ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

Sur la notion d'objet géométrique attaché, II

par A. Krupińska (Rzeszów) et Z. Moszner (Kraków)

Le dernier théorème de la première partie de cette note [2] établit une relation entre un objet géométrique attaché f et l'objet géométrique $\bar{f}$, où

$$\bar{f}(T) = \langle f(T),\, \underset{p}{T}(\xi^k)\rangle \,.$$

Cette relation entraîne une dépendance entre la décomposition déterminée par l'objet f (en abgrégé f-décomposition) et la $\bar{f}$-décomposition, c'est-à-dire une liaison entre la décomposition de l'ensemble Z invariante par rapport à l'opération $\circ$, définie dans la première partie de cette note, et la décomposition invariante par rapport à la superposition des transformations de Z. Cette dépendance nous permettra de donner une méthode de construction des décompositions invariantes par rapport à l'opération $\circ$, c'est-à-dire une méthode par laquelle nous pouvons construire des objets attachés et decider si un objet est un objet attaché à un point.

Nous allons d'abord donner quelques définitions.

Définition 1 [1]. Une décomposition $\{A_j\}_{j\in I}$ est dite *contenue* dans une décomposition $\{B_j\}_{j\in J}$, si chaque composante A_{j_1} de la première décomposition est contenue dans une composante B_{j_2} de la seconde ([1]).

Définition 2. Une décomposition $\{C_j\}_{j\in K}$ est dite *intersection* de deux décomposition $\{A_j\}_{j\in I}$ et $\{B_j\}_{j\in J}$ si chaque composante C_j de la décomposition $\{C_j\}_{j\in K}$ satisfait à la condition

$$C_j = A_{j_1} \cap B_{j_2}\,, \quad \text{où } j_1 \in I \text{ et } j_2 \in J\,.$$

Définition 3. Une décomposition $\{A_j\}_{j\in I}$ est dite la *décomposition-somme* d'une décomposition $\{B_j\}_{j\in J}$, si chaque composante A_j est la somme de certaines composantes de $\{B_j\}_{j\in J}$.

Définition 4. Nous appelons *p-objet* l'objet défini comme suit:

$$p(T) = \underset{p}{T}(\xi^k)\,,$$

([1]) Nous considérons, ici et dans la suite, les décompositions d'un ensemble fixé Z.

où $\underset{p}{\xi}^k$ sont, comme on le sait, les coordonnées d'un point fixé d'avance dans le système de coordonnées primitif.

Remarquons d'abord qu'on a le

Théorème 1. *Pour qu'une décomposition soit une décomposition invariante par rapport à l'opération* $\circ$ *il faut et il suffit que l'intersection de cette décomposition avec la* p*-décomposition soit invariante par rapport à la superposition des transformations* (²).

C'est une conclusion immédiate du théorème mentionné ci-dessus, si l'on remarque qu'une $\bar{f}$-décomposition est l'intersection d'une f-décomposition et d'une p-décomposition.

Démontrons à présent le

Lemme 1. *Pour qu'une décomposition* $\{A_j\}_{j\in J}$ *soit l'intersection de deux décompositions* $\{B_j\}_{j\in I}$ *et* $\{C_j\}_{j\in S}$ *il faut et il suffit que ces décompositions satisfassent aux conditions suivantes:*

1. $\{B_j\}_{j\in I}$ *est la décomposition-somme de* $\{A_j\}_{j\in J}$;

2. $\{C_j\}_{j\in S}$ *est la décomposition-somme de* $\{A_j\}_{j\in J}$;

3. *aucune composante* B_{j_1} *ne peut contenir deux composantes* A_{j_2}, A_{j_3} *distinctes et contenues dans la même composante* C_{j_4}.

Démonstration. Supposons que la décomposition $\{A_j\}_{j\in J}$ soit l'intersection de deux décomposition $\{B_j\}_{j\in I}$ et $\{C_j\}_{j\in S}$. Dans ce cas les conditions 1 et 2 résultent des définitions 2 et 3. Supposons maintenant que 3 n'ait pas lieu. Il existe alors des composantes $B_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_3}, C_{j_4}$ telles que

$$A_{j_2} \neq A_{j_3}; \quad A_{j_2} \subset B_{j_1}; \quad A_{j_3} \subset B_{j_1}; \quad A_{j_2} \subset C_{j_4}; \quad A_{j_3} \subset C_{j_4}.$$

Il en résulte, d'après la définition 2, que

$$A_{j_2} = B_{j_1} \cap C_{j_4} = A_{j_3},$$

ce qui est impossible.

Nous montrerons maintenant que les conditions 1, 2 et 3 sont aussi suffisantes pour que la décomposition $\{A_j\}_{j\in J}$ soit l'intersection de deux décompositions $\{B_j\}_{j\in I}$ et $\{C_j\}_{j\in S}$. Les conditions 1 et 2 entraînent qu'il existe pour chaque j de J un j_1 de I et un j_2 de S tels que

$$A_j \subset B_{j_1}, \quad A_j \subset C_{j_2},$$

donc

$$A_j \subset B_{j_1} \cap C_{j_2}.$$

Si

$$A_{j_1} \cap P_{j_2} \not\subset B_j,$$

(²) Rappelons que l'opération $\circ$ dépend de p_0.

alors pour un x de Z nous obtenons

$$x \in B_{j_1} \cap C_{j_2}, \quad x \notin A_j$$

et, en vertu de 1 et 2, il existe un indice $\bar{j} \in J$, $\bar{j} \neq j$, tel que

$$x \in A_{\bar{j}}, \quad A_{\bar{j}} \subset B_{j_1}, \quad A_{\bar{j}} \subset C_{j_2}.$$

Au contraire de 3, les deux composantes A_j et $A_{\bar{j}}$ distinctes sont donc contenues dans les composantes B_{j_1} et C_{j_2}.

D'après le lemme 1 le théorème 1 prend la forme suivante:

THÉORÈME 2. *Pour qu'une décomposition* $\{B_j\}_{j \in I}$ *soit une décomposition invariante par rapport à l'opération* $\circ$ *il faut et il suffit qu'il existe une décomposition* $\{A_j\}_{j \in J}$ *invariante par rapport à la superposition des transformations et telle que soient vérifiées les conditions* 1, 2 *et* 3 *du lemme* 1 *pour la p-décomposition au lieu de la décomposition* $\{C_j\}_{j \in S}$.

Nous allons encore démontrer le

LEMME 2. *Si* $\{A_j\}_{j \in S}$ *et* $\{B_j\}_{j \in J}$ *sont les décompositions d'un groupe* G *en classes d'équivalence à gauche par rapport aux sous-groupes* G_1 *ou* G_2 *du groupe* G, *alors pour que* $\{A_j\}_{j \in S}$ *soit la décomposition-somme de* $\{B_j\}_{j \in J}$ *il faut et il suffit que* G_2 *soit un sous-groupe du groupe* G_1.

Démonstration. Supposons que $\{A_j\}_{j \in S}$ soit la décomposition-somme de $\{B_j\}_{j \in J}$. Il existe alors une composante A_j telle que $G_2 \subset A_j$. Mais c'est seulement la composante G_1 de la décomposition $\{A_j\}_{j \in S}$ qui a un élément commun (l'élément neutre) avec G_2, donc on doit avoir $A_j = G_1$.

Inversement, si $G_2 \subset G_1$, alors G_2 est un sous-groupe de G_1 et les conditions suivantes ont lieu:

$$G_1 = \bigcup_{j \in J' \subset J} B_j \quad \text{et} \quad B_j = T_j \cdot G_2, \quad \text{où } T_j \in G.$$

Si donc $A_{\bar{j}} \in \{A_j\}_{j \in S}$, alors

$$A_{\bar{j}} = T \cdot G_1 = T \cdot [\bigcup_{j \in J' \subset J} B_j] = \bigcup_{j \in J' \subset J} [T \cdot B_j] = \bigcup_{j \in J' \subset J} T \cdot T_j \cdot G_2 = \bigcup_{j \in J' \subset J} \overline{T}_j \cdot G_2,$$

où $\overline{T}_j \in G$ et de là $\overline{T}_j \cdot G_2 \in \{B_j\}_{j \in J}$.

Il en résulte que chaque composante $A_{\bar{j}}$ est une somme des composantes de la décomposition $\{B_j\}_{j \in J}$, mais cela signifie que $\{A_j\}_{j \in S}$ est la décomposition-somme de $\{B_j\}_{j \in J}$.

Nous établirons maintenant un théorème équivalent au théorème 2 dans le cas où l'ensemble Z est un groupe G.

THÉORÈME 3. *Pour que* $\{B_j\}_{j \in I}$ *soit la décomposition invariante du groupe* G *par rapport à l'opération* $\circ$ *il faut et il suffit qu'il existe une décomposition* $\{A_j\}_{j \in J}$ *en classes d'équivalence à gauche par rapport à un sous-groupe* G_2 *du groupe* G *pour laquelle ont lieu les conditions* 1, 3 (*pour* *la p-décomposition au lieu de la décomposition $\{C_j\}_{j\in S}$) du lemme* 1 *et* 2′: *G_2 est un sous-groupe du sous-groupe G_1, déterminé par un p-objet.*

Nous obtenons ce théorème en remplaçant dans le théorème 2, en vertu du lemme 2, la condition 2 par la condition 2′ et en tenant compte du fait que la décomposition invariante par rapport à la superposition des transformations doit être une décomposition G en classes d'équivalence à gauche [1].

Le théorème 3 montre que nous pouvons obtenir les décompositions de tous les objets attachés au point p_0 et définis sur un groupe G, en formant, de façon remplissant la condition 3, les décompositions-sommes des classes d'équivalence à gauche par rapport à un sous-groupe arbitraire G_2 du groupe $G_1 \subset G$, où G_1 est un sous-groupe déterminant la p-décomposition. Le choix de tous les sous-groupes du groupe G, qui déterminent toutes les p-décompositions, et puis la détermination à leur tour de leurs sous-groupes détermine tous les objets attachés, définis sur G.

Du théorème 3 il résulte le

Corollaire. *Si l'objet f a pour domaine un groupe G, G_1 est un sous-groupe déterminé par une p-décomposition et si l'ensemble*

$$A = \{f^{-1}[\{f(I)\}]\} \cap G_1$$

n'est pas un sous-groupe du groupe G_1, alors l'objet f n'est pas un objet géométrique attaché au point p_0.

Nous donnons à présent quelques exemples d'objets géométriques attachés, d'objets qui ne sont attachés à aucun point et de p-décompositions.

1. Soit G le groupe des transformations affines sur la droite de la forme

$$T_{ab}\colon\ \bar{\xi} = a\xi + b\,, \qquad \text{où } a \neq 0\,,$$

et soit $\underset{p}{\xi} = 0$.

Le p-objet est donc défini comme il suit:

$$p(T) = T(0) \qquad \text{pour } T \text{ de } G\,.$$

Nous cherchons la p-décomposition du groupe G. Le sous-groupe déterminé par cette décomposition est

$$G_1 = p^{-1}[\{0\}] = \{T_{ab}\colon\ b = 0\}\,.$$

En prenant $G_1 = G_2$ dans le théorème 3 nous obtenons qu'une décomposition-somme arbitraire de la p-décomposition peut être une décomposition d'objet attaché au point $\underset{p}{\xi} = 0$. Par exemple l'objet f,

$$f(T_{ab}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } b \geqslant 0\,, \\ 2 & \text{pour } b < 0\,, \end{cases}$$

est un objet attaché au point 0, car sa décomposition est la décomposition-somme de la p-décomposition.

La règle de transformation de cet objet est la suivante:

$$w_2 = F(w_1, \xi_1, T_{ab}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } a\xi_1 + b \geqslant 0 , \\ 2 & \text{pour } a\xi_1 + b < 0 . \end{cases}$$

2. La f-décomposition pour l'objet f,

$$f(T_{ab}) = \begin{cases} b & \text{pour } a > 0 , \\ b+1 & \text{pour } a < 0 , \end{cases}$$

est une décomposition-somme des classes d'équivalence à gauche du groupe G par rapport au groupe G_2 défini comme il suit:

$$G_2 = \{T_{a0}\colon\ a > 0\} .$$

En vertu du théorème 3, f est donc un objet attaché au point 0. Il admet la règle de transformation suivante:

$$w_2 = F(w_1, \xi_1, T_{ab}) = \begin{cases} a\xi_1 + b & \text{pour } \xi_1 + 1 = w_1 , \ a < 0 , \\ a\xi_1 + b + 1 & \text{pour } \xi_1 + 1 = w_1 , \ a > 0 , \\ a\xi_1 + b + 1 & \text{pour } \xi_1 = w_1 , \quad a < 0 , \\ a\xi_1 + b & \text{pour } \xi_1 = w_1 , \quad a > 0 . \end{cases}$$

3. En prenant un autre point de repère $\underset{p}{\xi} \neq 0$ nous avons $p(T) = T(\underset{p}{\xi})$ et nous obtenons comme sous-groupe G_1 de la p-décomposition:

$$G_1 = p^{-1}[\{\underset{p}{\xi}\}] = \{T_{ab}\colon\ b = -a\underset{p}{\xi} + \underset{p}{\xi}\} .$$

L'objet f considéré dans [2],

$$f(T_{ab}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } a = 1 , \\ 1 & \text{pour } a \neq 1 , \end{cases}$$

ne peut être un objet attaché à aucun point $\underset{p}{\xi}$. En effet,

$$\{f^{-1}[\{f(I)\}]\} \cap G_1 = \{I\} ,$$

donc l'ensemble $\{I\}$ est l'unique sous-groupe G_2 de G_1 dont il est question dans le théorème 3. Mais, dans ce cas, la composante $f^{-1}[\{1\}]$ ne satisfait pas à la condition 3 du théorème 3. L'exemple considéré montre que la condition dans le corollaire du théorème 3, étant suffisante pour qu'un objet ne soit attaché à aucun point, n'est pas en même temps nécessaire.

4. L'objet f déterminé de la façon suivante:

$$f(T_{ab}) = a - b^2$$

est un objet attaché au point $\underset{p}{\xi} = 0$, parce que sa décomposition satisfait aux hypothèses du théorème 3, où $G_2 = \{I\}$.

Il admet la règle de transformation suivante:

$$F(w_1, \xi_1, T_{ab}) = a(w_1 + \xi_1^2) - (a\xi_1 + b)^2 .$$

5. Nous chercherons maintenant les p-décompositions du groupe G_a des transformations affines dans l'espace à n dimensions:

$$y_i = \sum_{k|1}^{n} a_{ik} x_k + b_i , \quad \text{où } \det(a_{ik}) \neq 0 .$$

Dans ce but il suffit de trouver le sous-groupe

$$G_1 = \{T \in G_a \colon \underset{p}{\xi^k} = T(\underset{p}{\xi^k})\} .$$

Dans le cas $\underset{p}{\xi^k} = 0$, $k = 1, \ldots, n$, le sous-groupe G_1 est le groupe centro-affine G_c. Pour $\underset{p}{\xi^k} \neq 0$, on peut facilement démontrer que le sous-groupe G_1 est une transformation du groupe G_c, à savoir

$$G_1 = T_1 G_c T_1^{-1} , \quad \text{où } T_1 \in G , \ T_1(0) = (\underset{p}{\xi^k}) .$$

Le sous-groupe G_c détermine donc toutes les p-décompositions du groupe affine G_a.

Travaux cités

[1] S. Midura et Z. Moszner, *Quelques remarques au sujet de la notion de l'objet et de l'objet géométrique*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), pp. 323-338.

[2] Z. Moszner, *Sur la notion d'objet géométrique attaché*, I, ibidem 20 (1968), pp. 251-257.

Reçu par la Rédaction le 12. 2. 1968