ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1963)

Об однозначной разрешимости общей граничной задачи для однородных линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа с постоянными коэффициентами в полупространстве

Б. Лаврук (Варшава)

В этой работе рассматривается линейный дифференциальный оператор второго порядка однородный по порядку дифференцирования

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{1}$$

коэффициенты которого действительные постоянные матрицы порядка p. Оператор (1) эллиптического типа: $\det \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}a_i a_j \neq 0$ для любой действительной ненулевой точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Пусть числа $p_{\mathrm{I}}, p_{\mathrm{II}} \geqslant 0$ целые и $p_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}} = p$. Для матриц и матричных операторов под M_{I} (M_{II}) будет в дальнейшем пониматься прямоугольная матрица высоты p_{I} (p_{II}) и ширины p, или же иногда матрица, составленная из первых p_{I} (последних p_{II}) строк квадратной порядка p матрицы M. Для матриц через M^* обозначается транспонированная матрица M.

Пусть далее коэффициенты оператора

$$B_{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} B_{\mathrm{I}i}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2}$$

и матрица B_{II} постоянные и действительны, причем

$$\det\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}n} \\ B_{\mathrm{II}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Здесь исследуются условия поведения на бесконечности решений системы

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0 \quad (x_n > 0), \tag{I_0}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, при которых граничная задача нахождения непрерывного при $x_n \geqslant 0$, дважды непрерывно дифференцируемого при $x_n > 0$ решения системы (I_0), для которого существуют равномерные относительно $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ пределы

$$\lim_{x_n\to+0} \sum_{i=1}^{n} B_{\mathrm{I}i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \qquad \lim_{x_n\to+0} B_{\mathrm{II}} \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}$$

и удовлетворяющего граничному условию

$$(\mathrm{II}) \qquad \lim_{x_n\to+0} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}} \end{pmatrix} u(x) = f(x'),$$

имеет единственное решение.

При $p_{\mathrm{I}} = p$, $p_{\mathrm{II}} = 0$ эта задача переходит в задачу с косой производной, так как тогда из условия (3) следует, что $\det B_{\mathrm{I}n} = \det B_n \neq 0$, а при $p_{\mathrm{I}} = 0$, $p_{\mathrm{II}} = p$ — в задачу типа Дирихле, так как в этом случае $\det B_{\mathrm{II}} = \det B \neq 0$, а оператор (2) в условии (II) отсутствует.

Коэффициенты граничного условия сопряжённой задачи к задаче (I_0), (II) определяются по формулам в [1]:

$$\tilde{B}_{\mathrm{I}i} = (B^*_{\mathrm{I}n}, B^*_{\mathrm{II}})^{-1}_{\mathrm{I}} \left[2A_{in} - A_{nn} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}n} \\ B_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}i} \\ 0 \end{pmatrix}\right]^* \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$\tilde{B}_{\mathrm{I}n} = (B^*_{\mathrm{I}n}, B^*_{\mathrm{II}})^{-1}_{\mathrm{I}} A^*_{nn}, \qquad \tilde{B}_{\mathrm{II}} = (B^*_{\mathrm{I}n}, B_{\mathrm{II}})^{-1}_{\mathrm{II}} A^*_{nn}.$$

В дальнейшем предполагается выполнимость условия Я. Б. Лопатинского для граничной задачи, сопряжённой к задаче (I_0) (II) (см. [2]): для любой действительной ненулевой точки $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$

$$(4) \qquad \operatorname{pauz} \int_{+} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{\mathrm{I}i} a_i \\ \tilde{B}_{\mathrm{II}} \end{pmatrix} A^{*-1}(a)(E, a_n E)\, da_n = p,$$

где $A(a) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} a_i a_j$, E — единичная матрица порядка p, а $\int_{+} \ldots da_n$ здесь и в дальнейшем обозначает интеграл по простому замкнутому контуру, лежащему в верхней a_n-комплексной полуплоскости и охватывающему все a_n-полюсы подинтегрального выражения с положительной мнимой частью.

При этих условиях имеет место

Теорема. *Граничная задача нахождения решения системы* (I_0) *с указанными свойствами, удовлетворяющего граничному условию*

$$(\mathrm{II}_0) \qquad \lim_{x_n\to+0} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}} \end{pmatrix} u(x) = 0$$

имеет единственное нулевое решение в классе матриц $u(x) \to 0$ *при* $|x| \to \infty$ ($|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$).

Доказательство проводится сначала в предположении $n \geqslant 3$.

Фундаментальную матрицу в полупространстве $x_n > 0$ для оператора $A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, сопряженного по Лагранжу с $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, можно записать в виде

$$(5) \quad \varphi(x, y) = \frac{(-1)^{n-2}(n-3)!}{(2\pi i)^{n-1}} \times$$
$$\times \int\limits_{|a'|=1} d_{a'} T \int\limits_{+} [(x-y,\, a)^{-n+2} - (x+y,\, a)^{-n+2}] A^{*-1}(a)\, da_n \qquad (y_n > 0),$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $(x, a) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i$ (см. [3]).

Решение граничной задачи, сопряженной к предыдущей (см. [1])

$$A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x, y) = 0 \qquad (x_n > 0),$$

$$\lim_{x_n \to +0} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}^* v(x, y) = \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}^* \varphi(x, y)\Big|_{x_n = +0} \qquad (y_n > 0),$$

здесь $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{\mathrm{I}i} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ -\widetilde{B}_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}$, записывается по формулам в [2]:

$$v(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{I}}(x - z') \widetilde{B}_{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi(z, y)\Big|_{z_n = +0} dz' - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{II}}(x - z') \widetilde{B}^{\mathrm{II}} \varphi(z', y)\, dz',$$

$$(6) \quad g^{\mathrm{I}}(x) = K_n \int\limits_{|a'|=1} d_{a'} T \int\limits_{+} (x, a)^{-n+2} A^{*-1}(a)(E, a_n E) \widetilde{R}^{\mathrm{I}}(a')\, da_n,$$

$$g^{\mathrm{II}}(x) = (2-n) K_n \int\limits_{|a'|=1} d_{a'} T \int\limits_{+} (x, a)^{-n+1} A^{*-1}(a)(E, a_n E) \widetilde{R}^{\mathrm{II}}(a')\, da_n,$$

$dz' = dz_1 \dots dz_{n-1}$, $K_n = \dfrac{(-1)^{n-2}(n-3)!}{(2\pi i)^{n-1}}$, $\widetilde{R}^{\mathrm{I}}(a')$ и $\widetilde{R}^{\mathrm{II}}(a')$ части матрицы $\widetilde{R}(a')$ правообратной к матрице в условии (4), состоящие из первых p_{I} и последних p_{II} столбцов $\widetilde{R}(a')$ соответственно.

Пусть $f(x) \in K_l^{\infty}$ при $l > 0$ если $|x|^l f(x)$ ограничено при больших $|x|$. Так как

$$|x|^{n-1}[(x-y,\, a)^{-n+2} - (x+y,\, a)^{-n+2}] = 2\left[\binom{n-2}{1}\left(\frac{x}{|x|}, a\right)^{n-3}(y, a) + \right.$$
$$\left. + \binom{n-2}{3}\left(\frac{x}{|x|}, a\right)^{n-5} \frac{1}{|x|^2}(y, a)^3 + \dots\right]\left(\frac{x-y}{|x|}, a\right)^{-n+2}\left(\frac{x+y}{|x|}, a\right)^{-n+2},$$

то $\varphi(x, y) \in K^{\infty}_{n-1}$. Из вида $g^{\mathrm{II}}(x)$ непосредственно очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{II}}(x-z')\tilde{B}_{\mathrm{II}}\varphi(z', y)\,dz' \in K^{\infty}_{n-1}$$

Интегрируя по частям можно убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{I}}(x-z')\tilde{B}^{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(z, y)\Big|_{z_n=0} dz' \in K^{\infty}_{n-1}.$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{I}}(x-z')\tilde{B}_{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(z, y)\Big|_{z_n=+0} dz' = \frac{(-1)^{n-2}(n-3)!}{(2\pi i)^{n-1}}\times$$

$$\times\Big\{\lim_{R\to\infty}\int_{|z'|\leqslant R} g^{\mathrm{I}}(x-z')\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{B}_{\mathrm{I}i}\frac{\partial}{\partial z_i}\int_{|a'|=1} d_{a'}T\int_{+}[(z'-y, a)^{-n+2}-$$

$$-(z'+y, a)^{-n+2}]A^{*-1}(a)\,da_n\,dz' + (2-n)\lim_{R\to\infty}\int_{|z'|\leqslant R} g^{\mathrm{I}}(x-z')\times$$

$$\times\tilde{B}_{\mathrm{I}n}\int_{|a'|=1} d_{a'}T\int_{+} a_n[(z'-y, a)^{-n+1}-(z'+y, a)^{-n+1}]A^{*-1}(a)\,da_n\,dz'\Big\} =$$

$$= -\lim_{R\to\infty}\int_{|z'|\leqslant R}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g^{\mathrm{I}}(x-z')}{\partial z_i}\tilde{B}_{\mathrm{I}i}\varphi(z', y)\,dz' + \lim_{R\to\infty}\int_{|z'|=R}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{z_i}{|z'|}g^{\mathrm{I}}(x-z')\times$$

$$\times\tilde{B}_{\mathrm{I}i}\varphi(z', y)\,d_{z'}S + \frac{(-1)^{n-2}(n-3)!}{(2\pi i)^{n-1}}\lim_{R\to\infty}\int_{|z'|\leqslant R} g^{\mathrm{I}}(x-z')\tilde{B}_{\mathrm{I}n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial z_i}\times$$

$$\times\int_{|a'|=1} d_{a'}T\int_{+} a_i a_n[(z'-y, a)^{-n+2}-(z'+y, a)^{-n+2}]A^{*-1}(a)\,da_n\,dz' =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g^{\mathrm{I}}(x-z')}{\partial z_i}\tilde{B}_{\mathrm{I}i}\varphi(z', y)\,dz' + \frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{(2\pi i)^{n-1}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g^{\mathrm{I}}(x-z')}{\partial z_i}\tilde{B}_{\mathrm{I}n}\int_{|a'|=1} d_{a'}T\int_{+} a_i a_n[(z'-y, a)^{-n+2}-$$

$$-(z'+y, a)^{-n+2}]A^{*-1}(a)\,da_n\,dz',$$

причем каждое слагаемое последней суммы принадлежит K^{∞}_{n-1}.

Поэтому матрица $\psi(x, y) = \varphi(x, y) - v(x, y) \in K^{\infty}_{n-1}$.

Кроме того эта матрица имеет производные всех порядков при $x_n > 0$ по точке x, непрерывна и непрерывно дифференцируемая по x вплоть до границы $x_n = 0$ при $x \neq y$, $y_n > 0$.

Действительно, из (5) непосредственно следует, что матрица $\varphi(x, y)$ обладает этими свойствами, а из (6), что $v(x, y)$ при $x_n > 0$ неограниченно непрерывно дифференцируемая. Рассмотрим второе слагаемое в формуле (6), определяющей матрицу $v(x, y)$. Исследование первого слагаемого проще и проводится аналогично (непосредственно видно, что первое слагаемое непрерывно вплоть до $x_n = 0$)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{II}}(x-z')\widetilde{B}_{\mathrm{II}}\varphi(z', y)\,dz' = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{|z'|\leqslant R} g^{\mathrm{II}}(x-z')\widetilde{B}_{\mathrm{II}}\varphi(z', y)\,dz' =$$

$$= -K_n \lim_{R\to\infty}\int\limits_{|z'|\leqslant R}\int\limits_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\,T\int\limits_{+}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\frac{\partial}{\partial z_i}(x-z',\alpha)^{-n+2}\times$$

$$\times A^{*-1}(\alpha)(E,\alpha_n E)\widetilde{R}^{\mathrm{II}}(\alpha')\,d\alpha_n\widetilde{B}^{\mathrm{II}}\varphi(z', y)\,dz' =$$

$$= K_n\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|z'|\leqslant R}\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\,T\int\limits_{+}\alpha_i(x-z',\alpha)^{-n+2}A^{*-1}(\alpha)\times$$

$$\times(E,\alpha_n E)\widetilde{R}^{\mathrm{II}}(\alpha')\,d\alpha_n\widetilde{B}^{\mathrm{II}}\frac{\partial\varphi(z', y)}{\partial z_i}\,dz' - K_n\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|z'|=R}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{z_i}{|z'|}\times$$

$$\times\int\limits_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\,T\int\limits_{+}\alpha_i(x-z',\alpha)^{-n+2}A^{*-1}(\alpha)(E,\alpha_n E)\widetilde{R}^{\mathrm{II}}(\alpha')\,d\alpha_n\times$$

$$\times\widetilde{B}_{\mathrm{II}}\varphi(z', y)\,d_{z'}S = K_n\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\,T\int\limits_{+}\alpha_i(x-z',\alpha)^{-n+2}\times$$

$$\times A^{*-1}(\alpha)(E,\alpha_n E)\widetilde{R}^{\mathrm{II}}(\alpha')\,d\alpha_n\widetilde{B}_{\mathrm{II}}\frac{\partial\varphi(z', y)}{\partial z_i}\,dz'.$$

Каждое слагаемое суммы в правой части последнего равенства непрерывно вплоть до $x_n = 0$.

При $n \geqslant 4$ повторяя этот приём к каждомы слагаемому последней суммы, получают

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{II}}(x-z')\widetilde{B}_{\mathrm{II}}\varphi(z', y)\,dz' = \frac{K_n}{3-n}\sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\,T\int\limits_{+}\alpha_i\alpha_j(x-z',\alpha)^{-n+3}\times$$

$$\times A^{*-1}(\alpha)(E,\alpha_n E)\widetilde{R}^{\mathrm{II}}(\alpha')\,d\alpha_n\widetilde{B}_{\mathrm{II}}\frac{\partial^2\varphi(z', y)}{\partial z_i\partial z_j}\,dz',$$

откуда следует непрерывная дифференцируемость по x левой части вплоть до $x_n = 0$ в этом случае.

При $n = 3$, поступая аналогично, получают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{II}}(x-z')\widetilde{B}_{\mathrm{II}}\varphi(z', y)\,dz' =$$

$$= -\frac{K_n}{2}\sum_{i,j=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'} T \int_{+} a_i a_j \lg[-(x-z', a)^2]\times$$

$$\times A^{*-1}(a)(E, a_n E)\widetilde{R}^{\mathrm{II}}(a')\,da_n \widetilde{B}_{\mathrm{II}} \frac{\partial^2\varphi(z', y)}{\partial z_i \partial z_j}\,dz',$$

где ветвь логарифма выбрана так, чтобы при $a' = 0$, $a_n = i$, $x' = 0$, $x_n = 1$ он равнялся нулю (см. [2]).

Пусть имеется допустимая область V с границей S, являющейся трижды непрерывно дифференцируемым многообразием. Пусть $\nu(y) = (\nu_1(y), \ldots, \nu_n(y))$ единичный вектор внутренней нормали к S в точке $y = (y_1, \ldots, y_n) \in S$. Пусть далее, коэффициенты оператора

$$B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} B_{\mathrm{I}i}(y)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

и матрица $B_{\mathrm{II}}(y)$, действительные функциональные матрицы определенные и непрерывно дифференцируемые иа S, причём

$$\det\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} B_{\mathrm{I}i}(y)\nu_i(y) \\ B_{\mathrm{II}}(y)\end{pmatrix} \neq 0 \qquad (y \in S).$$

При этих условиях для оператора граничной задачи

$$\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y)\end{pmatrix}\right) \tag{7}$$

имеет место формула, доказанная в [1]:

$$\int_{V}\left\{v^*(x)A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) - \left[u^*(x)A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]^*\right\}dx = \tag{8}$$

$$= \int_{S}\left\{\left[\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\end{pmatrix}^* v(y)\right]^* \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y)\end{pmatrix} u(y) - \right.$$

$$\left. - \left\{\left[\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\end{pmatrix} u(y)\right]^* \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y)\end{pmatrix}^* v(y)\right\}^*\right\} dS,$$

где оператор граничной задачи

$$\left(A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),\ \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^*\right)^{(1)},$$

сопряженный к оператору (7),

$$\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ -\widetilde{B}_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix},$$

причем указаны формулы, по которым вычисляются коэффициенты оператора

$$\widetilde{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{\mathrm{I}i}(y) \frac{\partial}{\partial x_i} + \widetilde{B}_{\mathrm{I}}(y)$$

и матрица $\widetilde{B}_{\mathrm{II}}(y)$, через коэффициенты оператора граничной задачи (7), далее

$$C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} C_{\mathrm{II}i}(y) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad C_{\mathrm{II}i}(y) = B_{\mathrm{II}}(y)\nu_i(y) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$C_{\mathrm{I}}(y) = \sum_{i=1}^{n} B_{\mathrm{I}i}(y)\nu_i(y), \qquad \begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{\mathrm{I}}(y) \\ \widetilde{C}_{\mathrm{II}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты оператора

$$\widetilde{C}_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{C}_{\mathrm{II}i}(y) \frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{C}_{\mathrm{II}}(y)$$

и матрица $\widetilde{C}_{\mathrm{I}}(y)$ также определяются по формулам в [1] через коэффициенты оператора граничной задачи (7) при этом $\widetilde{B}_{\mathrm{I}i}(y)$, $\widetilde{B}_{\mathrm{II}}(y)$, и $\widetilde{C}_{\mathrm{II}i}(y)$, $\widetilde{C}_{\mathrm{I}}(y)$ обладают теми же свойствами гладкости что и $B_{\mathrm{I}i}(y)$, $B_{\mathrm{II}}(y)$ соответственно, а матрицы $\widetilde{B}_{\mathrm{I}}(y)$ и $\widetilde{C}_{\mathrm{II}}(y)$ непрерывны на S. Матрицы $u(x)$, $v(x)$ произвольные высоты p непрерывны в $V \cup S$, дважды непрерывно дифференцируемые в V, для которых существуют равномерные относительно $y \in S$ пределы

$$\lim_{x \to y} \sum_{i=1}^{n} B_{\mathrm{I}i}(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \qquad \lim_{x \to y} \sum_{i=1}^{n} C_{\mathrm{II}i}(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i},$$

$$\lim_{x \to y} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{\mathrm{I}i}(y) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}, \qquad \lim_{x \to y} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{C}_{\mathrm{II}i}(y) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}$$

при стремлении точки $x \in V$ к точке $y \in S$ по нормали $\nu(y)$.

---

(1) Здесь и в дальнейшем символ * при операторных матрицах обозначает сопряжение.

Пусть x — произвольная точка полупространства $x_n > 0$ и R число настолько большое, что сфера $|x| = R-1$ содержит точку x внутри.

Пусть далее S_R замкнутая трёхкратногладкая поверхность, совпадающая с окружностью $|x'| \leqslant R-\varepsilon$ в плоскости $x_n = 0$ и поверхностью сферы $|x| = R$ при $x_n \geqslant \varepsilon$, а V_R область, ограниченная этой поверхностью; ε — фиксированное число $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Пусть далее оператор $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}$ $(y \in S_R)$ имеет все указанные выше свойства и совпадает с оператором $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}$ на части S_R в плоскости $x_n = 0$

Тогда там же оператор $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^*$ совпадает, очевидно, с оператором $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}$. Легко видеть, что на S_R, при $x_n \geqslant \varepsilon$ можно даже взять $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\mathrm{I}} \dfrac{\partial}{\partial |x|} \\ -E_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}$, где E единичная матрица порядка p. Применяя теперь формулу (8) к решению $u(z)$ задачи (I_0), (II_0) и к матрице $\psi(z, x)$ в области V_R, получают:

$$
u(x) = \int\limits_{S_R \setminus \{|y'| \leqslant R-\varepsilon\}} \left\{ \left[\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) \end{pmatrix}^* \psi(y, x) \right]^* \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} u(y) - \right.
$$
$$
\left. - \left\{ \left[\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) \end{pmatrix} u(y) \right]^* \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^* \psi(y, x) \right\}^* \right\} ds . \tag{9}
$$

Пусть теперь $V_{R,R-1}$ область, ограниченная поверхностю $S_{R,R-1}$ с теми же свойствами гладкости, что и поверхность S_R, совладающей с $S_R \setminus \{|y'| < R-1+\varepsilon\}$ и в остальных точках, для которых $x_n \geqslant \varepsilon$, с поверхностю сферы $|x| = R-1$. Пусть $\sigma(z)$ квадратная матрица порядка p дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{V}_{R,R-1}$, равная единичной матрице при $|z| > R-\varepsilon$, нулевой при $|z| < R-1+\varepsilon$ и удовлетворяющая следующему условию

$$
\lim_{y_n \to +0} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{\mathrm{I}i} \psi(y, x) \frac{\partial \sigma(y)}{\partial y_i} = 0
$$

при $R-1+\varepsilon \leqslant |y'| \leqslant R-\varepsilon$. При $p_{\mathrm{I}} = 0$, $p_{\mathrm{II}} = p$ никаких условий на $\sigma(y)$ на куске границы $V_{R,R-1}$ примыкающим к плоскости $x_n = 0$ не требуется (тогда, вместо матрицы $\sigma(z)$ можно брать функцию $\sigma(z)$). Из простых геометрических соображений следует, что в $V_{R,R-1}$ сама $\sigma(z)$ и её производные могут быть ограниченными при $R\to\infty$.

Пусть, наконец, оператор $\begin{pmatrix} \hat{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -\hat{B}_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}$ $(y \in S_{R,R-1})$ имеет все указанные выше, нужные для формулы (8), свойства и совпадает с оператором $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}$ при $y \in S_R \setminus \{|y'| \leqslant R-1+\varepsilon\}$.

Тогда там же оператор $\begin{pmatrix} \hat{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -\hat{B}_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^*$ совпадает с оператором $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^*$.

Применяя формулу (8) в области $V_{R,R-1}$ к решению задачи (I_0), (II_0) и к матрице $\psi(z, x)\,\sigma(z)$ получают

$$-\int\limits_{V_{R,R-1}} \left[A^*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(z, x)\sigma(z)\right]^* u(z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{S_R \setminus \{|y'| \leqslant R-\varepsilon\}} \left\{\left[\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \end{pmatrix}^* \psi(y, x)\right]^* \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} u(y) - \right.$$

$$\left. - \left[\left[\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \end{pmatrix} u(y)\right]^* \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^* \psi(y, x)\right]^*\right\} dS\,.$$

Далее, сравнивая с (9)

$$u(x) = \int\limits_{V_{R,R-1}} \left[A^*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(z, x)\sigma(z)\right]^* u(z)\,dz\,. \tag{10}$$

Пусть U_R — максимум $|u(x)|$ в $\overline{V}_{R,R-1}$ (²). Так как $\psi(z, x) \in K^{\infty}_{n-1}$ при фиксированном x, а её производные первого и второго порядка по точке z принадлежат соответственно к K^{∞}_n и K^{∞}_{n+1}, то

$$\left|A^*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(z, x)\sigma(z)\right| \leqslant \frac{C(x)}{R^{n-1}}\,.$$

Поэтому из (10) следует неравенство

$$|u(x)| < \frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}[R^n-(R-1)^n]\frac{C(x)}{R^{n-1}}U_R$$

(²) Под модулом матрицы понимается наибольший из модулей её элементов.

из которого, устремляя R к бесконечности, получают утверждение теоремы [3].

При $n=2$ матрицу $\varphi(x, y)$ берут в виде

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+} \lg\frac{x_1-y_1+(x_2-y_2)\lambda}{x_1+y_1+(x_2+y_2)\lambda}A^{*-1}(1, \lambda)d\lambda \ ({}^4) .$$

Ветвь логарифма фиксируется значением нуль при значении аргумента 1. Очевидно $\varphi(x, y) \in K_1^\infty$. Далее, матрица $v(x, y)$ определяется также по первой формуле (6), причём в этом случае

$$g^{\mathrm{I}}(x) = -\frac{1}{4\pi i}\left\{\int\limits_{+} \lg[-(x_1+\lambda x_2)^2]A^{*-1}(1, \lambda)(E, \lambda E)\widetilde{R}^{\mathrm{I}}(1)d\lambda - \right.$$

$$\left. -\int\limits_{+} \lg[-(-x_1+\lambda x_2)^2]A^{*-1}(-1, \lambda)(E, \lambda E)\widetilde{R}^{\mathrm{I}}(-1)d\lambda\right\},$$

$$g^{\mathrm{II}}(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{+} (x_1+\lambda x_2)^{-1}A^{*-1}(1, \lambda)(E, \lambda E)\widetilde{R}^{\mathrm{II}}(1)d\lambda - \right.$$

$$\left. -\int\limits_{+} (-x_1+\lambda x_2)^{-1}A^{*-1}(-1, \lambda)(E, \lambda E)\widetilde{R}^{\mathrm{II}}(-1)d\lambda\right\} \ ({}^4)$$

как и при $n>2$, так и здесь, очевидно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{II}}(x-z')\widetilde{B}_{\mathrm{II}}\varphi(z', y)dz_1 \in K_1^\infty .$$

Далее, аналогично предыдущему

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^{\mathrm{I}}(x-z')\widetilde{B}_{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(z, y)\Big|_{z_2=+0} dz' =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g^{\mathrm{I}}(x-z')}{\partial z_1}\widetilde{B}_{\mathrm{I}1}\varphi(z', y)dz_1 +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g^{\mathrm{I}}(x-z')}{\partial z_1}\widetilde{B}_{\mathrm{I}2}\int\limits_{+} \lambda\lg\frac{z_1-y_1-y_2\lambda}{z_1+y_1+y_2\lambda}A^{*-1}(1, \lambda)d\lambda dz_1 ,$$

откуда следует, что $v(x, y) \in K_1^\infty$. Дальнейшее доказательство буквально повторяет доказательство для случая $n>2$. Теорема доказана.

---

[3] Приведенный здесь метод доказательства заимствован у И. Г. Петровского (см. [4]).

[4] $A(1, \lambda) = A_{11}+2A_{12}\lambda+A_{22}\lambda^2$, $A(-1, \lambda) = A_{11}-2A_{12}\lambda+A_{22}\lambda^2$.

Следует отметить, что если условие доказанной теоремы не выполняется, то при $p_{\mathrm{I}} = p$, $p_{\mathrm{II}} = 0$ любая постоянная матрица является решением задачи (I_0), (II_0).

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. *Решение задани* (I_0), (II) *данное в* [2] *является единственным среди решений убывающих к нулю в бесконечности.*

Цитированная литература

[1] Б. Лаврук, *Об одном методе пэстроення сопряженных гранйчных задач*, Ann Polon. Math. 13 (1963), стр. 67-91.

[2] Я. Б. Лопатинский, *Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям*,, Укр. матем. ж. 5 (1953), стр. 123-152.

[3] — *Фунфаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений*, Укр. Матем. Ж. 3 (1951), стр. 3-37.

[4] И. Г. Петровский, *О проблеме Cauchy фля системы дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функции*, Москва, Бюлл. Ун-та (А), 1:7 (1938). стр. 1-72.

Reçu par la Rédaction le 16. 5. 1962