordre $M \geqslant 2$ aux N fonctions inconnues $u_1(X,t), \dots, u_N(X,t)$ de la forme

$$(1)\qquad (\hat{\Psi}u)_a \equiv \sum_{\beta=1}^{N}\sum_{k=0}^{M}\sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} A_{a\beta}^{j_1\dots j_k}(X,t)\frac{\partial^k u_\beta}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}} - \frac{\partial u_a}{\partial t} = 0 \qquad (a = 1, \dots, N)$$

(X,t) étant un point variable de l'espace-temps et $X = (x_1, \dots, x_n)$ désignant un point de l'espace euclidien $E^{(n)}$ à $n \geqslant 2$ dimensions.

On admet, sans restreindre la généralité, que

$$(2)\qquad A_{a\beta}^{i_1\dots i_k}(X,t) = A_{a\beta}^{j_1\dots j_k}(X,t) \qquad (a,\beta = 1, \dots, N,\ k \leqslant M)$$

où la suite des indices $i_1, \dots, i_k$ s'obtient par transposition des indices $j_1, \dots, j_k$.

Supposons que les coefficients du système (1) soient continus et bornés dans la couche $E^{(n)}\times[0,T]$ et vérifient les conditions

(3) $$|A_{\alpha\beta}^{j_1\ldots j_k}(X,t)-A_{\alpha\beta}^{j_1\ldots j_k}(\bar{X},t)|\leqslant \mathrm{const}|X\bar{X}|^h, \quad \text{pour} \quad k\leqslant M-1,$$

(4) $$|A_{\alpha\beta}^{j_1\ldots j_M}(X,t)-A_{\alpha\beta}^{j_1\ldots j_M}(\bar{X},\bar{t})|\leqslant \mathrm{Const}(|X\bar{X}|^h+|t-\bar{t}|^{h'})$$

où $|X\bar{X}|$ désigne la distance euclidienne des points X et $\bar{X}$ de l'espace $E^{(n)}$, $0<h\leqslant 1$, $0<h'\leqslant 1$.

W. Pogorzelski [3] a construit, sous les hypothèses (3), (4), la matrice des solutions fondamentales $\Gamma(X,t;\,Y,\tau)$ du système (1) sous la forme

(5) $$\Gamma(X,t;\,Y,\tau)=W^{(Y,\tau)}(X,t;\,Y,\tau)+\widetilde{W}(X,t;\,Y,\tau),$$

(6) $$\widetilde{W}(X,t;\,Y,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{E^{(n)}}W^{(Z,\zeta)}(X,t;\,Z,\zeta)\Phi(Z,\zeta;\,Y,\tau)dZd\zeta,$$

où la matrice $W^{(Z,\zeta)}(X,t;\,Y,\tau)$ peut être représentée (v. [5], p. 2283) sous la forme suivante

(7) $$W^{(Z,\zeta)}(X,t;\,Y,\tau) = (2\pi)^{-n}\iiint\limits_{R^{(n)}}\exp[(t-\tau)\mathfrak{A}(Z,\zeta,is)]\exp\Big[i\sum_{\nu=1}^{n}s_\nu(x_\nu-y_\nu)\Big]ds_1\ldots ds_n,$$
$$\mathfrak{A}(Z,\zeta,is)=\Big\{\sum_{j_1,\ldots,j_M=1}^{n}A_{\alpha\beta}^{j_1\ldots j_M}(Z,\zeta)(is_{j_1})\ldots(is_{j_M})\Big\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,N},$$

$R^{(n)}$ désigne l'espace des vecteurs $s=(s_1,\ldots,s_n)$ à n dimensions et la matrice $\Phi(Z,\zeta;\,Y,\tau)$ est une solution, donnée par W. Pogorzelski, du système d'équations intégrales de Volterra, que nous pouvons écrire sous la forme matricielle [1]

(8) $$\Phi(X,t;\,Y,\tau) = \hat{\Psi}W^{(Y,\tau)}(X,t;\,Y,\tau)+\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{E^{(n)}}\hat{\Psi}W^{(Z,\tau)}(X,t;\,Z,\zeta)\Phi(Z,\zeta;\,Y,\tau)dZd\zeta.$$

On peut montrer, en s'appuyant sur un théorème de Gelfand et Silov (v. [3], p. 158-159), que les éléments $W_{\alpha\beta}^{(Z,\zeta)}(X,t;\,Y,\tau)$ de la matrice (7),

---

[1] Conformément à (1) le symbole $\hat{\Psi}$ désigne la matrice des opérateurs différentiels du système (1) et le résultat de l'opération $\hat{\Psi}W^{(Z,\zeta)}(X,t;\,Y,\tau)$ s'obtient en accord avec la règle du produit formel de deux matrices.

dite *matrice des quasi-solution*, vérifient les inégalités

$$\left|\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} W_{a,\beta}^{(Z,\zeta)}(X,t;\,Y,\tau)\right| \leqslant \frac{C}{(t-\tau)^{k_0+(k_1+\ldots+k_n)/M}}\exp\left[-c_*\sqrt[M-1]{\frac{|XY|^M}{t-\tau}}\right] \tag{9}$$

où $k_0, k_1, \ldots, k_n$ sont des nombres non négatifs entiers arbitraires $a, \beta = 1, \ldots, N$, et C, c_* sont des constantes positives, indépendantes des paramètres Z, ζ.

Des inégalités (9) résultent les limitations à singularités séparées, (v. [3], p. 161-162) si $t > \tau$ et $X \neq Y$

$$\left|\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} W_{a\beta}^{(Z,\zeta)}(X,t;\,Y,\tau)\right| \leqslant \frac{\mathrm{Const}\cdot\exp\left[-\bar{c}\sqrt[M-1]{\frac{|XY|^M}{t-\tau}}\right]}{(t-\tau)^{\mu_*}|XY|^{k_0M+k_1+\ldots+k_n+n-M\mu_*}} \tag{10}$$

où μ_* est une constante arbitrairement choisie à l'intérieur de l'intervalle

$$\left(-\infty,\ \min\left(1,\ k_0+\frac{1}{M}(k_1+\ldots+k_n+n)\right)\right).$$

Dans les travaux [3] et [4] W. Pogorzelski a démontré que les éléments $\Phi_{a\beta}(X,t;\,Y,\tau)$ de la matrice (8) vérifient les inégalités

$$|\Phi_{a\beta}(X,t;\,Y,\tau)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu'}|XY|^{n+M(1-\mu')-h^*}}\exp\left[-\tilde{c}\sqrt[M-1]{\frac{|XY|^M}{t-\tau}}\right], \tag{11}$$

où $a, \beta = 1, \ldots, N$, $h^* = \min(h, Mh')$, et $1-h^*/M < \mu' < 1$.

On peut montrer, en vertu des inégalités (10) et (11), que les éléments $\widetilde{W}_{a\beta}(X,t;\,Y,\tau)$ de la matrice (6) et les éléments $\Gamma_{a\beta}(X,t;\,Y,\tau)$ de la matrice des solutions fondamentales (5) admettent les limitations suivantes:

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\widetilde{W}_{a\beta}(X,t;\,Y,\tau)\right| \leqslant \frac{\mathrm{Const}\cdot\exp\left[-c\sqrt[M-1]{\frac{|XY|^M}{t-\tau}}\right]}{(t-\tau)^{\mu_*+\mu'-1}|XY|^{n+k_1+\ldots+k_n-M(1-\mu_*-\mu')-h^*}}, \tag{12}$$

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\Gamma_{a\beta}(X,t;\,Y,\tau)\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu}|XY|^{n+k_1+\ldots+k_n-M\mu}}\exp\left[-c\sqrt[M-1]{\frac{|XY|^M}{t-\tau}}\right], \tag{13}$$

où $k_1+\ldots+k_n \leqslant M-1$, $1-1/M < \mu_* < 1$, $1-(1+h^*)/M < \mu < 1$.

Soit dans l'espace $E^{(n)}$ une surface fermée S à $n-1$ dimensions satisfaisant aux conditions de Liapounoff (v. [2], p. 66-67), dont l'une concerne l'angle (n_P, n_Q) entre les normales intérieures n_P et n_Q en deux points arbitraires P et Q de cette surface S. Cette conditions a la forme suivante

$$(n_P, n_Q) \leqslant \text{const}\,|PQ|^{\varkappa}, \tag{14}$$

où l'exposant constant $\varkappa$ satisfait à l'inégalité $0 < \varkappa \leqslant 1$.

Définition. Nous appellerons *potentiel* de simple couche relatif au système parabolique (1) une colonne $U(X, t)$ de fonctions $U_1(X, t), \ldots, U_N(X, t)$ donnée par l'intégrale de surface

$$U(X, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(X, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\,dS_Q\,d\tau, \tag{15}$$

où les fonctions $\varphi_1(Q, \tau), \ldots, \varphi_N(Q, \tau)$ de la colonne $\varphi(Q, \tau)$, dite *densité* de simple couche, sont bornées et intégrables sur la surface cylindrique $S \times [0, T]$.

Remarquons ensuite que le produit $\Gamma(X, t; Y, \tau)\varphi(Q, \tau)$ est figurant dans l'intégrale (15) en accord avec la règle connue du produit d'une matrice par une colonne.

Dans les travaux [5], [6] nous avons démontré, en supposant la densité $\varphi(Q, \tau)$ continue, que la dérivée transversale d'ordre $M-1$ relatif au système (1) du potentiel $U(X, t)$, donnée par les formules

$$\big(D_{T_P}^{(M-1)} U(X, t)\big)_a = \sum_{\beta=1}^{N} \sum_{j_1, \ldots, j_M = 1}^{n} A_{a\beta}^{j_1 \ldots j_M}(X, t) \frac{\partial^{M-1} U(X, t)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{M-1}}} \cos(x_{j_M}, n_P) \quad (a = 1, \ldots, N), \tag{16}$$

où (x_{j_M}, n_P) désigne l'angle que fait avec l'axe x_{j_M} la normale intérieure n_P à la surface S au point P, admet la limite [2]

$$\lim_{\substack{X \to P \\ t > 0}} D_{T_P}^{(M-1)} U(X, t) = -\tfrac{1}{2}\varphi(P, t) + \int_0^t \iint_S D_{T_P}^{(M-1)} \Gamma(P, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\,dS_Q\,d\tau \tag{17}$$

en tout point P de la surface S pour $0 < t \leqslant T$; en outre la fonction sous le signe intégrale au second membre de l'égalité (17) admet la limi-

---

(2) Conformément à la formule (16) le symbole $D_{T_P}^{(M-1)}$ désigne la matrice des opérateurs différentiels d'ordre $M-1$. Les résultats des opérations $D_{T_P}^{(M-1)} U(X, t)$ et $D_{T_P}^{(M-1)} \Gamma(P, t; Q, \tau)$ s'obtiennent en accord avec les règles du produit d'une matrice par une colonne et du produit de deux matrices respectivement.

tation à singularités faibles ([3])

$$(18)\qquad |D_{T_P}^{(M-1)}\Gamma(P,t;\,Q,\tau)\,\varphi(Q,\tau)|\leqslant\frac{\mathrm{Const}\cdot|\varphi(Q,\tau)|}{(t-\tau)^{\mu}|PQ|^{n+M(1-\mu)-1-\varkappa^*}},$$

où $\varkappa^*=\min(h,\,Mh',\,\varkappa)$, $\varkappa$ est l'exposant de Liapounoff et μ une constante arbitrairement choisie à l'intérieur de l'intervalle $\left(1-\frac{\varkappa^*}{M},\,1\right)$, donc cette intégrale est absolument convergente.

La démonstration de cette propriété limite (17) et la limitation (18) est basée sur le lemme fondamental, démontré dans le travail [6], que nous rappelons ci-dessous.

LEMME FONDAMENTAL. *On a la décomposition suivante:*

$$(19)\quad D_{T_P}^{(M-1)}\Gamma(X,t;\,Q,\tau)=-\frac{|XQ|\cos(\overrightarrow{QX},\,\vec{n}_P)}{M(t-\tau)}W^{(Q,\tau)}(X,t;\,Q,\tau)+$$
$$+\left(D_{T_P}^{(M-1)}-{}^*D_{T_P}^{(M-1)}\right)W^{(Q,\tau)}(X,t;\,Q,\tau)+D_{T_P}^{(M-1)}\widetilde{W}(X,t;\,Q,\tau)$$

où, d'après la formule (16),

$$D_{T_P}^{(M-1)}=\left\{\sum_{j_1,\dots,j_M=1}^{n}A_{\alpha\beta}^{j_1\dots j_M}(X,t)\frac{\partial^{M-1}}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{M-1}}}\cos(x_{j_M},\,n_P)\right\}_{\alpha,\beta=1,\dots,N}$$

et l'opérateur matriciel ${}^*D_{T_P}^{(M-1)}$ *s'obtient de l'opérateur* $D_{T_P}^{(M-1)}$ *par la substitution* $X=Q$, $t=\tau$.

Nous démontrerons, sous la seule hypothèse de l'intégrabilité de la densité $\varphi(Q,\tau)$, que l'intégrale qui figure dans la propriété (17),

$$(20)\qquad H(P,t)=\int_0^t\iint_S D_{T_P}^{(M-1)}\Gamma(P,t;\,Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,ds_Q\,d\tau$$

est hölderienne par rapport aux variables (P,t) sur la surface cylindrique $S\times[0,\,T]$, c'est-à-dire que cette intégrale vérifie la condition de Hölder par rapport aux variables spatiales et à la variable du temps sur la surface cylindrique $S\times[0,\,T]$.

3. Continuité régulière. Notamment on a le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si la densité de simple couche* $\varphi(Q,\tau)$ *définie et intégrable sur la surface cylindrique* $S\times(0,\,T]$, *vérifie l'inégalité*

$$(21)\qquad |\varphi(Q,\tau)|\leqslant m_\varphi\tau^{-\mu_\varphi},$$

([3]) Nous désignerons par $|A|$ la norme d'une matrice A, c'est-à-dire le plus grand module de ses éléments.

où m_φ, μ_φ sont des constantes positives données ($0 \leqslant \mu_\varphi < 1$), alors l'intégrale $H(P, t)$ vérifie une condition de Hölder de la forme

$$|H(P,t)-H(\bar{P},\bar{t})| \leqslant \frac{\mathrm{Const}\cdot m_\varphi}{t^{\mu+\mu_\varphi-1}}\left(|P\bar{P}|^{\theta\varkappa^*}+|t-\bar{t}|^{\theta\varkappa^*/2M-1}\right) \tag{22}$$

pour tout point P et $\bar{P}$ de la surface S et pour $0 < t \leqslant \bar{t} < T$; les constantes θ, μ sont fixées à l'intérieur des intervalles

$$0 < \theta < 1, \quad 1-\frac{\varkappa^*}{M} < \mu < 1$$

et liées par la relation

$$\mu = 1-\frac{\varkappa^*}{M}(1-\theta), \tag{23}$$

où $\varkappa^* = \min(h, Mh', \varkappa)$, $\varkappa$ étant l'exposant de Liapounoff.

Démonstration. Tout d'abord il est clair que la limitation (18) assure l'existence et la continuité de l'intégrale $H(P, t)$ sur la surface cylindrique $S\times(0, T]$ sous l'hypothèse (21) de la densité $\varphi(Q, \tau)$.

Pour démontrer la continuité régulière nous pouvons exprimer, d'après le lemme fondamental, l'intégrale $H(P, t)$ sous la forme d'une somme

$$H(P,t) = {}^*H(P,t)+{}^{**}H(P,t)+\widetilde{H}(P,t) \tag{24}$$

de composantes

$${}^*H(P,t) = \int_0^t\iint_S {}^*E(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Q d\tau, \tag{25}$$

$${}^{**}H(P,t) = \int_0^t\iint_S {}^{**}E(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Q d\tau, \tag{26}$$

$$\widetilde{H}(P,t) = \int_0^t\iint_S \widetilde{E}(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Q d\tau, \tag{27}$$

où ${}^*E(P, t; Q, \tau)$, ${}^{**}E(P, t; Q, \tau)$, $\widetilde{E}(P, t; Q, \tau)$ désignent les matrices

$${}^*E(P,t;Q,\tau) = -\frac{|PQ|\cos(\overline{QP}, \bar{n}_P)}{M(t-\tau)}W^{(Q,\tau)}(P,t;Q,\tau), \tag{28}$$

$${}^{**}E(P,t;Q,\tau) = (D_{T_P}^{(M-1)}-{}^*D_{T_P}^{(M-1)})W^{(Q,\tau)}(P,t;Q,\tau), \tag{29}$$

$$\widetilde{E}(P,t;Q,\tau) = D_{T_P}^{(M-1)}\widetilde{W}(P,t;Q,\tau). \tag{30}$$

Nous étudierons d'abord la composante (25). Dans ce but considérons deux points quelconques P, $\bar{P}$ de la surface S et un cylindre $W(P, 2|P\bar{P}|)$ d'axe n_P (n_P désigne la normale intérieure à la surface S au point P) et de rayon $2|P\bar{P}|$.

Il nous suffit d'étudier le cas $2|P\overline{P}| < d/3$, où d est la constante dont il s'agit dans les conditions de Liapounoff (v. [2], p. 65). Nous décomposons l'intégrale (25) relative aux points P, $\overline{P}$ en trois parties

$$
\begin{aligned}
&{}^*H(P,t) = {}^*H^{\Sigma_1}(P,t) + {}^*H^{\Sigma_0-\Sigma_1}(P,t) + {}^*H^{S-\Sigma_0}(P,t),\\
&{}^*H(\overline{P},t) = {}^*H^{\Sigma_1}(\overline{P},t) + {}^*H^{\Sigma_0-\Sigma_1}(\overline{P},t) + {}^*H^{S-\Sigma_0}(\overline{P},t)
\end{aligned}
\tag{31}
$$

étendues à la portion Σ_1 de la surface S située à l'intérieur du cylindre $W(P, 2|P\overline{P}|)$, à la portion $\Sigma_0 - \Sigma_1$ de la surface S extérieure au cylindre $W(P, 2|P\overline{P}|)$ et située à l'intérieur du cylindre $W(P, d/3)$, et à la partie $S - \Sigma_0$ de la surface S extérieure au cylindre $W(P, d/3)$.

Considérons d'abord les premiers termes des sommes (31). D'après les conditions de Liapounoff et les limitations (9) et (21) nous avons.

$$
\begin{aligned}
|{}^*H^{\Sigma_1}(P,t)| &\leqslant \mathrm{const}\cdot m_\varphi \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^\mu} \iint_{\Sigma_1} \frac{dS_Q}{|PQ|^{n+M(1-\mu)-1-\varkappa}}\\
&\leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_\varphi \cdot B(1-\mu_\varphi, 1-\mu)}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}} \int_0^{2|P\overline{P}|} \frac{r^{n-2}\,dr}{r^{n+M(1-\mu)-1-\varkappa}}\\
&\leqslant \frac{\mathrm{Const}\cdot m_\varphi\cdot (2|P\overline{P}|)^{\varkappa-M(1-\mu)}}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}},
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
|{}^*H^{\Sigma_1}(\overline{P},t)| &\leqslant \mathrm{const}\cdot m_\varphi \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^\mu} \iint_{\Sigma_1} \frac{dS_Q}{|\overline{P}Q|^{n+M(1-\mu)-1-\varkappa}}\\
&\leqslant \frac{\mathrm{Const}\cdot m_\varphi\cdot (3|P\overline{P}|)^{\varkappa-M(1-\mu)}}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

où $B(1-\mu_\varphi, 1-\mu)$ est la fonction B d'Euler, $1+(1-\mu)M-\varkappa < 1$ et $\mu < 1$.

En profitant des inégalités résultant des conditions de Liapounoff et en utilisant le théorème des accroissements et les limitations (9), (21), nous concluons que la différence des seconds termes des sommes (31), admet les limitations

$$
\begin{aligned}
&|{}^*H^{\Sigma_0-\Sigma_1}(P,t) - {}^*H^{\Sigma_0-\Sigma_1}(\overline{P},t)|\\
&\qquad\leqslant \frac{\mathrm{Const}\cdot m_\varphi\cdot B(1-\mu_\varphi, 1-\mu)}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}} \int_{2|P\overline{P}|}^{d/3} \frac{|P\overline{P}|^\varkappa r + r^\varkappa |P\overline{P}|}{r^{n+M(1-\mu)}}\, r^{n-2}\,dr\\
&\qquad\leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_\varphi\cdot (|P\overline{P}|)^{\varkappa-M(1-\mu)}}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

où $1-\varkappa/M < \mu < 1$.

Pour la différence des troisièmes termes des sommes (31) nous obtenons d'une façon tout pareille les limitations

$$(35) \qquad |{}^*H^{S-\Sigma_0}(P,t)-{}^*H^{S-\Sigma_0}(\overline{P},t)| \leqslant \frac{\mathrm{Const}\cdot m_\varphi\cdot(|P\overline{P}|)^\varkappa}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}}$$

où $\mu<1$.

En réunissant les résultats obtenus (32), (33), (34), (35) nous arrivons à la conclusion

$$(36) \qquad |{}^*H(P,t)-{}^*H(\overline{P},t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_\varphi}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}}(|P\overline{P}|)^{\varkappa-M(1-\mu)}$$

où $1-\varkappa/M<\mu<1$.

Pour montrer que l'intégrale (25) vérifie la condition de Hölder par rapport à la variable t, en admettant $0<t<\bar{t}$, écrivons

$$(37) \qquad {}^*H(P,\bar{t})-{}^*H(P,t) = \int_t^{\bar{t}}\iint_S {}^*E(P,\bar{t};Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Qd\tau + \\ + \int_0^t\iint_S [{}^*E(P,\bar{t};Q,\tau)-{}^*E(P,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)dS_Qd\tau\,.$$

En vertu des limitations (9), (21) nous avons, par la méthode présentée dans le travail [7], la limitation

$$(38) \qquad \left|\int_t^{\bar{t}}\iint_S {}^*E(P,\bar{t};Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Qd\tau\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_\varphi\cdot(\bar{t}-t)^{\varkappa/M}}{t^{\mu_\varphi}}\,.$$

Pour étudier le second terme de la somme (37) nous considérons un cylindre $W(P,\varrho)$ d'axe n_P et de rayon ϱ, que nous ne fixons pas pour le moment, et la portion Σ de la surface S située à l'intérieur de ce cylindre. Tout à fait comme dans le cas de la limitation (32) nous aurons la limitation

$$(39) \qquad \left|\int_0^t\iint_\Sigma [{}^*E(P,\bar{t};Q,\tau)-{}^*E(P,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)dS_Qd\tau\right| \\ \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_\varphi\cdot\varrho^{\varkappa-M(1-\mu)}}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}}$$

où $1-\varkappa/M<\mu<1$.

En appliquant le théorème des accroissements à la fonction et en répétant le raisonnement relatif à l'intégrale (34) et (35) nous avons

$$(40) \qquad \left|\int_0^t\iint_{S-\Sigma} [{}^*E(P,\bar{t};Q,\tau)-{}^*E(P,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)dS_Qd\tau\right| \\ \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_\varphi\cdot(\bar{t}-t)}{t^{\mu_\varphi+\mu'-1}\cdot\varrho^{M(2-\mu')-\varkappa}}$$

où $\mu'<1$, et la constante const ne dépend pas du rayon ϱ.

Choisissons maintenant

$$\varrho = a|\bar{t}-t|^{\delta}$$

où l'exposant positif δ est un nombre, inférieur à l'unité, tel que $\delta(M(2-\mu)-\varkappa) < 1$ et a est une constante positive suffisamment petite pour que l'ensemble Σ, dans le cas où le rayon est $\varrho = aT^{1/M}$, soit situé à l'intérieur de la sphère de Liapounoff. Le plus avantageux est de choisir δ de façon que l'on ait

$$1-\delta(M(2-\mu)-\varkappa) = \delta(\varkappa-M(1-\mu))$$

d'où $\delta = 1/M$.

Nous en concluons, d'après les inégalités (38), (39), (40), que la différence (37) admet la limitation

$$(41)\qquad |{}^{*}H(P,\bar{t})-{}^{*}H(P,t)| \leqslant \frac{\mathrm{Const}\cdot m_{\varphi}\cdot|\bar{t}-t|^{\varkappa/M+\mu-1}}{t^{\mu_{\varphi}+\mu-1}}+\frac{\mathrm{const}\cdot m_{\varphi}\cdot|\bar{t}-t|^{\varkappa/M}}{t^{\mu_{\varphi}}}$$

où $1-\varkappa/M < \mu < 1$.

D'une manière analogue on peut montrer que la seconde composante (26) de la somme (24) vérifie les inégalités

$$(42)\qquad |{}^{**}H(P,t)-{}^{**}H(\bar{P},t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_{\varphi}}{t^{\mu_{\varphi}+\mu-1}}\,(|P\bar{P}|)^{\varkappa^{*}-M(1-\mu)},$$

$$(43)\qquad |{}^{**}H(P,\bar{t})-{}^{**}H(P,t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_{\varphi}\cdot|\bar{t}-t|^{\varkappa^{*}/M+\mu-1}}{t^{\mu_{\varphi}+\mu-1}}+\frac{\mathrm{Const}\cdot m_{\varphi}\cdot|\bar{t}-t|^{\varkappa^{*}/M}}{t^{\mu_{\varphi}}}$$

où $\varkappa^{*} = \min(h, Mh', \varkappa)$, $1-\varkappa/M < \mu < 1$.

Il reste à étudier le dernier terme (27) de la somme (24). Pour démontrer la condition de Hölder par rapport aux variables spatiales, on fera une décomposition analogue à la décomposition (31). En vertu des inégalités (12), (21) nous avons

$$(44)\qquad |\widetilde{H}^{\Sigma_1}(P,t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_{\varphi}\cdot(2|P\bar{P}|)^{h^{*}-M(1-\mu)}}{t^{\mu_{\varphi}+\mu-1}},$$

$$(45)\qquad |\widetilde{H}^{\Sigma_1}(\bar{P},t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_{\varphi}\cdot(3|P\bar{P}|)^{h^{*}-M(1-\mu)}}{t^{\mu_{\varphi}+\mu-1}}$$

où $1-\varkappa^{*}/M < \mu < 1$.

Passons ensuite à l'étude des différences

$$\widetilde{H}^{\Sigma_0-\Sigma_1}(P,t)-\widetilde{H}^{\Sigma_0-\Sigma_1}(\bar{P},t),\qquad \widetilde{H}^{S-\Sigma_0}(P,t)-\widetilde{H}^{S-\Sigma_0}(\bar{P},t).$$

D'après les inégalités (9), (10) nous remarquons que si $Q \in S-\Sigma_1$ et $Z \in E^{(n)}-K_1$, où K_1 désigne une sphère $K(P, 2|P\bar{P}|)$ de centre au point P

et de rayon $2|P\bar{P}|$, on a

$$(46)\qquad \left|\frac{\partial^{M-1}}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{M-1}}} W^{(Z,\zeta)}(P,t;Z,\zeta) - \frac{\partial^{M-1}}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{M-1}}} W^{(Z,\zeta)}(\bar{P},t;Z,\zeta)\right|$$
$$\leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot|P\bar{P}|}{(t-\zeta)^{\mu_*}|PZ|^{n+M(1-\mu_*)}}\exp\left[-c\sqrt[M-1]{\frac{|PZ|^M}{t-\zeta}}\right]$$

pour $|PZ| \geqslant 2|P\bar{P}|$ et $\mu_* < 1$, donc, d'après les formules (6) et les limitations (9), (11), nous avons

$$(47)\qquad \left|\frac{\partial^{M-1}}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{M-1}}} \widetilde{W}(P,t;Q,\tau) - \frac{\partial^{M-1}}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{M-1}}} \widetilde{W}(\bar{P},t;Q,\tau)\right|$$
$$\leqslant \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu+\mu_*-1}}\Bigg(\iiint\limits_{K_1} \frac{dZ}{|PZ|^{n+M(1-\mu_*)}|ZQ|^{n+M(1-\mu)-h^*}} +$$
$$+\iiint\limits_{E^{(n)}-K_1} \frac{|P\bar{P}|\,dZ}{|PZ|^{n+M(1-\mu_*)}|ZQ|^{n+M(1-\mu)-h^*}}$$
$$\leqslant \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu+\mu_*-1}}\left(\frac{|P\bar{P}|^{1+M(\mu_*-1)}}{|PQ|^{n+M(1-\mu)-h^*}} + \frac{|P\bar{P}|}{|PQ|^{n+M(1-\mu)-M(\mu_*-1)-h^*}}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{const}\cdot|P\bar{P}|^{1-M(1-\mu_*)}}{(t-\tau)^{\mu+\mu_*-1}|PQ|^{1-M(1-\mu)-h^*}}$$

où $1-h^*/M < \mu < 1$, $\mu_* < 1$.

Il en résulte, en tenant compte des formules (27), (30), et en appliquant le raisonnement déjà utilisé, l'inégalité suivante

$$(48)\qquad |\widetilde{H}^{S-\Sigma_1}(P,t) - \widetilde{H}^{S-\Sigma_1}(\bar{P},t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_\varphi}{t^{\mu_*+\mu-1}}(|P\bar{P}|)^{\varkappa^*-M(1-\mu)}$$

où $1-\varkappa^*/M < \mu < 1$.

Donc, en vertu des limitations (44), (45), (48), l'intégrale (27) vérifie une inégalité de la même forme

$$(49)\qquad |\widetilde{H}(P,t) - \widetilde{H}(\bar{P},t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_\varphi}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}}(|P\bar{P}|)^{\varkappa^*-M(1-\mu)}$$

où $1-\varkappa^*/M < \mu < 1$.

Enfin nous étudierons d'une façon analogue la condition de Hölder par rapport à la variable t. En admettant $0 < t < \bar{t}$ nous écrivons donc

$$(50)\qquad \widetilde{H}(P,\bar{t}) - \widetilde{H}(P,t) = \int\limits_t^{\bar{t}}\iint\limits_S \widetilde{E}(P,\bar{t};Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau +$$
$$+\int\limits_0^t\iint\limits_S [\widetilde{E}(P,\bar{t};Q,\tau) - \widetilde{E}(P,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau$$

et nous avons, d'après l'inégalité (12) et la limitation (12), la limitation suivante

$$(51)\qquad \left|\int_t^{\bar t}\iint_S \widetilde{E}(P,\bar t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Q d\tau\right| \leqslant \frac{\text{const}\cdot m_\varphi\cdot(\bar t-t)^{h^*/M}}{t^{\mu_\varphi}}.$$

Pour étudier le second terme de la somme (50) on procède de même que précédemment dans le cas des limitations (39), (40). Le second terme, que nous désignerons par $J(P,\bar t,t)$, sera décomposé en deux intégrales

$$(52)\qquad J(P,\bar t,t)=J^{\Sigma}(P,\bar t,t)+J^{S-\Sigma}(P,\bar t,t)$$

étendues à la portion Σ de la surface S située à l'intérieur du cylindre $W(P,\varrho)$ et à la portion extérieure $S-\Sigma$ de la surface S.

On a, de même que pour l'intégrale (39), la limitation

$$(53)\qquad |J^{\Sigma}(P,\bar t,t)|\leqslant \frac{\text{const}\cdot m_\varphi\cdot\varrho^{h^*-M(1-\mu)}}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}}$$

où $1-h^*/M<\mu<1$.

Pour limiter la seconde intégrale dans la somme (52) nous appliquerons le raisonnement déjà utilisé dans le cas de la limitation (48). Dans ce but, en tenant compte des formules (6), (16), nous écrivons

$$(54)\qquad \widetilde{E}(P,\bar t;Q,\tau)-\widetilde{E}(P,t;Q,\tau)$$

$$=\int_t^{\bar t}\iiint_{E^{(n)}} D_{T_P}^{(M-1)}W^{(Z,\zeta)}(P,\bar t;Z,\zeta)\Phi(Z,\zeta;Q,\tau)dZd\zeta+$$

$$+\int_\tau^t\iiint_K D_{T_P}^{(M-1)}\big(W^{(Z,\zeta)}(P,\bar t;Z,\zeta)-W^{(Z,\zeta)}(P,t;Z,\zeta)\big)\Phi(Z,\zeta;Q,\tau)dZd\zeta+$$

$$+\int_\tau^t\iiint_{E^{(n)}-K} D_{T_P}^{(M-1)}\big(W^{(Z,\zeta)}(P,\bar t;Z,\zeta)-W^{(Z,\zeta)}(P,t;Z,\zeta)\big)\Phi(Z,\zeta;Q,\tau)dZd\zeta$$

où $Q\in S-K$, et K désigne la sphère $K(P,\varrho)$ de centre au point P et de rayon ϱ.

En appliquant le théorème des accroissements et en nous appuyant sur l'inégalité (9) nous avons pour la fonction sous le signe de la troisième intégrale dans la décomposition (54) la limitation

$$(55)\qquad |D_{T_P}^{(M-1)}W^{(Z,\zeta)}(P,\bar t;Z,\zeta)-D_{T_P}^{(M-1)}W^{(Z,\zeta)}(P,t;Z,\zeta)|$$

$$\leqslant\frac{\text{const}\cdot|\bar t-t|}{(t-\zeta)^{\mu_*}|PZ|^{n+2M-1-M\mu_*}}+\frac{\text{Const}\cdot|\bar t-t|^{h'}}{(t-\zeta)^{\mu_*}|PZ|^{n+M(1-\mu_*)-1}},$$

où $Z\in E^{(n)}-K$ et $\mu_*<1$.

En vertu de la décomposition (54) et d'après les inégalités (9), (11) nous obtenons

$$(56)\qquad |\widetilde{E}(P,\bar{t};Q,\tau)-\widetilde{E}(P,t;Q,\tau)|$$

$$\leqslant \int_t^{\bar{t}} \frac{\mathrm{const}\cdot d\zeta}{(\bar{t}-\zeta)^{\mu}(\zeta-\tau)^{\mu}|PQ|^{n+M(2-2\mu)-1-h^*}} + \int_\tau^t \frac{\mathrm{Const}\cdot \varrho^{1-M(1-\mu_*)}d\zeta}{(t-\zeta)^{\mu_*}(\zeta-\tau)^{\mu}|PQ|^{n+M(1-\mu)-h^*}} +$$

$$+\int_\tau^t \frac{\mathrm{const}\cdot|\bar{t}-t|\cdot \varrho^{1-M(2-\mu_*)}d\zeta}{(t-\zeta)^{\mu_*}(\zeta-\tau)^{\mu}|PQ|^{n+M(3-\mu_*-\mu)-1-h^*}} + \int_\tau^t \frac{\mathrm{const}\cdot|\bar{t}-t|^{h'}d\zeta}{(t-\zeta)^{\mu}(\zeta-\tau)^{\mu}|PQ|^{n+M(2-2\mu)-1-h^*}}$$

où $\mu_*<1$, $1-h^*/M<\mu<1$, donc on a

$$n+M(2-2\mu)-1-h^*<n-1$$

par conséquent la première singularité spatiale et la dernière singularité spatiale dans cette inégalité sont faibles relativement à l'intégrale de surface. Nous en déduisons que la seconde des intégrales (52), étendue à la surface $S-\Sigma$, admet la limitation suivante

$$(57)\qquad |J^{S-\Sigma}(P,\bar{t},t)| \leqslant \mathrm{Const}\cdot m_\varphi\cdot \int_0^t \frac{1}{\tau^{\mu_\varphi}}\left(\frac{|\bar{t}-t|^{1-\mu}}{(t-\tau)^{\mu}} + \frac{\varrho^{h^*-M(2-\mu_*-\mu)}}{(t-\tau)^{\mu^*+\mu-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|\bar{t}-t|\cdot\varrho^{1+h^*-5M+M(2\mu_*+\mu)}}{(t-\tau)^{\mu_*+\mu-1}} + \frac{|\bar{t}-t|^{h'}}{(t-\tau)^{\mu}}\right)d\tau\,.$$

Nous posons maintenant

$$\varrho = b|\bar{t}-t|^{\gamma}$$

et choisissons la constante positive γ de façon que

$$\gamma\big(h^*-M(2-\mu-\mu^*)\big) = 1+\gamma\big(1+h^*+5M+M(2\mu^*+\mu)\big)\,.$$

En réunissant les résultats (51), (53), (57), et en tenant compte des décompositions (50), (52) nous voyons que l'intégrale (27) vérifie la condition de Hölder de la forme

$$(58)\quad |\widetilde{H}(P,\bar{t})-\widetilde{H}(P,t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot m_\varphi\cdot|\bar{t}-t|^{\theta\varkappa^*/2M-1}}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}} + \frac{\mathrm{Const}\cdot m_\varphi\cdot|\bar{t}-t|^{h^*}}{t^{\mu_\varphi}}$$

pour $0<t<\bar{t}$, θ et μ étant fixée à l'intérieur des intervalles

$$0<\theta<1\,,\qquad 1-\frac{\varkappa^*}{M}<\mu<1$$

et liés par la relation

$$\mu = 1-\frac{\varkappa^*}{M}(1-\theta)\,.$$

En rapprochant les résultats (36), (42), (49), (41), (43), (58) nous arrivons à la conclusion (22) du théorème.

Travaux cités

[1] J. Petrowsky, *Ueber das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen*, Bull. Univ. Moscou 7 (1938), pp. 65-67.

[2] W. Pogorzelski, *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), pp. 61-92.

[3] — *Etude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ric. Matem., Napoli, 7 (1958), pp. 153-185.

[4] — *Equations intégrales et leurs applications* (en polonais), t. IV (sous presse).

[5] A. Piskorek, *Propriété limite de la dérivée transversale du potentiel de simple couche relatif au système parabolique*, C. R. Acad. Sc., Paris, 254 (1962), pp. 2283-2285.

[6] — *Propriété limite de la dérivée transversale du potentiel de simple couche relatif au système parabolique*, Ric. Matem., Napoli, 11 (1962), pp. 170-191.

[7] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique*, Ann. Polon. Math. 12 (1963), pp. 301-317.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 13. 12. 1962