ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Quelques formules intégrales pour les fonctions analytiques des plusieurs variables complexes

par F. BIERSKI (Kraków)

1. Introduction. Soit D un domaine borné de l'espace C^n de n variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $f(z)$ une fonction analytique dans D, continue dans $\bar{D}$, où $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Il existe plusieurs formules intégrales pour $f(z)$, come celle de Cauchy ([5], [4]), de Weil ([10]), de Martinelli-Bochner ([2], [6]), de Fantappiè ([3]), de Temliakov ([9]), de Aizenberg ([1]), de Opial-Siciak ([8]). Toutes ces formules sont de la forme

$$f(z) = \int_S \sum_k \Phi_k[f(s)] I_k(z, s)\, ds \tag{1}$$

où S est une variété à m dimensions contenue dans $\bar{D}$, m étant un des nombres $n, n+1, \ldots, 2n-1$; ds est un élément de S au point $s \in S$, Φ_k est un operateur linéaire, $\sum I_k(z, s)$ est une fonction de deux points z, s, dite *noyau* de l'intégrale, et la some $\sum\limits_k$ est étendue à $k = 1, \ldots, p$, où p est un entier fixé pouvant être égal à 1.

La formule (1) sera dite *m-dimensionnelle*, si la variété S est à m dimensions (¹). Le noyau $\sum I_k(z, s)$ peut être une fonction analytique des coordonnées du point z ou non. Par exemple, les formules de Cauchy et de Weil sont n-dimensionnelles à noyau analytique et la formule de Martinelli-Bochner est $(2n-1)$-dimensionnelle à noyau non analytique. Les formules de Cauchy et de Weil sont valables pour des domaines spéciaux dits polyèdres analytiques et la formule de Martinelli-Bochner pour des domaines assez généraux.

Le but de ce travail est de donner la construction de quelques formules intégrales $(n+p)$-dimensionnelles, où p parcourt tout les nombres $0, 1, \ldots, n-1$, aux noyaux analytiques pour les domaines dits n-cerclés (²).

(¹) Il est clair que si S est la frontière de D, la formule (1) est $(2n-1)$-dimensionnelle. Dans certaines formules l'operateur $\Phi(f)$ est égal à Cf, où C est une constante.

(²) Prémières formules $(n+p)$-dimensionnelles ont été trouvées par E. Martinelli ([7]); les formules de Martinelli sont à noyau non analytique.

2. Lemmes. Nous allons commencer par deux lemmes. Soit n un nombre naturel $\geqslant 2$, soit $s_0 = 0$ et s_k, m_k des nombres entiers nonnégatifs pour $k = 1, \ldots, n$. Introduisons pour $p = 0, 1, \ldots, n-1$ la notation

$$(2)\quad B^{s_0 s_1 \ldots s_p}_{s_{p+1} \ldots s_n} = \frac{(s_0+s_1+\ldots+s_p)!}{s_0! s_1! \ldots s_p!} \sum_{m_{p+1}+\ldots+m_n = s_0+s_1+\ldots+s_p} \binom{s_{p+1}+m_{p+1}}{s_{p+1}} \ldots \binom{s_n+m_n}{s_n}$$

où la sommation est étendue à tous les systèmes de nombres entiers nonnégatifs $m_{p+1}, \ldots, m_n$ dont la somme est égale à $s_0+s_1+\ldots+s_p$. Les lemmes suivants sont facile à démontrer:

Lemme 1. *Pour chaque $p = 0, 1, \ldots, n-1$ on a l'égalité*

$$(3)\quad B^{s_0 s_1 \ldots s_p}_{s_{p+1} \ldots s_n} = \frac{(s_1+\ldots+s_n+n-p-1)!}{s_0! s_1! \ldots s_p! (s_{p+1}+\ldots+s_n+n-p-1)!} .$$

Lemme 2. *Si les variables $u_1, \ldots, u_n$, réelles ou complexes, satisfont pour chaque $p = 1, \ldots, n-1$ aux inégalités*

$$(4)\quad |u_1|+\ldots+|u_p|+|u_k| < 1 \quad \textit{pour} \quad k = p+1, \ldots, n ,$$

on a pour $p = 1, \ldots, n-1$ les développements

$$(5)\quad \prod_{k=p+1}^{n} (1-u_1-\ldots-u_p-u_k)^{-1} = \sum_{s_1,\ldots,s_n=0}^{\infty} B^{s_0 s_1 \ldots s_p}_{s_{p+1} \ldots s_n} u_1^{s_1} u_2^{s_2} \ldots u_n^{s_n} .$$

Ce développement reste vrai pour $p = 0$ si l'on remplace son côté gauche par $\prod_{k=1}^{n} (1-u_k)^{-1}$ et les conditions (4) *par les suivantes: $|u_k| < 1$ pour $k = 1, \ldots, n$.*

3. Formules intégrales pour les domaines n-cercles. Un domaine borné $D \subset C^n$ est dit *domaine n-cerclé complet*, si avec tout point $z^0 \in D$ chaque point z, remplissant la condition $\{|z_k| \leqslant |z_k^0|,\ k = 1, \ldots, n\}$ *appartient aussi à D.*

Théorème 1. *Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine n-cerclé complet D et continue dans $\bar{D}$, alors à tout point $z \in D$ il existe un point frontière $\zeta \in \partial D$ tel, que*

$$(6)\quad |z_k| < |\zeta_k| \quad \textit{pour} \quad k = 1, \ldots, n$$

et que pour chaque $p = 1, \ldots, n-1$ on a la formule [3]

$$(7)\quad f(z) =$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \ldots \int_{C_n} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n} \int_{S_p} \left\{ \frac{\partial^p}{\partial t^p} [t^{n-1} f(\zeta_1 t, \ldots, \zeta_n t)] \right\}_{t=1} (1-\tau_p)^{n-p-1} I d\tau_1 \ldots d\tau_p$$

---

[3] t est un paramètre réel remplissant la condition: $0 < t \leqslant 1$.

où C_k est le cercle $|z_k| = |\zeta_k|$, $k = 1, \dots, n$, S_p est le simplexe à p-dimensions

$$S_p = \{(\tau_1, \dots, \tau_p)\colon (0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p < 1)\} \quad pour \quad p = 1, \dots, n-1\,, \tag{8}$$

et I est le noyau donné par la formule:

$$I^{-1} = \prod_{k=p+1}^{n} (1-U_{pk}) \tag{9}$$

où

$$U_{pk} = \frac{\tau_1}{\zeta_1} z_1 + \frac{\tau_2-\tau_1}{\zeta_2} z_2 + \dots + \frac{\tau_p-\tau_{p-1}}{\zeta_p} z_p + \frac{1-\tau_p}{\zeta_k} z_k\,. \tag{10}$$

Dans le cas $p = 0$ la formule (7) doit être remplacée par

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{C_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \dots \int\limits_{C_n} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{z_k}{\zeta_k}\right)^{-1}. \tag{7'}$$

D é m o n s t r a t i o n. L'existence du point $\zeta \in \partial D$ remplissant (6) est évidente. Dans le policylindre (6) la fonction $f(z)$ est évidemment développable en la série

$$f(z) = \sum_{v_1, \dots, v_n = 0}^{\infty} a_{v_1 \dots v_n} z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} \tag{11}$$

absolument convergente, donc il suffit de démontrer la formule (7) dans le cas du monôme $f(z) = c z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n}$. Pour $k = p+1, \dots, n$ les expressions

$$\tau_1 \left|\frac{z_1}{\zeta_1}\right| + (\tau_2-\tau_1) \left|\frac{z_2}{\zeta_2}\right| + \dots + (\tau_p-\tau_{p-1}) \left|\frac{z_p}{\zeta_p}\right| + (1-\tau_p) \left|\frac{z_k}{\zeta_k}\right|$$

sont nonnégatives et plus petites que 1, donc en vertu de (5) et (9) on a

$$I = \sum_{s_1, \dots, s_n = 0}^{\infty} B^{s_0 s_1 \dots s_p}_{s_{p+1} \dots s_n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\tau_j-\tau_{j-1}}{\zeta_j} z_j\right)^{s_j} \tag{12}$$

où l'on doit poser $\tau_0 = 0$ et $\tau_j - \tau_{j-1} = 1-\tau_p$ pour $j = p+1, \dots, n$.

Posons dans le côté droit de (7) $f(\zeta_1 t, \dots, \zeta_n t) = c(\zeta_1 t)^{v_1} \dots (\zeta_n t)^{v_n}$. En tenant compte de (11) et des formules

$$\int\limits_{C_1} \zeta_1^{v_1-s_1-1} d\zeta_1 \dots \int\limits_{C_n} \zeta_n^{v_n-s_n-1} d\zeta_n = \begin{cases} (2\pi i)^n & \text{pour} \quad \delta = 0\,, \\ 0 & \text{pour} \quad \delta \neq 0\,, \end{cases} \tag{13}$$

où $\delta = \sum\limits_{1}^{n} (v_k - s_k)^2$, on trouve

$$f(z) = (v_1 + \dots + v_n + n-1) \dots (v_1 + \dots + v_n + n-p) c z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} B^{v_0 v_1 \dots v_p}_{v_{p+1} \dots v_n} H\,, \tag{14}$$

où

$$H = \int_{S_p} \tau_1^{v_1}(\tau_2-\tau_1)^{v_2}\dots(\tau_p-\tau_{p-1})^{v_p}(1-\tau_p)^{v_{p+1}+\dots+v_n+n-p-1}d\tau_1\dots d\tau_p$$

$$= \frac{v_1!\dots v_p!(v_{p+1}+\dots+v_n+n-p-1)!}{(v_1+\dots+v_n+n-1)!}.$$

Il en suit d'après (3) que le côté droit de (7) se réduit à $cz_1^{v_1}\dots z_n^{v_n}$, c.q.f.d.

Le théorème 1 peut être généralisé comme il suit:

Théorème 2. *Si la fonction $f(z)$ remplit les conditions du théorème 1 on a dans le n-cylindre (6) pour chaque $p = 1, \dots, n-1$, et chaque $j = 0, 1, \dots, p$ les formules:*

$$(15)\quad f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\dots\int_{C_n}\frac{d\zeta_n}{\zeta_n}\int_{S_p}\frac{\partial^j}{\partial t^j}[t^{n-1}f(\zeta_1 t, \dots, \zeta_n t)]_{t=1}(1-\tau_p)^{n-p-1}I_{p-j}d\tau_1\dots d\tau_p$$

où C_k et S_p sont définis dans le théorème 1 et le noyau I_{p-j} est donné par la formule

$$(16)\qquad I_{p-j} = \left\{\frac{\partial^{p-j}}{\partial t^{p-j}}\left[t^{n-j-1}\prod_{k=p+1}^{n}(1-U_{pk}t)^{-1}\right]\right\}_{t=1}\qquad [\text{cf. } (10)].$$

Démonstration. D'après (16) et (5) on a comme dans (12)

$$(17)\quad I_{p-j} = \frac{\partial^{p-j}}{\partial t^{p-j}}\left[t^{n-j-1}\sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{\infty} t^{s_1+\dots+s_n}B^{s_0 s_1\dots s_p}_{s_{p+1}\dots s_n}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\tau_j-\tau_{j-1}}{\zeta_j}z_j\right)^{s_j}\right]_{t=1}$$

où l'on doit poser $\tau_0 = 0$ et $\tau_j-\tau_{j-1} = 1-\tau_p$ pour $j = p+1, \dots, n$. La série entre [ ] est absolument convergente pour chaque t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, et chaque $\tau \in S_p$ et par suite elle est différentiable terme à terme. Comme dans le théorème 1 il suffit de démontrer la formule (15) dans le cas, où $f(z)$ se réduit à un seul terme $cz^{v_1}\dots z^{v_n}$. En remplacant dans le côté droit f par $c(\zeta_1 t)^{v_1}\dots(\zeta_n t)^{v_n}$ et en tenant compte de (17) et (13) on constante que le côté droit de (15) se réduit à $cz^{v_1}\dots z^{v_n}$, c.q.f.d.

Remarque 1. Les noyaux I et I_{p-j} des formules (7) et (15) sont analytiques par rapport aux variables $z_1, \dots, z_n$. L'intégration est étendue à des variétés à $(n+p)$ dimensions, $p = 0, 1, \dots, n-1$; ces variétés peuvent être situées partiellement dans l'intérieur de D.

4. Formules intégrales pour les domaines n-cerclés convexes. Considérons dans C^n le domaine n-cerclé complet Δ défini par la formule

$$(18)\qquad \Delta = \bigcup_{\tau\in S_{n-1}}\{z\colon\ |z_k| < r_k(\tau),\ k = 1, \dots, n\},$$

où les $r_k(\tau) = r_k(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ sont des fonctions positives continues dans le simplexe $S_{n-1} = \{\tau\colon\ 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-1} < 1\}$, et supposons que les fonctions $r_k(\tau)$ soient choisies de manière que le domaine (18) soit identique avec

$$\Delta = \bigcap_{\tau \in S_{n-1}} \Big\{ z\colon \frac{\tau_1}{r_1(\tau)}|z_1| + \frac{\tau_2 - \tau_1}{r_2(\tau)}|z_2| + \ldots + \frac{\tau_{n-1} - \tau_{n-2}}{r_{n-1}(\tau)}|z_{n-1}| + \\ + \frac{1-\tau_{n-1}}{r_n(\tau)}|z_n| < 1 \Big\}. \tag{19}$$

Le domaine Δ est alors n-cerclé convexe et complet ([8]).

Soit z un point quelconque fixé dans Δ, p un des nombres $1, 2, \ldots, n-1$ et T_p une variété pouvant dépendre de z à p dimensions contenue dans S_{n-1}, définie dans le cas $p < n-1$ par un système de $(n-p-1)$ équations

$$\tau_j = \varphi_j(\tau_1, \ldots, \tau_p)\,, \quad j = p+1, \ldots, n-1\,, \tag{20}$$

dont les seconds membres sont continus dans le symplexe (8) et tels qu'aux points $\tau \in T_p$ on ait les inégalités

$$\frac{\tau_1}{r_1(\tau)}|z_1| + \frac{\tau_2 - \tau_1}{r_2(\tau)}|z_2| + \ldots + \frac{\tau_p - \tau_{p-1}}{r_p(\tau)}|z_p| + \frac{1-\tau_p}{r_k(\tau)}|z_k| < 1\,, \\ k = p+1, \ldots, n\,, \tag{21}$$

où $z_1, \ldots, z_n$ sont les coordonnées du point fixé z. Dans le cas $p = n-1$ soit $T_p = S_{n-1}$; dans ce cas l'inégalité (21) est satisfaite dans S_{n-1} par définition.

Désignons par u_{pk} pour $p = 1, \ldots, n-1$, $k = p+1, \ldots, n$, l'expression

$$u_{pk} = \frac{\tau_1}{r_1(\tau)}e^{-i\varphi_1}z_1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{r_2(\tau)}e^{-i\varphi_2}z_2 + \ldots + \frac{\tau_p - \tau_{p-1}}{r_p(\tau)}e^{-i\varphi_p}z_p + \frac{1-\tau_p}{r(\tau)}e^{-i\varphi_k}z_k\,, \tag{22}$$

où z est le point fixé dans Δ et $\tau \in T_p$ ne dépend que des variables $(\tau_1, \ldots, \tau_p)$. D'après (21) le produit

$$J_p = \prod_{k=p+1}^{n} (1 - u_{pk})^{-1}$$

est developable en la série entière

$$J_p = \sum_{s_1, \ldots, s_n = 0}^{\infty} B^{s_0 \ldots s_p}_{s_{p+1} \ldots s_n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\tau_j - \tau_{j-1}}{r_j(\tau)} e^{-i\varphi_j} z_j \right)^{s_j} \tag{23}$$

où $\tau_0 = 0$, $\tau_j - \tau_{j-1} = 1 - \tau_p$ pour $j = p+1, \ldots, n$, absolument convergente pour tout $\tau \in T_p$ remplissant les conditions (21). Admettons que dans le cas $p = 0$ la variété (20) se réduit à un seul point $\tau^0 = (\tau_1^0, \ldots, \tau_{n-1}^0) \in S_{n-1}$, que les inégalités (21) se réduissent aux suivantes: $|z_k|/r_k(\tau^0) < 1$ pour $k=1,\dots,n$ et que les expressions (22) prennent la forme: $u_{0k} = e^{-i\varphi_k}z_k/r_k(\tau^0)$, pour $k=1,\dots,n$. Dans ce cas $J_0 = \prod_{k=1}^{n}(1-u_{0k})^{-1}$ et la formule (23) prend la forme

$$(23')\qquad J_0 = \prod_1^n \left(1-\frac{z_k}{r_k(\tau^0)}e^{-i\varphi_k}\right)^{-1} = \sum_{s_0,\dots,s_n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z_j}{r_j(\tau^0)}e^{-i\varphi_j}\right)^{s_j}$$

car d'après (3) $B^{s_0}_{s_1\dots s_n} = 1$.

THÉORÈME 3. *Si la fonction $f(z)$ est analytique dans le domaine n-cerclé convexe et complet Δ défini par* (19) *et continue dans $\bar{\Delta}$, alors pour tout point $z\in\Delta$ et tout $p=1,\dots,n-1$ on a la formule*

$$(24)\qquad f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots \int_0^{2\pi} d\varphi_n \int_{T_p} \frac{\partial^p}{\partial t^p}\left[t^{n-1}f\left(r_1(\tau)e^{i\varphi_1}t,\dots,r_n(\tau)e^{i\varphi_n}t\right)\right]_{t=1}\times$$
$$\times(1-\tau_p)^{n-p-1}J_p d\tau_1\dots d\tau_p$$

où la variété $T_p \subset S_{n-1}$ est définie par (20) *et J_p par* (23).

Dans le cas $p=0$, dans lequel la variété T_p se réduit à un seul point $\tau^0\in S_{n-1}$, la formule (24) *prend la forme*

$$(25)\qquad f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots \int_0^{2\pi} d\varphi_n f\left(r_1(\tau^0)e^{i\varphi_1},\dots,r_n(\tau^0)e^{i\varphi_n}\right)J_0 .$$

Démonstration. Comme dans les théorèmes précédents il suffit de démontrer les formules (24) et (25) dans le cas où $f(z)$ se réduit à $cz_1^{v_1}\dots z_n^{v_n}$. En remplacant dans les côtés droits f par $c(r_1e^{i\varphi_1}t)^{v_1}\dots(r_ne^{i\varphi_n}t)^{v_n}$, où $r_k = r_k(\tau)$ et $\tau\in T_p$, et en tenant compte de (23) et (23′) et des formules

$$\int_0^{2\pi} e^{i(v_1-s_1)\varphi_1}d\varphi_1\dots\int_0^{2\pi} e^{i(v_n-s_n)\varphi_n}d\varphi_n = \begin{cases}(2\pi)^n & \text{pour}\quad \delta=0,\\ 0 & \text{pour}\quad \delta\neq 0,\end{cases}$$

où $\delta = \sum_1^n (v_k - s_k)^2$ on obtient (14) d'où résultent les formules (24) et (25).

THÉORÈME 4. *Si la fonction $f(z)$ remplit les conditions du théorème* 3, *alors pour tout point $z\in\Delta$, pour chaque $p=1,\dots,n-1$ et chaque $j=0,1,\dots,p$ on a la formule*

$$(26)\qquad f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots \int_0^{2\pi} d\varphi_n \int_{T_p} \frac{\partial^j}{\partial t^j}\left[t^{n-1}f\left(r_1(\tau)e^{i\varphi_1}t,\dots,r_n(\tau)e^{i\varphi_n}t\right)\right]_{t=1}\times$$
$$\times(1-\tau_p)^{n-p-1}J_{p-j} d\tau_1\dots d\tau_p$$

où

$$J_{p-j} = \frac{\partial^{p-j}}{\partial t^{p-j}} \Big[t^{n-j-1} \prod_{k=p+1}^{n} (1 - u_{pk} t)^{-1} \Big]_{t=1}. \tag{27}$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle des théorèmes 2 and 3.

Remarque 2. Les formules (24), (25) et (26) sont $(n+p)$-dimensionnelles, $p = 0, 1, \ldots, n-1$, aux noyaux analytiques. L'intégration est étendue à une variété à $(n+p)$ dimensions située sur la frontière du domaine Δ. Les formules (7′) et (25) sont identiques.'

Remarque 3. Dans les cas $p = n-1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, les formules (26) sont équivalents aux formules $(2n-1)$-dimensionnelles: a) de Temliakov ([9]) pour $n = 2$, b) de A. Aizenberg ([1], p. 35) pour $n \geqslant 2$ et c) de Z. Opial et J. Siciak ([8]) pour $n \geqslant 2$.

Travaux cités

[1] Л. А. Айзенберг (L. A. Aizenberg), *Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций многих комплексных переменных*, Учен. зап. Моск. обл. института 77 (1959), p. 13-35.

[2] S. Bochner, *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula*, Annals of Math. 44 (1943), p. 652-673.

[3] L. Fantappiè, *Sull'integrale affine di una fuzioni analitica di due n-uple di variable*, Atti della Accad. Nazionale dei Lincei 20 (1956).

[4] Б. А. Фукс (B. A. Fuks), *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных*, Москва 1962.

[5] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957.

[6] E. Martinelli, *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di piu variabili complesse*, Memor. Acad. Ital. 9 (1938), p. 269-283.

[7] — *Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di più variabili complesse*, Annali Mat. pura ed applic. 34 (1953), p. 277-347.

[8] Z. Opial and J. Siciak, *Integral formulas for functions holomorphic in n-circular domains*, Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiellońskiego, Prace Matematyczne 9 (1963).

[9] А. А. Темляков (A. A. Temliakov), *Интегральное представление аналитических функций двух комплексных переменных*, Учен. зап. Моск. обл. пед. института 21 (1954), p. 7-21.

[10] A. Weil, *L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables*, Math. Annalen 111 (1935), p. 178-182.

Reçu par la Rédaction le 2. 6. 1965