ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1963)

Sur une nouvelle généralisation de la méthode des hyperboles tangentes pour la résolution des équations fonctionnelles non-linéaires définies dans l'espace de Banach

par BÉLA JANKÓ (Cluj)

Considérons la méthode classique de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

qui sert à la résolution de l'équation $f(x) = 0$, $f(x)$ étant une fonction de variable réelle ou complexe. Cette méthode a été généralisée par L. V. Kantorovitch [1] pour la résolution des équations opérationnelles non-linéaires $P(x) = 0$, définies dans l'espace de Banach X, de la manière uivante

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) \tag{1'}$$

où $x_n \in X$ $(n = 0, 1, \ldots)$ et $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ représente l'inverse de la première dérivée au sens Fréchet de l'opération P, $P'(x)$ étant une opération linéaire pour l'élément x_n fixé.

Nous devons remarquer qu'il y a des difficultés dans l'application effective de la méthode (1'). Il est difficile de vérifier l'existence des inverses Γ_n $(n = 0, 1, \ldots)$ et de délimiter convenablement leur norme. Le calcul effectif des inverses présente aussi des difficultés, parce qu'il est équivalent à la résolution de l'équation opérationnelle linéaire

$$P'(x_n)\xi_n = -P(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

pour chaque n, où $\xi_n = x_{n+1} - x_n$. Souvent les inverses Γ_n ne peuvent pas être calculés exactement.

Une autre généralisation de la méthode (1) a été donnée par M. Altman [2, 3], sous la forme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)y_n} y_n \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1''}$$

qui s'applique dans la résolution itérative des équations fonctionnelles non-linéaires $F(x) = 0$, définies dans l'espace X. Ici $F'(x_n)$ désigne la dérivée au sens Fréchet de la fonctionnelle $F(x)$ et la suite des elements $\{y_n\}$, $y_n \in X$ est choisie de telle manière qu'ils satisfont à la condition [2]

$$\text{(A)} \qquad |F'(x_n)y_n| = \|F'(x_n)\|, \quad \|y_n\| = 1 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Cette méthode est avantageuse parce qu'elle permet de résoudre les équations fonctionnelles dans les conditions moins réstrictives, sans supposer l'existence de l'inverse de la première derivée de Fréchet, en facilitant ainsi le calcul des approximations x_n.

1. Dans ce travail nous donnons une nouvelle méthode d'itération pour la résolution des équations fonctionnelles $F(x) = 0$. Considérons pour cette raison la méthode clasique des hyperboles tangentes [4, 5]

$$(2) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{2f'(x_n)f(x_n)}{2f'^2(x_n) - f''(x_n)f(x_n)}$$

où $f(x)$ est une fonction de variable réelle. Cette méthode a été généralisée par M. A. Mertvetzova [6] pour la résolution des équations opérationnelles $P(x) = 0$, sous la forme

$$(2') \qquad x_{n+1} = x_n - Q_n\Gamma_n P(x_n)$$

où

$$\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}, \quad Q_n = [I - 1/2\,\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)]^{-1}$$

et $P'(x_n)$, $P''(x_n)$ sont les dérivées de Fréchet de l'opération $P(x)$ calculées pour l'élément $x_n \in X$. Nous pouvons mettre en evidence que la rapidité de convergence de la méthode (2') est plus grande que celle de la méthode (1'). Au point de vue de l'existence des inverses Γ_n et Q_n, se pose le même problème que dans le cas de la méthode (1').

Nous cherchons à éviter l'utilisation des inverses par conséquent nous allons donner une nouvelle extension de la méthode des hyperboles tangentes, qui sert à la résolution des équations $F(x) = 0$. Cette méthode peut être donné par la formule

$$(2'') \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)y_n - \frac{1}{2}\frac{F''(x_n)y_n^2}{F'(x_n)y_n}F(x_n)}\,y_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

$F'(x_n)$, $F''(x_n)$ représentent les dérivées de Fréchet de l'ordre I et II pour l'élément $x_n \in X$; en outre les éléments $y_n \in X$ sont choisis de telle façon qu'ils remplissent la condition (A).

Avant d'énoncer le premier théorème nous allons donner quelques propriétés.

La fonctionelle $F(x)$ satisfait à la relation

$$\text{(I)} \qquad F'(x_n)(x_{n+1}-x_n)-\tfrac{1}{2}\frac{F''(x_n)(x_{n+1}-x_n)y_n}{F'(x_n)y_n}F(x_n) = -F(x_n)$$

qui se vérifie immédiatement en remplaçant $x_{n+1}-x_n$ par sa relation correspondante de la formule (2'').

On peut constater aussi par une vérification directe qu'il existe la relation de „commulativité" suivante, en appliquant la formule (2''),

$$\text{(II)} \quad F'(x_n)y_nF''(x_n)(x_{n+1}-x_n)^2 = F'(x_n)(x_{n+1}-x_n)F''(x_n)(x_{n+1}-x_n)y_n \, .$$

Grâce aux propriétés (I) et (II) il résulte que

$$\text{(3)} \quad \Phi'_n(x_n)(x_{n+1}-x_n) = 0\,, \qquad \Phi''_n(x_n)(x_{n+1}-x_n)^2 = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

où nous avons noté

$$\text{(4)} \quad \Phi_n(x) = L_nx - F(x)y_n + \tfrac{1}{2}\frac{F''(x_n)(x-x_n)y_n}{F'(x_n)y_n}F(x_n)y_n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

et

$$\text{(4')} \qquad L_n = F'(x_n)y_n - \tfrac{1}{2}\frac{F''(x_n)y_n^2}{F'(x_n)y_n}F(x_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots)\,.$$

En ce qui suit nous donnons des conditions de l'existence et de convergence, qui constitute l'object du présent mémoire.

THÉORÈME 1. *Supposons que, pour l'approximation initiale x_0, les conditions suivantes soient remplies*:

1° *Pour la dérivée de Fréchet $F'(x_0)$ il existe la délimitation*

$$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0 < +\infty$$

et en outre la condition (A) *est aussi satisfaite où les approximations sont calculées succesivement par la formule* (2'').

2° *Nous avons l'inégalité*

$$\frac{|F(x_0)|}{\left|F'(x_0)y_0 - \tfrac{1}{2}\dfrac{F''(x_0)y_0^2}{F'(x_0)y_0}F(x_0)\right|} \leqslant \eta_0 < +\infty\,.$$

3° *Nous supposons que les dérivées de Fréchet $F''(x)$, $F'''(x)$ existent et sont bornées*

$$\|F''(x)\| \leqslant K < +\infty\,, \qquad \|F'''(x)\| \leqslant N < +\infty$$

pour toutes les $x \in S(x_0, r)$, où $S(x_0, r)$ est une sphère définie dans l'espace X, ayant le centre x_0 et le rayon $r = 2\eta_0$, qui est définie par l'inégalité $\|x-x_0\| \leqslant 2\eta_0$.

4° *Nous supposons enfin que*

$$h_0 = B_0\eta_0 K \leqslant \tfrac{1}{2}$$

et

$$R_0 = \left[\frac{N}{K^2 B_0}(2+h_0)+3\right](1+h_0) \leqslant 9\,.$$

Alors, si les conditions 1°-4° *sont remplies, l'équation fonctionnelle* $F(x) = 0$ *admet une solution* $x^* \in S(x_0, r)$ *et les approximations* x_n *calculées par la formule* (2″) *tendent vers* x^* *et la rapidité de convergence est caractérisée par l'inégalité*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0\,.$$

Démonstration. Nous montrons que les conditions 1°-4° restent remplies si on remplace l'approximation initiale x_0 par x_1.

a) L'inégalité

$$\|F'(x_1)\| \geqslant \|F'(x_0)\|\left(1 - \frac{\|F'(x_0)-F'(x_1)\|}{\|F'(x_0)\|}\right)$$

et la formule de Lagrange généralisée entraînent [2]

$$\|F'(x_1)\| \geqslant \|F'(x_0)\|(1-B_0K\eta_0) = \|F'(x_0)\|(1-h_0)$$

ou

$$\frac{1}{\|F'(x_1)\|} \leqslant \frac{B_0}{1-h_0} = B_1 < 2B_0\,. \tag{5}$$

Ainsi la condition 1° a lieu pour l'approximation x_1.

b) Nous avons besoin de quelques délimitations convenables. Considérons la formule de Taylor généralisée pour l'opération $\Phi_0(x)$ définie par (4),

$$\|\Phi_0(x_1)-\Phi_0(x_0)-\Phi_0'(x_0)(x_1-x_0)-\tfrac{1}{2}\Phi_0''(x_0)(x_1-x_0)^2\| \leqslant \tfrac{1}{6}\|\Phi_0'''(\zeta_0)\|\|x_1-x_0\|^3 \tag{6}$$

où $\zeta_0 = x_0+\theta_0(x_1-x_0)$ et $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. En tenant compte des formules (6), (4), (3), (2″), (4′) et des conditions 1°-4° il résulte que

$$\left|\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{F''(x_0)(x_1-x_0)y_0}{F'(x_0)y_0}\right)F(x_1)\right| \leqslant \tfrac{1}{12}[N(2+h_0)+3B_0K^2]\eta_0^3$$

c'est-à-dire

$$|F(x_1)| \leqslant \frac{N(2+h_0)+3B_0K^2}{12(1-h_0/2)}\,\eta_0^3\,. \tag{7}$$

Les formules (5) et (7) entraînent

$$\frac{|F(x_1)|}{\|F'(x_1)\|} \leqslant \frac{[N(2+h_0)+3B_0K^2]}{12(1-h_0)(1-h_0/2)}\,B_0\eta_0^3 = \delta_1\,. \tag{7'}$$

En utilisant cette inégalité et la condition 3° nous obtenons

$$\left|\frac{F(x_1)}{L_1}\right| = \eta_1 \leqslant \frac{\delta_1}{1-B_0K\delta_1}, \tag{8}$$

et puis en vertu de la relation (7′) et de la condition 5° nous pouvons établir facilement les inégalites

$$\eta_1 \leqslant 2h_0^2\eta_0 \leqslant \eta_0/2 .$$

Par conséquent la condition 2° est remplie pour x_1.

c) La condition 3° est aussi satisfaite parce que nous verrons à la fin de cette démonstration que x_1, $\zeta_0 \in S(x_0, 2\eta_0)$.

d) Nous obtenons par les inégalites (8) et (5)

$$h_1 \leqslant 4h_0^3 \leqslant h_0 \leqslant \tfrac{1}{2} \tag{9}$$

ainsi la condition 4° est aussi remplie.

e) Enfin par les relations $B_1 > B_0$ et $h_1 \leqslant h_0$ nous pouvons établir l'inégalité $R_1 < R_0$.

Ainsi les conditions 1°-5° restent valables pour l'approximation x_1 où les quantités B_0, η_0, h_0, R_0 ont été remplacées par B_1, η_1, h_1, R_1. Cette situation nous permet de continuer la détermination successive des approximations x_n et nous pouvons donner pour les quantités B_n, η_n, h_n, R_n, les délimitations

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1-h_{n-1}} > B_{n-1} , \tag{10}$$

$$\eta_n \leqslant 2h_{n-1}^2\eta_{n-1} , \tag{11}$$

$$h_n \leqslant 4h_{n-1}^3 , \tag{12}$$

$$R_n = \left[\frac{N}{K^2B_n}(2+h_n)+3\right](1+h_n) . \tag{13}$$

Il résulte par les relations (11) et (12) que

$$\eta_n \leqslant 2^{-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0 . \tag{14}$$

En vertu de l'inégalité $\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant \eta_n$ et de la relation (14) nous avons

$$\|x_{n+p}-x_n\| < 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}(1-2^{-p})\eta_0 . \tag{15}$$

Alors, X étant un espace complet, it résulte par (15) qu'il existe la limite $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Si $p \to \infty$ nous obtenons par (15) par la délimitation

$$\|x^*-x_n\| < 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0 . \tag{16}$$

On doit démontrer encore la propriété $x_n,\ \zeta_{n-1} \in S(x_0, 2\eta_0)$ utilisée déjà dans le point c) pour $n=1$, en notant $\zeta_{n-1} = x_{n-1} + \theta_{n-1}(x_n - x_{n-1})$. En effet

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\|$$

$$\leqslant \eta_0 + \frac{\eta_0}{2} + \ldots + \frac{\eta_0}{2^n} < 2\eta_0 .$$

L'inégalité $\|x_0 - \zeta_{n-1}\| < 2\eta_0$ peut être démontrée similairement.

Enfin, pour terminer la démonstration, nous montrons encore que $F(x^*) = 0$. Si nous considérons la relation (7) pour le cas n, c'est-à-dire

$$|F(x_n)| \leqslant \frac{N(2 + h_{n-1}) + 3B_{n+1}K^2}{12(1 - h_{n-1}/2)} \eta_{n-1}^3$$

alors, grâce à l'inégalité $R_{n-1} \leqslant 9$, nous obtenons

$$|F(x_n)| \leqslant \tfrac{3}{4} \frac{h_{n-1}^3}{B_{n-1}(1 - h_{n-1}/2)(1 + h_{n-1})} \eta_{n-1} \leqslant \frac{\eta_0}{B_0 2^{n-1}}$$

par conséquent si $n \to \infty$, alors $|F(x_n)| \to 0$; puis en tenant compte de $x_n \to x^*$ et de la continuité de la fonctionnelle $F(x)$ il résulte que $F(x^*) = 0$.

Observations. Ce théorème représente une extension du théorème de M. A. Mertvetzova [6] pour le cas quand il n'existe pas les inverses Γ_n, Q_n qui interviennent dans le calcul des approximations. Nous pouvons mettre en évidence qu'il résulte de la formule (16) que la rapidité de convergence reste la même que dans le cas quand ils existent les inverses mentionnées ci-dessus.

Nous avons supposé dans le théorème 1 que la condition

$$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0$$

est satisfaite (seulement pour l'approximation initiale x_0). Il est aussi intéressant d'étudier le cas quand cette condition est satisfaite pour tous les éléments x qui appartiennent à un domaine donné. Le théorème suivant est établi sous cette condition. Introduisons pour cela les notations

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} (gh)^{3^i - 1}$$

où

$$g^2 = \frac{N(2+h)/K^2B + 3}{12(1-h/2)^2} . \tag{17}$$

Il est évident que H satisfait les inégalités

$$1 < H < \frac{1}{1-gh}$$

pour $gh < 1$.

THÉORÈME 2. *Si les conditions suivantes sont remplies*

α) *a lieu l'inégalité* $1/\|F'(x)\| \leqslant B$ *pour chaque* $x \in S$, S *étant donnée par l'inégalité*

$$\|x - x_0\| \leqslant H\eta_0 \tag{18}$$

et encore la condition (A) *est satisfaite,*

β) *supposons remplies les conditions* 2°-3° *du théorème* 1 *où* S *est définie par* (18),

γ) *nous avons encore*

$$h < 2\,, \qquad hg < 1 \qquad \text{où} \qquad h = B\eta_0 K\,,$$

alors l'équation fonctionnelle $F(x) = 0$ *admet une solution* $x^* \in S(x_0, r)$, $r = H\eta$, *où les approximations* x_n *déterminées par* (2'') *tendent vers* x^* *et la rapidité de convergence est caractérisée par la délimitation*

$$\|x^* - x_n\| < H\eta_0 (gh)^{3^n - 1}\,.$$

Démonstration. Nous nous servons de la formule de Taylor généralisée pour l'opération $\Phi_0(x)$, c'est-à-dire de la formule (6). En tenant compte des relations (4), (3), (2''), (4') et des conditions 1°-3° nous obtenons l'inégalité

$$\frac{|F(x_1)|}{\|F'(x_1)\|} \leqslant \frac{B}{12(1 - h/2)} \{N(2+h) + 3K^2B\}\eta_0^3 = \delta_1'$$

et à l'aide de cette relation nous trouvons que

$$\left|\frac{F(x_1)}{L_1}\right| = \eta_1 \leqslant \frac{\delta_1'}{1 - \frac{1}{2}BKk\delta_1'}\,.$$

Si on utilise l'inégalité $\delta_1' < \eta_0$ nous pouvons facilement déduire la délimitation

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \frac{B}{12(1 - h/2)^2}\{N(2+h) + 3K^2B\}\|x_1 - x_0\|^3$$

où

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \frac{h^2}{12(1 - h/2)^2}\left\{\frac{N(2+h)}{K^2B} + 3\right\}\|x_1 - x_0\|\,.$$

On obtient de la même manière

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{B}{12(1 - h/2)^2}\{N(2+h) + 3K^2B\}\|x_n - x_{n-1}\|^3\,.$$

Par cette formule on peut établir la délimitation

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (gh)^{3^n - 1}\eta_0\,.$$

Les inégalités

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| \leqslant \eta_0 \sum_{i=1}^{n-1} (gh)^{3^i-1} < H\eta_0$$

nous montrent que les approximations x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ appartiennent à la sphère S. On voit facilement que les elements ζ_{n-1} appartiennent aussi à S.

Il résulte de la relation

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} (gh)^{3^i-1}\eta_0 < H\eta_0 (gh)^{3^n-1}$$

que x_n tend vers une limite $x^* \in S \subset X$, parce que X est un espace complet. Ainsi pour $p \to \infty$ nous avons

$$\|x^* - x_n\| < H\eta_0 (gh)^{3^n-1}.$$

Enfin nous devons montrer que x^* satisfait l'équation $F(x) = 0$, qui résulte immédiatement de la délimitation

$$|F(x_n)| \leqslant \frac{N(2+h) + 3K^2B}{12(1-h/2)} \|x_n - x_{n-1}\|^3.$$

Observations. a) Ce théorème représente une extension du théorème de V. E. Mirakov [7], où la rapidité de convergence reste la même.

b) Il résulte de la démonstration faite qu'on peut remplacer la condition 1° par la condition suivante [3]

1*) $$\sup_{x \in S} \frac{1}{\|F'(x)\|} = A < B$$

et encore a lieu la propriété

(A′) $$|F'(x_n) y_n| \geqslant \|F'(x_n)\| - \varepsilon, \qquad \|y_n\| = 1$$

où ε est un nombre positif petit qui satisfait l'inégalité

$$\varepsilon < \min\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right).$$

Dans ces conditions on obtient facilement la délimitation

$$\frac{1}{|F'(x_n) y_n|} \leqslant B.$$

Ainsi, en utilisant au lieu de 1° la condition 1*), la démonstration reste analogue.

2. Nous allons donner une application dans l'espace hilbertien réel H. Considérons l'équation opérationnelle

$$P(x) = 0$$

$P(x)$ étant une opération non-linéaire définie sur le domaine $S \subset H$ prenant ses valeurs en H. Introduisons les notations

$$F(x) = \big(P(x),\, P(x)\big) = \|P(x)\|^2 , \qquad Q(x_n) = \bar{P}'(x_n)P(x_n)$$

où $\bar{P}'(x_n)$ désigne l'opérateur adjoint de $P'(x_n)$, et $P'(x_n)$ est la dérivée au sens de Fréchet de $P(x)$ pour l'élément x_n. Dans ce cas nous avons

$$F'(x_n)\Delta x = 2\big(Q(x_n),\, \Delta x\big) , \qquad F''(x_n)\Delta x^2 = 2\big(Q'(x_n)\Delta x,\, \Delta x\big)$$

et si nous choisissons encore [3]

$$y_n = \frac{Q(x_n)}{\|Q(x_n)\|}$$

alors nous avons rempli la condition (A). En effet,

$$F'(x_n)y_n = 2\left(Q(x_n)\,,\, \frac{Q(x_n)}{\|Q(x_n)\|}\right) = 2\|Q(x_n)\| = \|F'(x_n)\| ,$$

et la formule d'itération (2″) se présente sous la forme

$$(2''') \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{\|P(x_n)\|^2}{2\|Q(x_n)\|^2 - \dfrac{\|P(x_n)\|^2}{\|Q(x_n)\|^2}\big(Q'(x_n)Q(x_n),\, Q(x_n)\big)}\, Q(x_n) .$$

Dans ces conditions les théorèmes 1 et 2 peuvent être formulés de la manière suivante:

THÉORÈME 1′. *Si nous avons rempli les conditions suivantes, pour l'approximation initiale* x_0,

1′) *il existe l'opération* $Q(x_0)$ *pour laquelle nous avons*

$$\frac{1}{\|Q(x_0)\|} \leqslant 2B_0 ,$$

2′) *a lieu l'inégalité*

$$\frac{\|P(x_0)\|^2}{\left|2\|Q(x_0)\| - \dfrac{\|P(x_0)\|^2}{\|Q(x_0)\|^3}\big(Q'(x_0)Q(x_0),\, Q(x_0)\big)\right|} \leqslant \eta_0 ,$$

3′) *ils existent les dérivées au sens Fréchet* $Q'(x)$, $Q''(x)$ *et elles sont bornées*

$$\|Q'(x)\| \leqslant K , \qquad \|Q''(x)\| \leqslant N \qquad \text{pour} \qquad x \in S ,$$

4') $2B_0K\eta \leqslant 1$ *et* $R_0 \leqslant 9$, *alors l'équation* $P(x) = 0$ *admet une solution* $x^* \in S$ *vers laquelle tendent les approximations* x_n, *déterminées par la formule d'itération* (2'') *et il existe la délimitation*

$$\|x^* - x_n\| < 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0 .$$

THÉORÈME 2'. *Si nous avons satisfait les conditions*

1'') *il existe l'opération* $Q(x)$, *et*

$$1/\|Q(x)\| \leqslant 2B_0$$

pour tous les elements $x \in S \subset X$, S *étant définie par l'inégalité* $\|x - x_0\| \leqslant H\eta$,

2'') *pour l'approximation* x_0 *est satisfaite la relation*

$$\frac{\|P(x_0)\|^2}{\left|2\|Q(x_0)\| - \dfrac{\|P(x_0)\|^2}{\|Q(x_0)\|^3}\big(Q'(x_0)Q(x_0),\, Q(x_0)\big)\right|} \leqslant \eta ,$$

3'') *pour les dérivées de Fréchet* $Q'(x)$ *et* $Q''(x)$ *ils existent les délimitations*

$$\|Q'(x)\| \leqslant K , \quad \|Q''(x)\| \leqslant N \quad \textit{pour} \quad x \in S ,$$

4'') $h < 2$, $hg < 1$ *où* $h = B\eta K$ *et* g *est donné par la relation* (17), *alors l'équation opérationnelle* $P(x) = 0$ *admet une solution* $x^* \in S$ *vers laquelle tendent les approximations* x_n *données par la formule* (2''') *et la rapidité de convergence est caracterisée par la délimitation*

$$\|x^* - x_n\| < H\eta(gh)^{3^n-1} .$$

Travaux cités

[1] Л. В. Канторович, *О методе Ньютона*, Труды Мат. Ин-та и. В. А. Стеклова 28 (1949), p. 104-114.

[2] M. Altman, *Concerning Approximate Solutions of Non-Linear Functional Equations*, Bull. de l'Acad. Polon. Sci., Sér. des sci. math., astr. et phys., 5 (1957), p. 461-465.

[3] — *On the Approximate Solution of Non-Linear Functional Equations*, Bull. de l'Acad. Polon. Sci., Sér. des sci. math., astr. et phys., 5 (1957), p. 457-460.

[4] E. Bodewig, *On types of convergence and on the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation*, Quarterly of Applied Mathematics 7 (1949), p. 325-333.

[5] Г. С. Салехов, *О сходимости процесса касательных гипербол*, ДАН 82 (4) (1952), p. 525-528.

[6] М. А. Мертвецова, *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнении*, ДАН 88 (4) (1953), p. 611-614.

[7] В. Е. Мираков, *О сходимости метода касательных гнпербол для нелинейных функциональных уравнении при условии типа Коши*, Труды Московсково физ.-техн. ин-та 1 (1958), p. 204-213.

Reçu par la Rédaction le 9. 12. 1960