ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVI (1972)

Croissance et meilleure approximation polynomiale des fonctions entieres

par NGUYEN THANH VAN (Toulouse)

Introduction. Soit E un compact du plan C de capacité $d(E) > 0$, pour toute fonction f définie et bornée sur E on pose:

$$\varrho_n(f) = \operatorname{Inf}\{\|f-p\|: p \in \mathscr{P}_n\}$$

où $\mathscr{P}_n$ désigne l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ et $\| \ \|$ la norme uniforme sur E. La borne $\varrho_n(f)$ est atteinte par un polynôme $P_n \in \mathscr{P}_n$: $\varrho_n(f) = \|f-P_n\|$.

Dans un récent article [5] Winiarski a établi le résultat suivant:

THÉORÈME. *f est la restriction à E d'une fonction entière d'ordre ϱ $(0 < \varrho < \infty)$ et de type τ $(0 < \tau < \infty)$ si et seulement si:*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\varrho}\|f-P_n\|^{1/n} = d(E)\cdot(e\varrho\tau)^{1/\varrho}.$$

Dans le cas où E est régulier ce résultat a été annoncé par Rice (Bull. A.M.S. Janvier 1970). A notre connaissance aucun résultat analogue n'est connu pour l'approximation polynomiale en norme L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ relative à une certaine mesure μ sur E. C'est ce problème que nous traitons ici, μ sera une mesure finie positive admissible au sens de Widom (voir [4]). Notre méthode s'étend trivialement aux fonctions de plusieurs variables complexes quand on se limite, pour l'approximation polynomiale, à un produit cartésien de compacts de C de capacité positive. C'est dans ce cadre que nous donnons le résultat principal (Théorème 1); nous rappelons au début quelques résultats connus utiles, tout en y apportant quelques compléments.

A. Préliminaires. 1° Soit $\tilde{\Omega}$ la composant connexe infinie de $\Omega = \complement E$, soit $\tilde{E}$ le complémentaire de $\tilde{\Omega}$. $\{a_n\}$ désigne une suite de points extrémaux de Leja [1] de E, c'est-à-dire:

$$|(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}-a_{n-1})\ldots(a_{n+1}-a_1)| = \operatorname*{Max}_{z\in E}|(z-a_n)(z-a_{n-1})\ldots(z-a_1)|.$$

On pose: $L_n(z) = (z-a_n)(z-a_{n-1})\ldots(z-a_1)$, $L_0(z) \equiv 1$.

LEMME 1 ([1]).

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{Max}_{z\in E}|L_n(z)|\right)^{1/n} =$ *Capacité de* E.

(b) $\{L_n\}$ *est une base (au sens de Schauder) de* $H(C)$ *(espace des fonctions entières), elle est une base commune de* $H(\tilde{E})$ [1] *et* $H(C)$ *lorsque* $\tilde{\Omega}$ *est régulier pour le problème di Dirichlet.*

2° Soit μ une mesure finie positive et admissible au sens de Widom sur E (voir [4]); pour chaque entier n il existe un polynôme $W_n(z) = z^n + a_{n,n-1}z^{n-1} + \ldots + a_{n,0}$ unique tel que:

$$\lambda_n^2 = \int_E |W_n(z)|^2 d\mu z = \operatorname*{Inf}_{(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})\in C^n} \int_E |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0|^2 d\mu z.$$

On désigne par $L^2_{\mathscr{P}}(E, \mu)$ le sous-espace fermé de $L^2(E, \mu)$ engendré par les polynômes.

LEMME 2.

(a) $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n)^{1/n} =$ *Capacité de* E.

(b) $\{W_n\}$ *est une base orthogonale de* $L^2_{\mathscr{P}}(E, \mu)$ *qui est aussi une base de* $H(C)$.

(c) *Si* $\tilde{\Omega}$ *est régulier pour le problème de Dirichlet, alors*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{Max}_{z\in E}|W_n(z)|\right)^{1/n} = \textit{Capacité de } E$$

et $\{W_n\}$ *est une base de* $H(\tilde{E})$.

Démonstration. Pour les parties (a) et (c) on renvoie à l'article de Widom [4] et au chapitre 2 de [3]. Il est évident que $\{W_n\}$ est une base orthogonale de $L^2_{\mathscr{P}}(E, \mu)$, montrons qu'elle est une base de $H(C)$; nous reprenons la technique utilisée dans [3] (chapitre 2, proposition 6)

Posons $A = L^2_{\mathscr{P}}(E, \mu)$, on a:

$$H(\tilde{E}) \hookrightarrow A \tag{1}$$

$\hookrightarrow$ signifie l'inclusion continue. Il en résulte que toute forme linéaire continue l sur A est une forme linéaire continue sur $H(\tilde{E})$, donc d'après le théorème de dualité de Köthe il existe une fonction unique $\varphi \in H_0(\tilde{\Omega})$ [2] telle que:

$$l(f) = \langle \varphi, f\rangle = \int_{\gamma_f} \varphi(z) f(z)\, dz \qquad \text{pour toute } f \in H(\tilde{E}).$$

Par l'application $l \to \varphi$ on peut identifier le dual A' de A à un espace hilbertien A^* de fonctoins holomorphes sur $\tilde{\Omega}$ et nulles à l'infini avec la norme:

$$\|\varphi\|_{A^*} = \|l\|_{A'}.$$

(1) Note. $H(\tilde{E})$ désigne l'espace des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $\tilde{E}$ muni de sa topologic inductive usuelle.

(2) Note. $H_0(\tilde{\Omega}) = \{f \in H(\tilde{\Omega}) : f(\infty) = 0\}$.

La suite $\{W_n\}$ est une base orthogonale de A, soit $\{\psi_n\}$ la suite dans A^* qui forme avec $\{W_n\}$ un système biorthogonal, c'est-à-dire:

$$\langle \psi_p, W_q \rangle = \int_\gamma \psi_p(z) \cdot W_q(z) dz = \delta_{p,q}.$$

On a: $\psi_n^{(k)}(\infty) = 0$ pour $k \leqslant n$, $\psi_n^{(n+1)}(\infty) = \dfrac{(n+1)!}{2i\pi}$

$$\|\psi_n\|_{A^*} = \frac{1}{\lambda_n}.$$

Soit $G(z)$ la fonction de Green de $\tilde{\Omega}$ avec pôle au point ∞, pour tout $r > 1$ on pose;

$$K_r = \tilde{E} \cup \{z \in \tilde{\Omega}\colon G(z) < \log r\}.$$

On voit que $(W_n, \psi_n\}$ est un système biorthogonal dans $H(K_r) \times \times H_0(\complement K_r)$ (1) implique: $A^* \hookrightarrow H_0(\tilde{\Omega})$ donc si l'on pose:

$$\Gamma_r = \{z \in \tilde{\Omega}\colon G(z) = \log r\},$$

$\|\cdot\|_r =$ norme uniforme sur Γ_r, on a:

$$\|\psi_n\|_r \leqslant M_r \|\psi_n\|_{A^*} = M_r \lambda_n^{-1}, \ \forall_n. \tag{2}$$

Maintenant si σ est fixé dans $G(\tilde{\Omega})$ et r arbitraire > 1 on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\|\psi_n\|_{\sigma r} \leqslant M(r, \varepsilon)(1+\varepsilon)^n \big(rd(E)\big)^{-n} \qquad (d(E) = \text{Cap. } E)$$

(on applique le lemme de Schwarz généralisé et utilise le fait que $\lim(\lambda_n)^{1/n} = d(E)$).

D'autre part Widom a montré que $\dfrac{1}{n}\log|W_n(z)|$ converge uniformément sur tout compact de $C \setminus \text{Env. } E$ (Env. E désigne l'enveloppe convexe de E) vers $G(z) - \log d(E)$, donc:

$$\|W_n\|_r \leqslant M(r, \varepsilon)(1+\varepsilon)^n \big(rd(E)\big)^n \quad \text{pour } r \text{ assez grand}.$$

On obtient ainsi deux inégalités qui impliquent que la série $\sum\limits_0^\infty W_n(z) \times \times \psi_n(u)$ converge dans la topologie inductive de $H(K_r \times \complement K_{\sigma r})$, ceci pour tout r assez grand; la somme de cette série est évidemment le noyau de Cauchy $\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{1}{u-z}$ puisque $\{W_n, \psi_n\}$ est un système biorthogonal.

Il en résulte que toute fonction entière f est la somme d'une série unique $\sum\limits_0^\infty C_n W_n(z)$ convergent uniformément sur tout compact du plan, avec $C_n = \int_{\mathscr{C}} f(z)\psi_n(z)dz$ où $\mathscr{C}$ est un cercle contenant $\tilde{E}$ dans son intérieur. $\{W_n\}$ est donc une base de $H(C)$.

3° **Complément.** Nous donnons ici un complément au lemme 2. Soit μ une mesure finie positive sur E, désignons encore par $\{W_n\}$ la suite des polynômes extrémaux associés à μ.

PROPOSITION. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}\left[\operatorname{Max}\limits_{z\in E}|W_n(z)|\cdot\dfrac{1}{\lambda_n}\right]^{1/n}\leqslant 1;$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n)^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{Max}\limits_{z\in E}|W_n(z)|\right)^{1/n}=d(E);$

(iii) $\{W_n\}$ *est une base de* $H(\tilde{E})$.

La démonstration, que nous omettons, se fait par la technique déjà utilisée dans [3] (prop. 6 et Théorème 7 du chapter 2). Voici une conséquence de la proposition qui nous paraît intéressante:

On suppose que E soit une réunion finie d'arcs et de contours de Jordan rectifiables; soit μ une mesure finie positive sur E absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (notée m). On va montrer que la suite $\{W_n\}$ associée à μ possède les propertiétés (ii) et (iii), d'apres la proposition il suffit de montrer que (i) est vérifiée; on va utiliser le lemme polynomial de Leja pour établir (i).

Posons:

$$\tilde{W}_n=\frac{W_n}{\lambda_n}\left(\lambda_n^2=\int_E|W_n|^2\,d\mu\right),$$

$$E_n^N=\{z\in E:\ \varrho^n|\tilde{W}_n(z)|\geqslant N\}\qquad(0<\varrho<1),$$

$$E^N=\bigcup_0^\infty E_n^N.$$

On a:

$$\mu(E^N)\leqslant\sum_{n=0}^\infty\mu(E_n^N)\leqslant\sum_{n=0}^\infty\frac{\varrho^{2n}}{N^2}=\frac{1}{N^2(1-\varrho^2)},$$

$$\lim_{N\to\infty}\mu(E^N)=0.$$

Donc, sauf pour z appartenant à un sous ensemble e de E avec $\mu(e)=0$ (donc $m(e)=0$), on a: $\limsup\limits_{n\to\infty}\varrho^n|\tilde{W}_n(z)|<\infty$.

Le lemme polynomial de Leja [2] donne: $\forall\varepsilon>0$, $\exists M_\varepsilon$ tel que

$$|\tilde{W}_n(z)|\leqslant\frac{M_\varepsilon e^{\varepsilon n}}{\varrho^n}\ \forall z\in E;$$

piusque l'on peut choisir ε arbitrairement petit et ϱ arbitrairement voisin de 1 $(0<\varrho<1)$ on a:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\operatorname{Max}_{z\in E}|\tilde{W}_n(z)|\right)^{1/n}\leqslant 1\qquad\text{C.Q.F.D.}$$

B. Approximation polynomiale en norme L^p. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, K$, soit E_i un compact de C de capacité $d(E_i) = \nu_i > 0$, μ_i une mesure finie positive admissible au sens de Widom sur E_i. On pose:

$$E = \prod_{i=1}^{K} E_i, \qquad \mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_K.$$

On désigne par $L^2_{\mathscr{P}}(E, \mu)$ le sous-espace fermé de $L^2(E, \mu)$ engendré par l'ensemble des polynômes de K variables complexes.

Soit $f \in L^p(E, \mu) \cap L^2_{\mathscr{P}}(E, \mu)$ avec $p \in [1, \infty]$, pour tout entier n on désigne par P_n un polynôme de degré $\leqslant n$ tel que

$$\|f - P_n\|_p \overset{\text{Def}}{=} \|f - P_n\|_{L^p(E,\mu)} = \operatorname*{Inf}_{P \in \mathscr{P}_n} \|f - P\|_{L^p(E,\mu)}.$$

$\mathscr{P}_n$ désigne l'ensemble des polynômes de K variables complexes de degré $\leqslant n$.

Soient Δ un domaine cerclé borné et complet de centre 0, q un entier $\geqslant 2$, f une fonction entière (de K variables complexes).

On appelle *q-ordre de f le nombre*:

$$\varrho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log_q M_\Delta(f, r) \cdot (\log r)^{-1} \text{ (}^3\text{)}$$

avec $M_\Delta(f, r) = \operatorname*{Sup}_{z \in r\cdot\Delta} |f(z)|$.

ϱ ne dépend pas de Δ, lorsque $\varrho \in]0, \infty[$. On appelle *(Δ, q)-type de f* e nombre:

$$\tau = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log_{q-1} M_\Delta(f, r) \cdot r^{-\varrho}.$$

Dans la suite Δ sera le domaine $\{z \in C^K \colon |z_i| < \nu_i\}$.

THÉORÈME 1. *Dans les deux cas suivants*:

$2 \leqslant p \leqslant \infty$,

$1 \leqslant p < 2$ *et les $\tilde{\Omega}_i$ réguliers pour le problème de Dirichlet.*

f est μ-presque partout la restriction à E d'une fonction entière de q-ordre ϱ $(0 < \varrho < \infty)$ et de (Δ, q)-type τ $(0 < \tau < \infty)$ si et seulement si:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{1/\varrho} \|f - P_n\|_p^{1/n} = (e\varrho\tau)^{1/\varrho} \qquad \textit{lorsque } q = 2,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\log_{q-2} n)^{1/\varrho} \|f - P_n\|_p^{1/n} = \tau^{1/\varrho} \qquad \textit{lorsque } q > 2.$$

Démonstration. (a) Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, K$ soit $\{L^i_m\}_{m\in N}$ une suite de polynômes extrémaux de Leja associée à E_i (voir lemme 1), soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_K) \in N^K$; on pose:

$$L_a(z) = L^1_{a_1}(z_1) \cdot L^2_{a_2}(z_2) \ldots L^K_{a_K}(z_K),$$

$\{L_a\}_{a \in N^K}$ est une base de $H(C^K)$.

(3) Note. $\log_q x = \log(\log_{q-1} x)$, $\log_0 x = x$.

(b) Soit $\{W^i_m\}_{m\in N}$ la suite des polynômes extrémaux associée à (E_i, μ_i) (voir lemme 2); on pose:

$$W_a(z) = W^1_{a_1}(z_1)\cdot W^2_{a_2}(z_2)\ldots W^K_{a_K}(z_K),$$

$\{W_a\}_{a\in N^K}$ est une base orthogonale de $L^2_{\mathscr{P}}(E, \mu)$ qui est aussi une base de $H(C^K)$.

(c) Nous ferons appel au résultat suivant (voir [3], chapitre 2, II): Si $\{A_a\}_{a\in N^K}$ est une base simple de $H(C^K)$, c'est-à-dire une base telle que $\frac{1}{a!}D^a A_a(0) = 1$ et $D^\beta A_a(0) = 0$ pour tout $\beta \nleq a$ (on écrit $\beta \leqslant a$ lorsque $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K)$ avec $\beta_i \leqslant a_i \forall_i$), alors pour toute fonction entière avec $f = \sum_{a\in N^K} C_a A_a$ on a:

$$q\text{-ordre de } f = \varrho = \limsup_{\|a\|\to\infty} \frac{\|a\|\log_{q-1}\|a\|}{-\log|C_a|} \qquad (\|a\| = a_1 + \ldots + a_K).$$

Lorsque $\varrho \in\,]0, \infty[$ on a:

$$(\Delta, q)\text{-type de } f = \begin{cases} \limsup\limits_{\|a\|\to\infty} \log_{q-2}\|a\|\big(|C_a|\,\delta_a(\Delta)\big)^{\varrho/\|a\|} & \text{si } q > 2, \\ \dfrac{1}{e\varrho}\limsup\limits_{\|a\|\to\infty}\|a\|\big(|C_a|\,\delta_a(\Delta)\big)^{\varrho/\|a\|} & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

où

$$\Delta = \{z\in C^K:\ |z_i| < \nu_i\},$$

$$\delta_a(\Delta) = \nu_1^{a_1}\nu_2^{a_2}\ldots\nu_K^{a_K} \overset{\text{Def}}{=} \nu^a.$$

(d) Nous considérons seulement le cas $q = 2$, la démonstration étant identique pour le cas $q > 2$.

Supposons que f soit une fonction entière d'ordre ϱ $(0 < \varrho < \infty)$ et de Δ-type τ, on a:

$$f = \sum_{a\in N^K} C_a L_a,$$

$$\|f - P_n\|_p \leqslant \Big\| f - \sum_{\|a\|\leqslant n} C_a L_a\Big\|_p \leqslant C^{te}\Big\| f - \sum_{\|a\|\leqslant n} C_a L_a\Big\|,$$

$$\|f - P_n\|_p \leqslant C^{te}\Big\|\sum_{\|a\|>n} C_a L_a\Big\| \leqslant C^{te}\sum_{\|a\|>n}|C_a|\,\|L_a\|,$$

$\|\cdot\|$ désigne la norme uniforme sur E.

D'après le lemme 1 on a: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$ tel que

$$\|L_a\| \leqslant K_\varepsilon \nu^a (1+\varepsilon)^{\|a\|}$$

donc:

$$\|f - P_n\|_p \leqslant K_\varepsilon \sum_{\|a\|>n}|C_a|\,\nu^a(1+\varepsilon)^{\|a\|}.$$

D'autre part d'après (c) on a pour $\|\alpha\|$ assez grand:

$$|C_\alpha|\,\nu^\alpha \leqslant \frac{[(e\varrho\tau)^{1/\varrho}+\varepsilon]^{\|\alpha\|}}{\|\alpha\|^{\|\alpha\|/\varrho}}.$$

Donc:

$$\|f-P_n\|_p \leqslant C^{te} \sum_{\|\alpha\|\geqslant n} \frac{[(e\varrho\tau)^{1/\varrho}+\varepsilon]^{\|\alpha\|}(1+\varepsilon)^{\|\alpha\|}}{\|\alpha\|^{\|\alpha\|/\varrho}}.$$

Par un calcul élémentaire nous en tirons:

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\varrho}\|f-P_n\|_p^{1/n} \leqslant [(e\varrho\tau)^{1/\varrho}+\varepsilon](1+\varepsilon).$$

Puisque ε peut être pris arbitrairement petit on a

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\varrho}\|f-P_n\|_p^{1/n} \leqslant (e\varrho\tau)^{1/\varrho}.$$

Nous avons $f = \sum_{\alpha\in N^K} B_\alpha W_\alpha$ avec:

$$B_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha^{(2)}} \int_E f\cdot \overline{W}_\alpha\, d\mu,$$

$$\lambda_\alpha^{(2)} = (\lambda_{\alpha_1}^1)^2(\lambda_{\alpha_2}^2)^2\dots(\lambda_{\alpha_K}^K)^2, \qquad (\lambda_{\alpha_i}^i)^2 = \int_{E_i} |W_{\alpha_i}^i|^2\, d\mu_i.$$

Pour tout α avec $\|\alpha\| > n$ on a:

$$B_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha^{(2)}} \int_E (f-P_n)\,\overline{W_\alpha}\, d\mu$$

puisque $\int_E P_n \overline{W}_\alpha\, d\mu = 0$. En effet pour tout monôme $z^\beta = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}\dots z^{\beta_K}$ avec $|\beta| < |\alpha|$ il existe i_0 tel que $\beta_{i_0} < \alpha_{i_0}$ et on a:

$$\int_E z^\beta \overline{W_\alpha}\, d\mu = \prod_1^K \int_{E_i} z_i^{\beta_i}\overline{W_{\alpha_i}^i}\, d\mu_i.$$

Or:

$$\int_{E_{i_0}} z_{i_0}^{\beta_{i_0}} \overline{W_{\alpha_{i_0}}^{i_0}}\, d\mu_{i_0} = 0.$$

Donc:

$$\int_E z^\beta \overline{W}_\alpha\, d\mu = 0.$$

P_n est une somme finie de tels monômes, donc $\int_E P_n \overline{W}_\alpha\, d\mu = 0$. Ainsi a-t-on pour $n < \|\alpha\|$:

$$|B_\alpha| = \frac{1}{\lambda_\alpha^2}\left|\int_E (f-P_n)\overline{W}_\alpha\, d\mu\right| \leqslant \frac{C^{te}}{\lambda_\alpha^{(2)}}\|f-P_n\|_p \|W_\alpha\|_p \qquad (\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1).$$

Cas $2 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors $p' \in [1, 2]$ et on a:

$$\|W_\alpha\|_{p'} \leqslant C^{te}\|W_\alpha\|_2 \qquad \Big(\|W_\alpha\|_2 = \prod_1^K \|W^i_{\alpha_i}\|_2\Big)$$

donc:

$$|B_\alpha| \leqslant \frac{C^{te}\|f-P_n\|_p}{\lambda^1_{\alpha_1}\lambda^2_{\alpha_2}\ldots\lambda^K_{\alpha_K}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) pour tout α tel que $\|\alpha\|$ soit assez grand on a d'après le lemme 2:

$$\lambda^1_{\alpha_1}\lambda^2_{\alpha_2}\ldots\lambda^K_{\alpha_K} \geqslant \nu^\alpha(1-\varepsilon)^{\|\alpha\|}$$

donc:

$$|B_\alpha|\nu^\alpha(1-\varepsilon)^{\|\alpha\|} \leqslant C^{te}\|f-P_n\|_p$$

pour tout $n < \|\alpha\|$.

Maintenant en appliquant (c) on a:

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\varrho}\|f-P_n\|_p^{1/n} \geqslant (1-\varepsilon)(e\varrho\tau)^{1/\varrho}.$$

Puisque ε peut être pris arbitrairement petit on a

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\varrho}\|f-P_n\|_p^{1/n} \geqslant (e\varrho\tau)^{1/\varrho}.$$

L'inégalité inverse étant déjà établie, on a ainsi:

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\varrho}\|f-P_n\|_p^{1/n} = (e\varrho\tau)^{1/\varrho},$$

Cas $1 \leqslant p < 2$ *et les* $\tilde{\Omega}_i$ *réguliers pour le problème de Dirichlet.* Nous avons alors $p' \in [2, \infty]$ et:

$$\|W_\alpha\|_{p'} \leqslant C^{te}\prod_1^K \|W^i_{\alpha_i}\|_{E_i}.$$

Le lemme 2 donne: étant donné $\varepsilon \in]0, 1[$, pour $\|\alpha\|$ assez grand ont lieu les inégalités

$$\lambda^1_{\alpha_1}\lambda^2_{\alpha_2}\ldots\lambda^K_{\alpha_K} \geqslant \nu^\alpha(1-\varepsilon)^{\|\alpha\|},$$

$$\prod_1^K \|W^i_{\alpha_i}\|_{E_i} \leqslant \nu^\alpha(1+\varepsilon)^{\|\alpha\|},$$

donc pour $n < \|\alpha\|$ on a:

$$|B_\alpha|\nu^\alpha\left[\frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}\right]^{\|\alpha\|} \leqslant C^{te}\|f-P_n\|_p.$$

La suite se fait comme précédemment (cas $p \geqslant 2$).

(e) Supposons maintenant que f soit un élément de $L^p(E, \mu) \cap L^2_{\mathscr{P}}(E, \mu)$ tel que:

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\varrho}\|f-P_n\|_p^{1/n} = (e\varrho\tau)^{1/\varrho}.$$

Montrons que f est μ-presque partout la restriction à E d'une fonction entière d'ordre ϱ et de Δ-type τ.

En tant qu'élément de $L^2_{\mathscr{P}}(E, \mu)$ f admet un développement en série orthogonale $f = \sum_{\alpha \in N^K} B_\alpha W_\alpha$, on a:

$$B_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha^{(2)}} \int_E f \overline{W}_\alpha d\mu.$$

pour $n < \|\alpha\|$: $B_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha^{(2)}} \int_E (f-P_n)\overline{W}_\alpha d\mu$,

$$|B_\alpha| \leqslant \frac{C^{te}}{\lambda_\alpha^{(2)}} \|f-P_n\|_p \|W_\alpha\|_{p'}.$$

En raisonnant comme à la fin de (d), mais en sens inverse, on voit que l'hypothèse implique:

$$\limsup_{\|\alpha\| \to \infty} \|\alpha\|^{1/\varrho} (|B_\alpha| \nu^\alpha)^{1/\|\alpha\|} \leqslant (e\varrho\tau)^{1/\varrho}$$

donc d'après (c) la série $\sum_{\alpha \in N^K} B_\alpha W_\alpha$ converge uniformément sur tout compact du plan et représente une fonction entière $\tilde{f}$ de croissance $\leqslant$ (ordre ϱ, Δ-type τ). Il est évident que f est μ-presque partout la restriction de $\tilde{f}$ à E. Il reste à prouver que $\tilde{f}$ est de croissance (ordre ϱ, Δ-type τ), pour cela on raisonne comme au début de (d), mais en sens inverse.

L'auteur tient à remercier le professeur J. Siciak d'avoir bien voulu relire le texte dactylographié de cet article, en corriger une erreur et suggérer quelques améliorations.

Références

[1] F. Leja, *Sur certaines suites liées aux ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, Ann. Soc. Polon. Math. 4 (1957), p. 8–13.

[2] — *Sur les suites de polynômes bornés presque partout sur la frontière d'un domaine*, Math. Ann. 108 (1933), p. 517–524.

[3] Nguyen Thanh Van, Thèse Sci. Math. Paris 1970 (à paraître aux Ann. Fourier, t. 22, n. 2).

[4] H. Widom, *Polynomials associated with measures in the complex plane*, J. Math. Mech. 16 (1967), p. 997–1013.

[5] T. Winiarski, *Approximation and interpolation of entire functions*, Ann. Polon. Math. 23 (1970), p. 259–273.

Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1971