ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1965)

О нелинейной и разрывной задаче Гильберта-Газемана

В. Жаковский (Варшава)

1. Вступление. Пусть L — кривая Жордана-Ляпунова ([1], стр. 36), лежащая на плоскости комплексной переменной z, представляющая собой край ограниченной области S^+ и направленная по отношению к ней положительно. Через S^- обозначим неограниченную область, являющуюся пополнением множества $L+S^+$ по отношению к открытой плоскости. Начало системы координат находится в области S^+. Пусть $a(t)$ — комплексная функция определенная на кривой L и отображающая эту кривую в себя взаимно однозначно с сохранением направления, причем существует производная $a'(t) \neq 0$, удовлетворяющая условию Гёльдера.

Линейная задача Гильберта-Газемана для системы функций, исследованная Н. П. Векуа в работах [2], [3] и представленная также в монографии [4], состоит в определении системы n функций $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$ голоморфных отдельно в областях S^+ и S^-, имеющих конечный порядок на бесконечности, краевые значения которых удовлетворяют в каждой точке $t \in L$ следующему условию

$$\Phi^+[a(t)] = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{1}$$

причем

$$\Phi^+[a(t)] = \begin{bmatrix} \Phi_1^+[a(t)] \\ \Phi_2^+[a(t)] \\ \vdots \\ \Phi_n^+[a(t)] \end{bmatrix}, \quad \Phi^-(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1^-(t) \\ \Phi_2^-(t) \\ \vdots \\ \Phi_n^-(t) \end{bmatrix},$$
$$G(t) = \begin{bmatrix} G_{11}(t) & G_{12}(t) & \ldots & G_{1n}(t) \\ G_{21}(t) & G_{22}(t) & \ldots & G_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{n1}(t) & G_{n2}(t) & \ldots & G_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Приведенные матрицы $G(t)$ и $g(t)$ определены на кривой L и удовлетворяют условию Гёльдера; причем $\det[G_{ij}(t)] \neq 0$.

Общее решение линейной задачи Гильберта-Газемана (называемой также обобщенной задачей Гильберта, так как сводится к ней в особом случае $a(t) \equiv t$) принимает следующий вид

$$
(3) \qquad \Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{2\pi i} \displaystyle\int_L \frac{\varphi[\beta(\tau)]\,d\tau}{\tau - z}, & \text{для} \quad z \in S^+, \\ \dfrac{X(z)}{2\pi i} \displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - z} + X(z)P(z), & \text{для} \quad z \in S^-, \end{cases}
$$

где $\beta(t)$ обозначает функцию обратную по отношению к $a(t)$, $P(z)$ — колонкообразная матрица (колонна) n полиномов, $X(z)$ — так наз. каноническая матрица

$$
(4) \qquad X(z) = \begin{bmatrix} {}^1X_1(z) & {}^2X_1(z) & \dots & {}^nX_1(z) \\ {}^1X_2(z) & {}^2X_2(z) & \dots & {}^nX_2(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^1X_n(z) & {}^2X_n(z) & \dots & {}^nX_n(z) \end{bmatrix}
$$

колонны которой являются некоторыми решениями однородной задачи ([4], стр. 221), наконец $\varphi(t)$ — колонкообразная матрица, представляющая собой единственное непрерывное решение интегрального уравнения

$$
(5) \qquad \varphi(t) - \int_L N(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \{X^+[a(t)]\}^{-1} g(t) + P(t),
$$

причем ядро $N(t, \tau)$ представляет собой следующую диагональную матрицу

$$
(6) \qquad N(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{a'(\tau)}{a(\tau) - a(t)}\right] E,
$$

где E означает единичную матрицу.

Нелинейную задачу Гильберта-Газемана для одной неизвестной функции автор рассматривал в работах [5] и [6], а для системы n функций в особом случае диагональной матрицы $G(t)$ в работе [7], а затем совместно с З. Ройком, в работе [8]. Эти исследования касались краевых непрерывных задач.

В настоящей работе, которую автор посвящает памяти профессора Витольда Погожельского, дорогого и незабвенного научного покровителя, рассматривается нелинейная и разрывная краевая задача Гильберта-Газемана для системы функций в общем случае, квадратной матрицы $G(t)$. В работе используется теория функций класса $\mathfrak{H}$, разработанная проф. Погожельским в последние годы его жизни.

2. Определения и вспомогательные теоремы. Пусть L — означает кривую как в самом начале работы, причем касательная к этой кривой образует с некоторым установленным направлением угол, удовлетворяющий условию Гёльдера с показателем h_L, обозначения же $c_1, c_2, \dots, c_p$ $(p \geqslant 2)$

это некоторые определенные точки этой кривой, нумерированные последовательно, согласно с положительным ее направлением. Итак, получаем $L = \widehat{c_1 c_2} + \ldots + \widehat{c_p c_1}$ причем дуги $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$, $\sigma = 1, 2, \ldots, p$ ($\sigma' = \sigma + 1$ для $\sigma = 1, 2, \ldots, p-1$ а также $\sigma' = 1$ для $\sigma = p$) это направленные от c_σ до $c_{\sigma'}$ — дуги Ляпунова.

Определение (сравн. [9], стр. 202—205). Классом $\mathfrak{H}_\delta^\mu$ называем множество всех комплексных функций $\varphi(t)$ определенных и непрерывных в каждой точке $t \in L_0 = L - \sum_{\sigma=1}^{p} c_\sigma$, которые выполняют следующие неравенства

$$(7) \qquad \begin{gathered} |\varphi(t)| \prod_{\sigma=1}^{p} |t - c_\sigma|^\delta \leqslant \varrho, \\ [|t - c_\sigma| \, |t_1 - c_{\sigma'}|]^{\delta+\mu} \, |\varphi(t_1) - \varphi(t)| \leqslant \varkappa |t_1 - t|^\mu \end{gathered}$$

причем постоянные $\varkappa$ и ϱ могут принимать все положительные значения, а установленные для данного класса параметры δ и μ удовлетворяют условиям

$$(8) \qquad 0 \leqslant \delta < 1, \qquad 0 < \mu < 1, \qquad \delta + \mu < 1 .$$

Точки t и t_1 лежат внутри одной и той же произвольной дуги $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$; принимается, что $t_1 \in \widehat{t c_{\sigma'}}$.

Пусть комплексная функция $a(t)$, определенная для $t \in L$, отображает кривую L в себя взаимно однозначно с сохранением направления, причем отображение не изменяет положения точек $c_1, c_2, \ldots, c_p$, а кроме того, существует производная $a'(t)$, выполняющая условие Гёльдера

$$(9) \qquad |a'(t_1) - a'(t)| \leqslant K_a |t_1 - t|^h ,$$

где K_a — некоторая положительная постоянная, причем $0 < h \leqslant 1$. Вышеупомянутые предположения относительно функции $a(t)$, назовем положениями Z.

Обобщенная теорема Погожельского ([10]). *Если комплексная функция $f(t, \tau)$, определенная для $t, \tau \in L_0$ принадлежит к классу $\mathfrak{H}_\delta^\mu$ ($\delta > 0$), по отношению к переменной τ, и если эта функция удовлетворяет условию Гёльдера относительно переменной t, то следовательно*

$$(10) \qquad \begin{gathered} |f(t, \tau)| \prod_{\sigma=1}^{p} |\tau - c_\sigma|^\delta \leqslant \varrho , \\ |f(t, \tau) - f(t_1, \tau_1)| \, [|\tau - c_\sigma| \, |\tau_1 - c_{\sigma'}|]^{\delta+\mu} \leqslant \varkappa (|\tau - \tau_1|^\mu + |t - t_1|^{\mu_1}) \end{gathered}$$

причем постоянные δ и μ выполняют условия (8), $0 < \mu < \mu_1 \leqslant 1$, *а комплексная функция $a(t)$ выполняет положения Z, то функция $F(t)$, опре-*

деленная в множестве L_0 сингулярным интегралом в смысле главного значения Коши

$$F(t) = \int_L \frac{f(t,\tau)\,d\tau}{\tau - a(t)} \tag{11}$$

принадлежит к классу $\mathfrak{H}_\delta^\mu$, причем выполняются неравенства

$$\begin{gathered} |F(t)| \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^\delta \leqslant C_1 \varrho + C_2 \varkappa, \\ |F(t_1)-F(t)| [|t-c_\sigma||t_1-c_{\sigma'}|]^{\delta+\mu} \leqslant (C_3\varrho + C_4\varkappa)|t_1-t|^\mu, \end{gathered} \tag{12}$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 некоторые положительные постоянные, независимые от функции $f(t,\tau)$.

Подчеркивается, что неравенства (10) и (12) касаются точек τ, τ_1 либо t, t_1, лежащих внутри одной и той же дуги с оговорками, принятыми при определении класса $\mathfrak{H}_\delta^\mu$.

В случае $a(t) \equiv t$, теорема сводится к известной теореме Погожельского о сохранении класса $\mathfrak{H}_\delta^\mu$ сингулярным интегралом в смысле главного значения Коши (сравн. [9], стр. 143—151 и 205, раб. [11], [12]).

Лемма 1. *Если элементы матрицы $G(t)$, выступающей в краевом условии (1), выполняют условие Гёльдера с показателем h_G, функция $a(t)$ выполняет положения Z, причем $h < h_G$, показатель же Ляпунова h_L кривой L выполняет условие $h_L \geqslant \frac{1}{2}$, то краевые значения элементов канонической матрицы (4) удовлетворяют условиям Гёльдера в следующем виде:*

$$\begin{gathered} |{}^\beta X_\nu^-(t) - {}^\beta X_\nu^-(t_1)| \leqslant K_X |t-t_1|^{\frac{1}{2}h}, \quad |{}^\beta X_\nu^-[a(t)] - {}^\beta X_\nu^-[a(t_1)]| \leqslant K_X|t-t_1|^{\frac{1}{2}h}, \\ |{}^\beta X_\nu^+(t) - {}^\beta X_\nu^+(t_1)| \leqslant K_X |t-t_1|^{\frac{1}{2}h}, \quad |{}^\beta X_\nu^+[a(t)] - {}^\beta X_\nu^+[a(t_1)]| \leqslant K_X|t-t_1|^{\frac{1}{2}h} \end{gathered} \tag{13}$$

$$(\nu, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

причем K_X — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Вследствие того, что колонны ${}^\beta X(z)$, $\beta = 1, 2, \ldots, n$, представляют собой решения однородной задачи Гильберта-Газемана, то краевые значения ${}^\beta X^-(t)$ каждой из них выполняют следующее матричное интегральное уравнение

$${}^\beta X^-(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[G^{-1}(t)G(\tau)\frac{a'(\tau)}{a(\tau)-a(t)} - \frac{E}{\tau - t}\right]{}^\beta X^-(\tau)\,d\tau = {}^\beta\gamma(t) \tag{14}$$

(сравн. [4], стр. 208), где ${}^\beta\gamma(z)$ обозначает колонну главных частей колонны ${}^\beta X(z)$ на бесконечности. Записывая ядро уравнения (14) в виде

$$\frac{K(t,\tau)}{\tau - t}, \tag{15}$$

где $K(t,\tau)$ — соответствующая квадратная матрица, констатируем, что элементы этой матрицы выполняют условие Гёльдера по отношению к обеим переменным t, τ, с показателем h; кроме того, $K(t,t)$ — нулевая матрица. На основании известной леммы (напр. [9], стр. 51—53), ядро уравнения (14) можно представить в виде

$$\frac{H(t,\tau)}{|t-\tau|^{1-\frac{1}{2}h}}, \tag{16}$$

причем элементы матрицы $H(t,\tau)$ выполняют условие Гёльдера с показателем $\frac{1}{2}h$. Так как колонна ${}^{\beta}X(t)$ — непрерывна, то на основании известных свойств слабо-особенных интегралов (напр. [9], стр. 54), интегральная компонента, выступающая в уравнении (14) выполняет условие Гёльдера с показателем $\frac{1}{2}h$, а ввиду того, что матрицы ${}^{\beta}\gamma(t)$ выполняют условие Липшица, то окончательно матрица ${}^{\beta}X^{-}(t)$ выполняет условие Гёльдера с показателем $\frac{1}{2}h$, что доказывает первое из неравенств (13). Остальные неравенства (13) вытекают из зависимости ${}^{\beta}X^{+}[a(t)]=G(t)\,{}^{\beta}X^{-}(t)$ а также из свойств функции $a(t)$, которая, аналогично как функция обратная к ней $\beta(t)$, выполняет условие Липшица. Подбирая, затем, соответсвенно положительную постоянную K_X, получаем условия (13).

Лемма 2 ([13], стр. 146, [5]). *Если функция $a(t)$ и кривая L выполняют предположения леммы 1, то элементы $N_{kk}(t,\tau)$, $k=1,2,\dots,n$, ядра (6) получают следующую оценку*

$$|N_{kk}(t,\tau)|<\frac{M_N}{|\tau-t|^{1-h}} \tag{17}$$

а, кроме того, их можно представить в виде

$$N_{kk}(t,\tau)=\frac{N_{kk}^{*}(t,\tau)}{|\tau-t|^{1-\frac{1}{2}h}}, \tag{18}$$

где функции $N_{kk}^{*}(t,\tau)$ выполняют условие Гёльдера по отношению к обеим переменным с показателем $\frac{1}{2}h$.

3. Нелинейная и разрывная задача Гильберта-Газемана.

Задача. Определить колонкообразную матрицу $\Phi(z)$ с элементами $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z),\dots,\Phi_n(z)$, голоморфными отдельно в областях S^{+} и S^{-}, краевые значения которой удовлетворяют в каждой точке $t\in L_0=L-\sum_{\sigma=1}^{p}c_\sigma$ следующему условию

$$\Phi^{+}[a(t)]=G(t)\Phi^{-}(t)+ \tag{19}$$
$$+F\{t,\Phi_1^{+}[a(t)],\Phi_1^{+}(t),\Phi_1^{-}[a(t)],\Phi_1^{-}(t),\dots,\Phi_n^{+}[a(t)],\Phi_n^{+}(t),\Phi_n^{-}[a(t)],\Phi_n^{-}(t)\},$$

где $G(t)$ — данная матрица вида (2), $F(t,u_1,\dots,u_{4n})$ — данная колонна с n элементами, а $a(t)$ — данная комплексная функция; требуем, кроме того, чтобы в достаточно малых окрестностях точек $c_1, c_2, \ldots, c_p$ выполнялись для каждого $z \in S^+$ а также $z \in S^-$ следующие оценки

$$|\Phi_k(z)| < \frac{\mathrm{const}}{|z-c_\sigma|^\delta} \qquad (k=1,2,\ldots,n;\ \sigma=1,2,\ldots,p) \tag{20}$$

где δ — некоторое положительное число меньше единицы.

Примем следующие предположения:

I. Линия L является кривой Жордана-Ляпунова направленной положительно по отношению к ограниченной области S^+ и является краем этой области, причем показатель Ляпунова этой кривой — h_L удовлетворяет условию $\frac{1}{2} \leqslant h_L \leqslant 1$.

II. Комплексная функция $\alpha(t)$ выполняет предположения Z.

III. Матрица $G(t)$ не особенная, причем ее элементы удовлетворяют условию Гёльдера с показателем h_G, $h < h_G \leqslant 1$, где h — показатель Гёльдера производной $\alpha'(t)$.

IV. Элементы матрицы $F(t, u_1, \ldots, u_{4n})$ определяются в области $\Omega\{t \in L_0;\ |u_i| < \infty,\ i=1,2,\ldots,4n\}$ причем удовлетворяют следующим условиям

$$|F_k(t, u_1, \ldots, u_{4n})| \leqslant \frac{M_F}{\prod\limits_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^\delta} + k_F \sum_{i=1}^{4n} |u_i| \tag{21}$$

а также

$$\begin{aligned} &|F_k(t, u_1, \ldots, u_{4n}) - F_k(t_1, u_1', \ldots, u_{4n}')| \\ &\leqslant \frac{k_F'|t-t_1|^h}{[|t-c_\sigma|\,|t_1-c_{\sigma'}|]^{\delta+h}} + k_F \sum_{i=1}^{4n} |u_i - u_i'| \qquad (k=1,2,\ldots,n), \end{aligned} \tag{22}$$

M_F, k_F' и k_F — некоторые положительные постоянные, $\delta > 0$ и $h > 0$, это те же самые постоянные, как и в предположениях II и III, причем $\delta + h < 1$, точки t и t_1 лежат на той же самой, произвольной дуге $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$, $t_1 \in \widehat{tc_{\sigma'}}$.

Ввиду принятых предположений (21) и (22), поставленную нелинейную задачу следует причислить к разрывным задачам, причем $c_1, c_2, \ldots, c_p$ могут быть точками разрывности.

В оссбом случае $\alpha(t) \equiv t$, поставленная задача сводится к нелинейной и разрывной задаче Гильберта для системы функций, которая исследовалась автором в работах [14] и [15].

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема. *Если выполняются предположения* I—IV, *и, кроме того, если постоянная* k_F *достаточно мала, то поставленная нелинейная и разрывная краевая задача Гильберта-Газемана имеет, по крайней мере, одно решгние.*

4. Сведение задачи к интегральному уравнению. Решение поставленной задачи будем искать под видом (3) с неизвестной колонной $\varphi(t)$ класса $\mathfrak{H}_\delta^{h_*}$, где h_* — число произвольно установленное внутри интервала $(0, \frac{1}{2}h)$, а $P(z)$ — колонна целых функций, которые в особом случае могут быть полиномами.

Ввиду (5), колонна $\varphi(t)$ должна быть решением интегрального уравнения

$$\varphi(t)-\int_L N(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=\{X^+[a(t)]\}^{-1}F(t,u_1,\ldots,u_{4n})+P(t)\equiv \mathbf{T}[\varphi(t)] \tag{23}$$

в классе функций $\mathfrak{H}_\delta^{h_*}$, причем определяется

$$u_{4l-3}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left({}^kX_l^+[a(t)]\varphi_k(t)+\frac{{}^kX_l^+[a(t)]}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau-a(t)}d\tau\right),$$

$$u_{4l-2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left({}^kX_l^+(t)\varphi_k[\beta(t)]+\frac{{}^kX_l^+(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau-t}d\tau\right),$$

$$u_{4l-1}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left({}^kX_l^-[a(t)]\varphi_k[a(t)]-\right.$$
$$\left.-\frac{{}^kX_l^-[a(t)]}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-a(t)}d\tau-2\,{}^kX_l^-[a(t)]P_k[a(t)]\right), \tag{24}$$

$$u_{4l}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left({}^kX_l^-(t)\varphi_k(t)-\frac{{}^kX_l^-(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-t}d\tau-2\,{}^kX_l^-(t)P_k(t)\right)$$
$$(l=1,2,\ldots,n).$$

Заметим, что интегральное уравнение (23) сингулярное, принимая во внимание сингулярные интегралы, выступающие в аргументах функции F_k, хотя ядро уравнения слабо-особенное, на что указывает оценка (17). Интересным свойством уравнения (23) является и то, что элементы неизвестной колонны φ выступают в уравнении для различных значений аргумента: t, $a(t)$ и $\beta(t)$. Этот факт не имел бы места, еслибы функции F_k, представляющие собой нелинейный член в краевом условии, зависели лишь от этих краевых значений функций $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$, которые выступают в краевом условии соответствующей однородной задачи.

Ввиду того, что однородное уравнение

$$\varphi(t)-\int_L N(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=0 \tag{25}$$

обладает только нулевым решением (сравн. [4], стр. 214), то в силу первой теорему Фредгольма, уравнение (23) равносильно следующему уравнению

$$\varphi(t)=\mathbf{T}[\varphi(t)]+\int_L R(t,\tau)\mathbf{T}[\varphi(\tau)]d\tau\equiv\mathbf{A}[\varphi(t)] \tag{26}$$

где колонна $\mathbf{T}[\varphi(t)]$ определяется тождеством (23) и формулами (24), а $R(t,\tau)$ — диагональная матрица с элементами $R_{kk}(t,\tau)$, $k=1,2,\ldots,n$, выражающимися известным образом итерированными ядрами $N_{kk}(t,\tau)$, а также резольвентой ограниченного ядра.

5. Исследование уравнения (26) по методу Погожельского опирающемуся на теорему Шаудера. Существование решений уравнения (26) исследуем опираясь на следующую теорему Шаудера: *если в пространстве Банаха Λ непрерывная операция преобразовывает замкнутое, выпуклое и компактное множество E в его подмножество, то существует, по крайней мере, одна инвариантная точка этой операции, принадлежащая к множеству E* ([16], стр. 171—180, [17], стр. 28 и 178—185).

Для этой цели рассматриваем функциональное пространство Λ, состоящее из всех систем $[\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)]$ комплексных и непрерывных функций в области L_0 выполняющих условие

$$(27)\qquad \max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup_{t\in L_0}\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}|\varphi_k(t)|<\infty$$

причем δ — постоянная, выступающая в предположении IV, а h_* — число произвольно установленное внутри интервала $(0,\frac{1}{2}h)$. Обыкновенным образом определяем сумму точек этого пространства, и произведение точки на число. Норма $\|U\|$ точки $U[\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)]$ пространства Λ определяется формулой

$$(28)\qquad \|U\|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup_{t\in L_0}\Big[\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}|\varphi_k(t)|\Big]$$

расстояние же $r(U,V)$ точек U и V как норму их разности.

Определенное таким образом пространство Λ является пространством Банаха.

Рассмотрим далее в пространстве Λ множество $Z(\varkappa,\varrho)$, состоящее из всех систем $U[\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)]$ n функций класса $\mathfrak{H}_\delta^{h_*}$, которые выполняют следующие неравенства

$$(29)\qquad \begin{gathered}\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta}\,|\varphi_k(t)|\leqslant\varrho\,,\\ \big[|t-c_\sigma|\,|t-c_{\sigma'}|\big]^{\delta+h_*}|\varphi_k(t)-\varphi_k(t_1)|\leqslant\varkappa|t-t_1|^{h_*}\qquad(k=1,2,\ldots,n)\end{gathered}$$

причем положительные постоянные ϱ и $\varkappa$ избираем произвольно.

Множество $Z(\varkappa,\varrho)$ разумеется замкнуто, выпукло и компактно (сравн. [18]).

Учитывая вид уравнения (26), преобразовываем множество $Z(\varkappa,\varrho)$ при помощи следующей операции

$$(30)\qquad \psi(t)=\mathbf{A}[\varphi(t)]\,,$$

которая подчиняет каждой точке $[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)]$ множества $Z(\varkappa, \varrho)$ точку $[\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)]$ некоторого множества Z'.

Докажем, что если только коэффициент k_F достаточно мал, то всегда можно так подобрать $\varrho = \varrho_0$, а также $\varkappa = \varkappa_0$, чтобы множество Z' было подмножеством множества $Z(\varkappa, \varrho)$.

Так как функции $\varphi_k[\beta(t)]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, выполняют следующие условия

$$(31)\qquad \begin{gathered} \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^\delta |\varphi_k[\beta(t)]| \leqslant A_1 \varrho\,, \\ [|t-c_\sigma|\,|t_1-c_{\sigma'}|]^{\delta+h_*}|\varphi_k[\beta(t)]-\varphi_k[\beta(t_1)]| \leqslant A_1 \varkappa |t_1-t|^{h_*}\,, \end{gathered}$$

где $A_1 \geqslant 1$ — некоторая постоянная, независимая от функции φ_k, а лишь от функции $\beta(t)$, кривой L и постоянных δ и h_*, то ввиду (23), предположения IV, формул (24), а также обобщенной теоремы Погожельского, элементы $\mathbf{T}_k[\varphi(t)]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, колонны $\mathbf{T}[\varphi(t)]$ выполняют следующие условия:

$$(32)\qquad \begin{gathered} \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^\delta |\mathbf{T}_k[\varphi(t)]| \leqslant A_2 M_P + A_3 M_P k_F + A_4 M_F + A_5 k_F(\varrho+\varkappa)\,, \\ [|t-c_\sigma|\,|t_1-c_{\sigma'}|]^{\delta+h_*}|\mathbf{T}_k[\varphi(t)]-\mathbf{T}_k[\varphi(t_1)]| \\ \leqslant [A_6 K_P + A_7 M_P k_F + A_8 k_F' + A_9 M_F + A_{10} K_P k_F + A_{11} k_F(\varrho+\varkappa)]|t_1-t|^{h_*}\,. \end{gathered}$$

$A_2, A_3, \ldots, A_{11}$ это некоторые положительные постоянные, независимые от точки множества $Z(\varkappa, \varrho)$, а лишь от параметров задачи: натурального числа n, функции $\beta(t)$, кривой L и постоянных δ и h_*; эта зависимость может быть непосредственная или посредственная: через свойства краевых значений элементов канонической матрицы и обратной к ней (в особенности же от верхних граней и коэффициентов Гёльдера), а также постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4, которые выступают в оценках (12).

M_P — это наибольшая из верхних граней модулей элементов колонны $P(t)$, а K_P — наибольший из коэффициентов Гёльдера с показателем h_*, этих элементов.

Ввиду (30), (26) и (32), получаем

$$(33)\qquad \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^\delta |\psi_k(t)| \leqslant [A_2 M_P + A_3 M_P k_F + A_4 M_F + A_5 k_F(\varrho+\varkappa)] M_R\,,$$

где

$$(34)\qquad M_R = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left(1 + \sup_{t\in L} \prod_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^\delta \int_L \frac{|R_{kk}(t,\tau)|}{\prod_{\sigma=1}^{p}|\tau-c_\sigma|^\delta}\, dl_\tau\right).$$

Отметим, что существование верхних граней, выступающих в формуле (34) вытекает из оценки модулей $|R_{kk}(t,\tau)|$, которые обладают для $\tau \to t$ слабыми особенностями такими, как ядро уравнения (сравн. (17)), а затем из известных оценок, касающихся интегралов со слабой особенностью (напр. [19], стр. 70).

Так как элементы $\psi_k(t)$ колонны (30) выполняют уравнения

$$(35) \qquad \psi_k(t) - \int_L N_{kk}(t,\tau)\psi_k(\tau)d\tau = \mathsf{T}_k[\varphi(t)] \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

то ввиду (32) и (33) получаем следующее неравенство

$$(36) \qquad [|t-c_\sigma|\,|t_1-c_{\sigma'}|]^{\delta+h_\bullet}\,|\psi_k(t_1)-\psi_k(t)| \leqslant \{[A_2M_P+A_3M_Pk_F+A_4M_F+A_5k_F(\varrho+\varkappa)]M_RN_0+ + [A_6K_P+A_7M_Pk_F+A_8k'_F+A_9M_F+A_{10}K_Pk_F+A_{11}k_F(\varrho+\varkappa)]\}\,|t_1-t|^{h_\bullet},$$

где

$$(37) \qquad N_0 = \max_{1\leqslant k<n}\sup_{t,t_1}\int_L \frac{|N_{kk}(t_1,\tau)-N_{kk}(t,\tau)|[|t-c_\sigma|\,|t_1-c_{\sigma'}|]^{\delta+h_\bullet}}{|t_1-t|^{h_\bullet}\prod\limits_{\sigma=1}^{p}|\tau-c_\sigma|^\delta}\,dl_\tau$$

причем, как обычно, точки t и t_1 лежат внутри произвольной, но одной и той же дуги $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$, а сверх того $t_1 \in \widehat{tc_{\sigma'}}$. Существование верхних граней, выступающих в формуле (37) вытекает из возможности представления ядер $N_{kk}(t,\tau)$ в виде (18), а также из известных, вышеупомянутых свойств интегралов со слабой особенностью.

Выводя обозначения

$$B_1 = A_2M_R,\quad B_2 = A_3M_R,\quad B_3 = A_4M_R,\quad B_4 = A_5M_R,\quad B_5 = A_2M_RN_0,$$
$$B_6 = A_3M_RN_0+A_7,\quad B_7 = A_4M_RN_0+A_9,\quad B_8 = A_5M_RN_0+A_{11}$$

получаем из оценок (33) и (36) следующие условия, достаточные для того, чтобы множество Z' являлось подмножеством множества $Z(\varkappa,\varrho)$:

$$(38) \qquad \begin{gathered} B_1M_P+B_2M_Pk_F+B_3M_F+B_4k_F(\varrho+\varkappa) \leqslant \varrho, \\ B_5M_P+B_6M_Pk_F+B_7M_F+A_6K_P+A_8k'_F+A_{10}K_Pk_F+B_8k_F(\varrho+\varkappa) \leqslant \varkappa. \end{gathered}$$

Элементарное исследование системы неравенств (38) приводит к заключению, что если выполняется условие

$$(39) \qquad k_F < \frac{1}{B_4+B_8},$$

то можно так подобрать два положительных числа $\varrho = \varrho_0$ и $\varkappa = \varkappa_0$, чтобы выполнилась система (38). Разумеется, что пар $(\varkappa_0, \varrho_0)$, выполняющих систему (38) бесконечно много.

Одной из таких пар является следующая

$$(40)\qquad \varrho_0=\frac{Q_1(1-B_8k_F)+Q_2B_4k_F}{1-(B_4+B_8)k_F},\qquad \varkappa_0=\frac{Q_1B_8k_F+Q_2(1-B_4k_F)}{1-(B_4+B_8)k_F},$$

где обозначается

$$(41)\qquad \begin{aligned} Q_1&=B_1M_P+B_2M_Pk_F+B_3M_F,\\ Q_2&=B_5M_P+B_6M_Pk_F+B_7M_F+A_6K_P+A_8k'_F+A_{10}K_Pk_F.\end{aligned}$$

Итак, можем утверждать, что если выполнено условие (39), то множество Z' является подмножеством множества $Z(\varkappa_0,\varrho_0)$, где $\varkappa_0$ и ϱ_0 определены формулами (40).

Докажем, что преобразование (30) непрерывное.

Пусть $\{U_m\}$, $m=1,2,\dots$ — произвольная последовательность точек $U_m[\varphi_1^{(m)}(t),\dots,\varphi_n^{(m)}(t)]$ множества $Z(\varkappa_0,\varrho_0)$, сходящаяся в смысле нормы (28) к некоторой точке $U[\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)]$ этого множества; итак, получаем

$$(42)\qquad \lim_{m\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup_{t\in L_0}\Big[\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}|\varphi_k^{(m)}(t)-\varphi_k(t)|\Big]=0.$$

Докажем, что последовательность преобразованных точек $V_m[\psi_1^{(m)}(t),\dots$ $\dots,\psi_n^{(m)}(t)]$, $m=1,2,\dots$, где $\psi_k^{(m)}(t)=\mathbf{A}_k[\varphi^{(m)}(t)]$, $k=1,2,\dots,n$, причем $\mathbf{A}_k[\varphi^{(m)}(t)]$ это элементы колонны стоящей по правой стороне равенства (30), является сходящейся в смысле нормы (28) к точке $V[\psi_1(t),\dots,\psi_n(t)]$ являющейся образом точки $U[\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)]$ в преобразовании (30).

В силу (30) и (26) получаем

$$(43)\qquad \begin{aligned}&|\psi_k^{(m)}(t)-\psi_k(t)|\\ &\leqslant|\mathbf{T}_k[\varphi^{(m)}(t)]-\mathbf{T}_k[\varphi(t)]|+\Big|\int_L R_{kk}(t,\tau)\{\mathbf{T}_k[\varphi^{(m)}(\tau)]-\mathbf{T}_k[\varphi(\tau)]\}\,d\tau\Big|\\ &\qquad\qquad (k=1,2,\dots,n)\end{aligned}$$

принимая же во внимание формулы (23), (24) и неравенство (22), получаем следующую оценку:

$$(44)\qquad \begin{aligned}&\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}|\mathbf{T}_k[\varphi^{(m)}(t)]-\mathbf{T}_k[\varphi(t)]|\\ &\leqslant D_1k_F\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}\sum_{k=1}^{n}\Big\{|\varphi_k^{(m)}(t)-\varphi_k(t)|+\\ &\quad+|\varphi_k^{(m)}[\beta(t)]-\varphi_k[\beta(t)]|+|\varphi_k^{(m)}[\alpha(t)]-\varphi_k[\alpha(t)]|+\\ &\quad+\Big|\int_L\frac{\varphi_k^{(m)}(\tau)-\varphi_k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\Big|+\Big|\int_L\frac{\varphi_k^{(m)}(\tau)-\varphi_k(\tau)}{\tau-\alpha(t)}\,d\tau\Big|+\\ &\quad+\Big|\int_L\frac{\varphi_k^{(m)}[\beta(\tau)]-\varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau\Big|+\Big|\int_L\frac{\varphi_k^{(m)}[\beta(\tau)]-\varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau-\alpha(t)}\,d\tau\Big|\Big\},\end{aligned}$$

где D_1 — положительная постоянная, зависимая от свойства канонической матрицы (4).

Из предложения II вытекает, что

$$0 < \inf_{t \in L_0} \frac{\prod_{\sigma=1}^{p} |t - c_\sigma|^{\delta + h_*}}{\prod_{\sigma=1}^{p} |a(t) - c_\sigma|^{\delta + h_*}} \leqslant \sup_{t \in L_0} \frac{\prod_{\sigma=1}^{p} |t - c_\sigma|^{\delta + h_*}}{\prod_{\sigma=1}^{p} |a(t) - c_\sigma|^{\delta + h_*}} < \infty. \tag{45}$$

Принимая во внимание (42) и (45) констатируем, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число M'_ε, что верхняя грань относительно t суммы первых $3n$ слагаемых, стоящих по правой стороне неравенства (44) меньше $\varepsilon/3M_0$, если $m > M'_\varepsilon$, причем

$$M_0 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + \sup_{t \in L} \prod_{\sigma=1}^{p} |t - c_\sigma|^{\delta + h_*} \int_L \frac{|R_{kk}(t, \tau)|}{\prod_{\sigma=1}^{p} |\tau - c_\sigma|^{\delta + h_*}} \, dl_\tau \right). \tag{46}$$

Существование верхних граней, выступающих в определении числа M_0, доказывается подобным образом, как существование верхних граней, выступающих в формуле (34).

С целью исследования интегральных слагаемых, стоящих по правой стороне неравенств (44), разбиваем выступающие в них сингулярные интегралы, а именно:

$$\int_L \frac{\varphi_k^{(m)}(\tau) - \varphi_k(\tau)}{\tau - t} \, d\tau \equiv \int_l \frac{\varphi_k^{(m)}(\tau) - \varphi_k^{(m)}(t)}{\tau - t} \, d\tau + \int_l \frac{\varphi_k(t) - \varphi_k(\tau)}{\tau - t} \, d\tau + \\ + \varphi_k^{(m)}(t) \int_l \frac{d\tau}{\tau - t} - \varphi_k(t) \int_l \frac{dt}{\tau - t} + \int_{L-l} \frac{\varphi_k^{(m)}(\tau) - \varphi_k(\tau)}{\tau - t} \, d\tau, \tag{47}$$

$$\int_L \frac{\varphi_k^{(m)}(\tau) - \varphi_k(\tau)}{\tau - a(t)} \, d\tau \equiv \int_l \frac{\varphi_k^{(m)}(\tau) - \varphi_k^{(m)}[a(t)]}{\tau - a(t)} \, d\tau + \int_l \frac{\varphi_k[a(t)] - \varphi_k(\tau)}{\tau - a(t)} \, d\tau + \\ + \varphi_k^{(m)}[a(t)] \int_l \frac{d\tau}{\tau - a(t)} - \varphi_k[a(t)] \int_l \frac{d\tau}{\tau - a(t)} + \int_{L-l} \frac{\varphi_k^{(m)}(\tau) - \varphi_k(\tau)}{\tau - a(t)} \, d\tau, \tag{48}$$

$$\int_L \frac{\varphi_k^{(m)}[\beta(\tau)] - \varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau - t} \, d\tau \equiv \int_l \frac{\varphi_k^{(m)}[\beta(\tau)] - \varphi_k^{(m)}[\beta(t)]}{\tau - t} \, d\tau + \\ + \int_l \frac{\varphi_k[\beta(t)] - \varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau - t} \, d\tau + \varphi_k^{(m)}[\beta(t)] \int_l \frac{d\tau}{\tau - t} - \\ - \varphi_k[\beta(t)] \int_l \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{L-l} \frac{\varphi_k^{(m)}[\beta(\tau)] - \varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau - t} \, d\tau, \tag{49}$$

$$(50)\quad \int\limits_{L} \frac{\varphi_k^{(m)}[\beta(\tau)]-\varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau-a(t)}\,d\tau \equiv \int\limits_{l} \frac{\varphi_k^{(m)}[\beta(\tau)]-\varphi_k^{(m)}(t)}{\tau-a(t)}\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{l} \frac{\varphi_k(t)-\varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau-a(t)}\,d\tau+\varphi_k^{(m)}(t)\int\limits_{l}\frac{d\tau}{\tau-a(t)}-\varphi_k(t)\int\limits_{l}\frac{d\tau}{\tau-a(t)}+$$

$$+\int\limits_{L-l} \frac{\varphi_k^{(m)}[\beta(\tau)]-\varphi_k[\beta(\tau)]}{\tau-a(t)}\,d\tau \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

где l — дуга, являющаяся частью одной из дуг $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$ и содержащей внутри себя точку t (в случае интегралов (47) и (49)) и точку $a(t)$ (в случае интегралов (48) и (50)). Предполагается, что длина дуги l не превосходит половины длины наиболее короткой из дуг $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$, а кроме того, что точка t (или соответственно $a(t)$) разделяет дугу l на две части одинаковой длины, если эта дуга лежит вместе с концами внутри дуги $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$. Если же один из концов дуги l совпадает с одним из концов дуги $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$, то предполагается, что длина дуги, соединяющей точку t (или соответственно $a(t)$) с общим концом дуг не больше длины остальной части дуги l.

Умножая тождества (47)-(50) сторонами на $D_1 k_F \prod\limits_{\sigma=1}^{p} |t-c_\sigma|^{\delta+h_\bullet}$ а затем используя оценки (29), неравенства (45) и учитывая свойства интегралов

$$(51)\qquad \int\limits_{l}\frac{d\tau}{\tau-t}, \qquad \text{а также} \qquad \int\limits_{l}\frac{d\tau}{\tau-a(t)},$$

которые стремятся к нулю, если длина $|l|$ дуги l, лежащей вместе с концами внутри одной из дуг $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$, стремится к нулю и которых модуль неограниченный, как $\big|\log|t-c_\sigma|\big|$, если длина $|l|$ стремится к нулю, а один из концов дуги l совпадает с концом c_σ, приходим к заключению, что верхняя грань суммы $12n$ слагаемых правой стороны неравенств (44), которые происходят от первых четырех слагаемых каждого из представлений (47)-(50), меньше $k_F D_2 |l|^{h_\bullet}$, где D_2 — положительная постоянная. Отсюда вытекает, что верхняя грань суммы исследуемых $12n$ слагаемых меньше чем $\varepsilon/3M_0$, если только длина дуги l, которая не зависит от $t\in L_0$, является достаточно малой, подобрана к ε.

Если длина дуги l уже установлена, заметим, что остальные слагаемые, выступающие по правой стороне неравенств (44), и происходящие от последних членов в разложениях (47)-(50), содержат интегралы слабо особенные, так как t (или соответственно $a(t)$), лежит вне области интегрирования. Умножая и деля под знаком каждого из этих интегралов на $\prod\limits_{\sigma=1}^{p}|\tau-c_\sigma|^{\delta+h_\bullet}$ в представлении (47) и (48) или на $\prod\limits_{\sigma=1}^{p}|\beta(\tau)-c_\sigma|^{\delta+h_\bullet}$ в представлении (49) и (50), а затем используя неравенства (45) констатируем, что верхняя грань суммы исследуемых слагаемых имеет либо мажоранту вида

$$(52)\qquad k_F\frac{D_3}{|l|}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup_{t\in L_0}\Big[\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}|\varphi_k^{(m)}(t)-\varphi_k(t)|\Big]$$

когда дуга l лежит вместе с концами внутри одной из дуг $\widehat{c_\sigma c_{\sigma'}}$, либо мажоранту вида

$$(53)\qquad k_F\frac{D_4}{|l|}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup_{t\in L_0}\Big[\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}|\varphi_k^{(m)}(t)-\varphi_k(t)|\Big]\times$$
$$\times\Big(1+|l|\sup_{t\in L_0}\int_{l_0}\frac{|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}dl_\tau}{|\tau-c_\sigma|^{\delta+h_*}[|t-c_\sigma|+|\tau-c_\sigma|]}\Big)$$

где дуга $l_0\subset L$ имеет длину, равную длине дуги l и единственную общую с ней точку c_σ, в противоположном случае, когда один из концов дуги l совпадает с одной из точек c_σ, $\sigma=1,2,\ldots,p$, причем D_3 и D_4 — положительные постоянные. Так как интеграл, выступающий в мажоранте (53) имеет верхнюю грань, ограниченную положительным числом

$$(54)\qquad D_5\int_0^\infty\frac{dx}{x^{\delta+h_*}(1+x)},$$

где D_5 — постоянная, то ввиду условия (42) верхняя грань исследуемых слагаемых меньше чем $\varepsilon/3M_0$ если только $m>M_\varepsilon''$.

В результате, для произвольного числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M_\varepsilon=\max(M_\varepsilon', M_\varepsilon'')$, что

$$(55)\qquad \prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}|\mathbf{T}_k[\varphi^{(m)}(t)]-\mathbf{T}_k[\varphi(t)]|<\varepsilon/M_0,\qquad \text{если } m>M_\varepsilon.$$

Принимая во внимание оценку (43), оценку (54) и определение (46), констатируем, что

$$(56)\qquad \max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup_{t\in L_0}\prod_{\sigma=1}^{p}|t-c_\sigma|^{\delta+h_*}|\psi_k^{(m)}(t)-\psi_k(t)|<\varepsilon$$

если $m>M_\varepsilon$, что доказывает непрерывность преобразования (30).

На основании цитированной выше теоремы Шаудера, можем утверждать, что если выполняются предположения I-IV и условие (39), то уравнение (26), а следовательно также и эквивалентное ему уравнение (23), обладает, по крайней мере, одним решением в классе функции $\mathfrak{H}_\delta^{h^*}$.

6. Решение задачи. Подставляя решение уравнения (23) в формулу (3), получим колонкообразную матрицу $\Phi(z)$, элементами которой являются функции $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$, голоморфные отдельно в областях S^+ и S^-, которых краевые значения выполняют в каждой точке $t \in L_0$ краевое условие (19). На основании известных свойств функций класса $\mathfrak{H}_\delta^{h_*}$ вытекает затем, что функции $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$ выполняют условия (20), ([9], стр. 154 и 205), которые были поставлены в исследуемой краевой задаче. Итак, если выполнены предположения I-IV и, кроме того, условие (39), ограничивающее величину коэффициента k_F, то поставленная в работе нелинейная и разрывная краевая задача Гильберта-Газемана имеет, по крайней мере, одно решение, согласно теореме, приведенной в третьей части настоящей работы.

В заключение работы отметим, что если элементы колонны $P(z)$, выступающей в решении (3), являются полиномами, то можно провести дискуссию, касающуюся существования решений исследуемой задачи стремящихся к нулю, ограниченных, или-же имеющих определенный порядок на бесконечности. Упомянутая дискуссия протекает идентично, как в случае линейной задачи ([4], стр. 226—227, [5]).

Цитированная литература

[1] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва 1962.

[2] Н. П. Векуа, *Обобщенная краевая задача Гильберта для нескольких неизвестных функций*, Сообщения АН Груз. ССР 8 (9-10), (1947), стр. 577-584.

[3] — *Обобщенная краевая задача Гильберта для нескольких неизвестных функций*, Труды Тбилисского мат. инст. 16 (1948), стр. 81-103.

[4] — *Системы сингулярных интегральных уравнений*, Москва-Ленинград 1950.

[5] W. Żakowski, *Badanie nieliniowego zagadnienia Hilberta-Hasemana metodą Schaudera*, Prace Matemat. 9 (1965), str. 35-48.

[6] — *Rozwiązanie nieliniowego zagadnienia Hilberta-Hasemana metodą kolejnych przybliżeń*, Biul. WAT 6 (130) (1963), str. 67-80.

[7] — *O pewnym uogólnieniu zagadnienia Hilberta-Hasemana dla układu funkcji*, Zeszyty Naukowe Polit. Warsz., Matematyka 1, 1963, str. 89-101, streszcz.: *Problème aux limites d'Hilbert-Haseman généralisé*, Bull. Acad. Pol. Sci. 8 (1963), str. 511-515.

[8] Z. Rojek i W. Żakowski, *O pewnym zagadnieniu brzegowym dla układu funkcji analitycznych*, Biul. WAT 8 (132) (1963), str. 41-49.

[9] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. III, Warszawa 1960.

[10] W. Żakowski, *Uogólnienie twierdzenia Pogorzelskiego o funkcjach klasy* $\mathfrak{H}$, Biul. WAT 8 (132) (1963), str. 51-55.

[11] W. Pogorzelski, *Sur une propriété principale des fonctions discontinues de classe* $\mathfrak{H}$ *pour un système d'arcs*, Bull. Acad. Pol. Sci. 6 (1960), str. 359-364.

[12] — *Sur l'équation intégrale singulière non linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés*, Journ. of Math. and Mech. 7 (1958), str. 515-532.

[13] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Москва 1963.

[14] W. Żakowski, *Zagadnienie nieciągłe i nieliniowe Hilberta dla układu funkcji*, Biul. WAT 6 (106) (1961), str. 23-37, streszcz.: *Problème non linéaire et discontinu d'Hilbert pour le système de fonctions*, Bull. Acad. Pol. Sci. 7 (1961), str. 525-529.

[15] W. Żakowski, *Badanie uogólnionego zagadnienia Hilberta dla układu funkcji metodą kolejnych przybliżeń*, Prace Matemat. 8 (1963), str. 55-69.

[16] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930).

[17] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. II, Warszawa 1958.

[18] W. Żakowski, *Dowód zwartości pewnego zbioru funkcji klasy* $\mathfrak{H}$, Zeszyty Naukowe Polit. Warsz., Matematyka 2, str. 57-62.

[19] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. I, Warszawa 1953.

ОТДЕЛ СВЯЗИ, ВАРШАВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1963