ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXI (1969)

Une modification de la condition de Liapounov pour les équations à paramètre retardé

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Dans le cas d'une équation à paramètre retardé

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big), \qquad h > 0, \tag{1}$$

l'existence d'une fonction $V(t, x)$ positivement définie, telle que

$$V_t(t, x) + V_x(t, x) f(t, x, y) < 0, \tag{2}$$

est suffisante pour la stabilité de la solution $x = 0$ de l'équation (1), mais cette condition ne peut être satisfaite que très rarement (cf. [1]). Rasoumikhine a démontré (dans [2]) qu'il suffit d'admettre (2) pour (t, x, y) tels que

$$V(t-h, y) < V(t, x), \tag{3}$$

mais la condition de Rasoumikhine, elle aussi, n'est pas commode dans le cas où $f(t, x, y)$ ne dépend pas de x. Par exemple, dans le cas où

$$x'(t) = bx(t-h), \tag{4}$$

il n'existe pas de fonction $V(x)$ satisfaisant à (2) pour tous les t, x, y satisfaisant à (3).

Dans la présente note nous avons démontré que l'on peut n'admettre les hypothèses (2) que pour $xy > 0$ et telles qu'on a (3). Dans le cas envisagé il est cependant nécessaire d'ajouter certaines évaluations de $\{V_t + V_x f(t, x, y)\}$. Notre condition peut aussi être appliquée dans le cas (4) pour $|bh|$ suffisamment petit et $b < 0$.

§ 1. Envisageons l'équation

$$x'(t) = g\big(t, x(t), x(t-h)\big), \qquad h > 0, \tag{1.1}$$

où $g(t, x, y)$ est continue pour $-h \leqslant t < \infty$, (x, y) quelconque. Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H.

$$g(t, 0, 0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty. \tag{1.2}$$

Il existe une fonction $\omega(t, x)$ de classe C^1, une fonction $U(x)$ continue et une constante a, $0 < a < 1$, telles que

$$x\omega(t, x) > 0 \quad \text{pour } x \neq 0,\ -h \leqslant t < \infty, \tag{1.3}$$

$$|\omega(t, x)| \geqslant U(x) > 0 \quad \text{pour } x \neq 0,\ -h \leqslant t < \infty, \tag{1.4}$$

$$x[\omega_t(t, x) + \omega_x(t, x)g(t, x, y)] < 0 \tag{1.5}$$

pour y tel que

$$ax\omega(t, x) \leqslant x\omega(t-h, y) < x\omega(t, x), \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{1.6}$$

Introduisons les notations suivantes

$$M(t, r) = \max_{(x,y)\in Z_+(t,r)} [\omega_t(t, x) + \omega_x(t, x)g(t, x, y)], \tag{1.7}$$

$$m(t, r) = \min_{(x,y)\in Z_-(t,r)} [\omega_t(t, x) + \omega_x(t, x)g(t, x, y)] \tag{1.8}$$

où les ensembles $Z_+(t, r)$ et $Z_-(t, r)$ sont définis comme il suit:

$$Z_+(t, r) = \{(x, y):\ ar \leqslant \omega(t, x) \leqslant r,\ |\omega(t-h, y)| \leqslant r\}, \tag{1.9}$$

$$Z_-(t, r) = \{(x, y):\ -r \leqslant \omega(t, x) \leqslant -ar,\ |\omega(t-h, y)| \leqslant r\}. \tag{1.10}$$

Supposons que

$$\int_{t-h}^{t} M(s, r)ds < (1-a)r \quad \text{pour } t \geqslant 0,\ r > 0, \tag{1.11}$$

$$\int_{t-h}^{t} m(s, r)ds > (a-1)r \quad \text{pour } t \geqslant 0,\ r > 0. \tag{1.12}$$

THÉORÈME 1. *Les hypothèses* H *étant admises la solution* $x = 0$ *de l'équation* (1.1) *est stable au sens de Liapounov.*

Démonstration. En vertu de l'hypothèse (1.4) il suffit de prouver que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$\big|\omega\big(t, \varphi(t)\big)\big| \leqslant \delta \quad \text{pour } -h \leqslant t \leqslant 0 \tag{1.13}$$

implique

$$\big|\omega\big(t, x(t;\varphi)\big)\big| < \varepsilon \quad \text{pour } -h \leqslant t < \infty \tag{1.14}$$

pour chaque solution $x(t;\varphi)$ de l'équation (1.1) telle que $x(t;\varphi) = \varphi(t)$, $-h \leqslant t \leqslant 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Nous démontrons que δ peut être choisi égal à $a\varepsilon$:

$$0 < \delta = a\varepsilon < \varepsilon. \tag{1.15}$$

Envisageons une solution quelconque $x(t)$ telle qu'on a (1.13), où δ satisfait à (1.15). Désignons par $\Omega(t)$ la fonction composée

$$\Omega(t) = \omega(t, x(t)) \quad \text{pour } -h \leqslant t . \tag{1.16}$$

On a

$$|\Omega(t)| \leqslant \delta = a\varepsilon < \varepsilon \quad \text{pour } -h \leqslant t \leqslant 0 . \tag{1.17}$$

Supposons que pour notre solution $x(t)$ l'inégalité (1.14) ne soit pas satisfaite dans tout l'intervalle $[-h, \infty)$. Désignons par t_1 le nombre $t_1 = \min(t\colon \Omega(t) = \varepsilon)$. En vertu de (1.17) il existe donc une constante t_0, $0 \leqslant t_0 < t_1$, telle que

$$|\Omega(t)| < \varepsilon \quad \text{pour } -h \leqslant t < t_1 , \tag{1.18}$$

$$|\Omega(t_1)| = \varepsilon , \tag{1.19}$$

$$a\varepsilon \leqslant |\Omega(t)| < \varepsilon \quad \text{pour } 0 \leqslant t_0 \leqslant t < t_1 . \tag{1.20}$$

Nous allons démontrer que $t_1 - t_0 > h$. Envisageons le cas où

$$\varepsilon = \Omega(t_1) > 0 . \tag{1.21}$$

(Dans le cas où $\Omega(t_1) < 0$ le raisonnement est analogue.) De la continuité de $\Omega(t)$ et de (1.20) il résulte que

$$a\varepsilon \leqslant \Omega(t) < \varepsilon \quad \text{pour } t_0 \leqslant t < t_1 . \tag{1.22}$$

Evaluons la dérivée $\Omega'(t)$ dans l'intervalle $[t_0, t_1]$:

$$\Omega'(t) = \omega_t(t, x(t)) + \omega_x(t, x(t)) g(t, x(t), x(t-h)) . \tag{1.23}$$

En vertu de (1.16), (1.18), (1.22) et (1.9) pour chaque $t \in [t_0, t_1]$ le point $(x(t), x(t-h))$ appartient à l'ensemble $Z_+(t, \varepsilon)$ et par suite, en vertu de (1.7)

$$\Omega'(t) \leqslant M(t, \varepsilon) \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

d'où

$$\Omega(t) \leqslant \Omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} M(s, \varepsilon) ds = a\varepsilon + \int_{t_0}^{t} M(s, \varepsilon) ds \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1 . \tag{1.24}$$

De l'hypothèse que $t_1 < t_0 + h$ et de (1.11) on tire

$$\varepsilon = \Omega(t_1) \leqslant a\varepsilon + \int_{t_0}^{t_0+h} M(s, \varepsilon) ds;$$

par suite $t_0 < t_1 - h < t_1$, d'où en vertu de (1.22) on obtient

$$a\varepsilon \leqslant \Omega(t_1 - h) < \varepsilon . \tag{1.25}$$

De (1.25), (1.16) et (1.3) il vient pour $t = t_1$

$$ax(t_1)\omega\big(t_1, x(t_1)\big) = a\Omega(t_1) = a\varepsilon \leqslant x(t_1)\omega\big(t_1 - h, x(t_1 - h)\big)$$
$$< x(t_1)\varepsilon = x(t_1)\omega\big(t_1, x(t_1)\big)$$

et par suite, en vertu de (1.5) et (1.23), on a $\Omega'(t_1) < 0$ et $\Omega(t) > \Omega(t_1)$ pour $t_1 - \tau \leqslant t < t_1$, ce qui est incompatible avec (1.18). On obtient une contradiction analogue dans le cas où $\Omega(t_1) = -\varepsilon$ et par suite

$$|\Omega(t) < \varepsilon \qquad \text{pour } -h \leqslant t < \infty .$$

§ 2. Remarque 1. L'exemple suivant montre que l'hypothèse (1.8) est indispensable. Envisageons l'équation linéaire

$$x'(t) = -x(t) + a(t)x(t-1) , \tag{2.1}$$

où la fonction $a(t)$ est définie de la manière suivante:

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 2n+1 \leqslant t < 2(n+1) , \\ q & \text{pour } 2n \leqslant t < 2n+1 , \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \dots ;$$
$$q < -e^2 - 1 .$$

Envisageons une solution $x(t)$ de l'équation (2.1) telle que

$$x(t) = r \qquad \text{pour } -h \leqslant t \leqslant 0 \;\; (h = 1) .$$

On a

$$x(t) = k_n e^{-t+2n+1} \qquad \text{pour } 2n+1 \leqslant t \leqslant 2(n+1) ,$$
$$k_n = x(2n+1) , \qquad x\big(2(n+1)\big) = k_n e^{-1} .$$

Pour $2n \leqslant t \leqslant 2n+1$ on a

$$x(t) = e^{-t}\int_{2n}^{t} e^{2n-1} q k_{n-1} ds + ce^{-t} = e^{-t}e^{2n-1}qk_{n-1}(t-2n) + ce^{-t} ,$$
$$x(2n) = k_{n-1}e^{-1} = ce^{-2n} ,$$
$$c = k_{n-1}e^{2n-1} ,$$
$$x(t) = e^{-t}k_{n-1}e^{2n-1}\big(q(t-2n)+1\big) \qquad \text{pour } 2n \leqslant t \leqslant 2n+1 .$$

d'où on obtient

$$x(2n+1) = e^{-2}k_{n-1}(q+1) = k_0 e^{-2n}(q+1)^n = k_0\big(e^{-2}(q+1)\big)^n ,$$
$$q+1 < -e^2 , \qquad (q+1)e^{-2} < -1$$

et par suite

$$|x(2n+1)| \to \infty \qquad \text{pour } n \to \infty ,$$

donc (2.1) est instable. Dans l'exemple envisagé la fonction $\omega(x) = x$ satisfait aux hypothèses (1.3), (1.4) et (1.5) dans l'ensemble (1.6) pour $0 < a < 1$,

$$x[\omega_t(t, x) + \omega_x(t, x)g(t, x, y)] = x[-x + a(t)y] = -x^2 + a(t)xy, \quad a(t) \leqslant 0$$

et par suite pour $xy > 0$ on a

$$x[\omega_t(t, x) + \omega_x(t, x)g(t, x, y)] \leqslant -x^2 < 0 \qquad \text{pour } x \neq 0, 0 < xy \leqslant x^2 .$$

Au lieu de l'inégalité (1.11) on obtient pour $t = 2n+1$ l'inégalité

$$(1-a)r < e^2 r < \int_{2n}^{2n+1} M(s, r)ds = (-a+|q|)r < |q|r$$

et en conséquence, l'équation (2.1) étant instable, les inégalités (1.11) et (1.12) dans le théorème 1 ne peuvent être remplacées par les inégalités

$$\int_{t-h}^{t} M(s, r)ds < kr , \qquad \int_{t-h}^{t} m(s, r)ds > -kr ,$$

où k est une constante positive quelconque.

Remarque 2. On vérifie facilement qu'il suffit d'admettre les hypothèses H pour $t \geqslant T$ ($T > 0$ suffisamment grand). De la dépendance continue des intégrales de la condition initiale il résulte qu'il existe un $\delta > 0$ tel que pour $|x(t)| < \delta_1$ pour $-h \leqslant t \leqslant 0$ on a $|\omega(t, x(t))| < \delta^1$ dans l'intervalle $[0, T]$, où $\delta = (1-d)\varepsilon$.

§ 3. Du théorème 1 on obtient immédiatement le théorème suivant pour les équations linéaires:

Envisageons l'équation

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x(t-h) , \qquad h > 0 \tag{3.1}$$

et admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES L_1.

$$q(t) < 0 , \qquad p(t) \leqslant 0 \qquad \text{pour } t \geqslant T , \tag{3.2}$$

$$\int_{t-h}^{t} \{ap(s) + |q(s)|\}ds < 1 - a . \tag{3.3}$$

THÉORÈME 2. *Les hypothèses L_1 étant admises, la solution $x = 0$ de l'équation* (3.1) *est stable.*

Démonstration. Il suffit de poser $\omega(x) = x$:

$$x\omega_x(x)g(t, x, y) = p(t)x^2 + q(t)xy .$$

Pour

$$0 < ax^2 \leqslant xy \leqslant x^2 . \tag{3.5}$$

On obtient, en vertu de (3.2),

$$p(t)x^2 + q(t)xy < 0 .$$

D'après (1.7):

$$M(t, r) = \max\big(p(t)x + q(t)y\big) \quad \text{pour } ar \leqslant x \leqslant r,\ |y| \leqslant r .$$

En vertu de (3.2)

$$p(t)x + q(t)y \leqslant \{ap(t) - q(t)\}r \quad \text{pour } ar \leqslant x \leqslant r,\ |y| \leqslant r$$

d'où, à cause de (3.3),

$$\int_{t-h}^{t} M(s, r)\,ds < (1-a)r . \tag{3.6}$$

D'une façon analogue on obtient (cf. (1.8))

$$\int_{t-h}^{t} m(s, r)\,ds > (a-1)r .$$

Ainsi, le théorème 1 entraîne le théorème 2.

Remarque 3. L'équation linéaire

$$x'(t) = -ax(t) - e^{-a\pi/2}x(t-\pi/2) \tag{3.7}$$

constitute pour

$$a > 2/\pi \tag{3.8}$$

un exemple d'équation satisfaisant aux hypothèses L_1, pour laquelle il n'existe pas de fonction positivement définie $V(t, x)$ à dérivée totale par rapport à l'équation (3.7) négative pour tous les (x, y) suffisamment petits. C'est une conséquence du fait que pour la fonction de Liapounov, dont la dérivée par rapport à l'équation (3.7) est négative, la fonction composée $V\big(x(t)\big)$ est décroissante (pour chaque solution $x(t)$ de (3.7)). $V\big(t_0, x(t_0)\big) = 0$ implique $x(t_0) = 0$ et $V\big(t, x(t)\big) = 0$ pour $t \geqslant t_0$ et par conséquent $x(t) = 0$ pour $t \geqslant t_0$. Mais la fonction

$$x(t) = re^{-at}\cos t \tag{3.9}$$

satisfait à l'équation (3.7),

$$\begin{aligned} x'(t) &= -ae^{-at}\cos t - e^{-at}\sin t = -ax(t) - e^{-a\pi/2}\cdot e^{-a(t-\pi/2)}\cos(t-\pi/2) \\ &= -ax(t) - e^{-a\pi/2}x(t-\pi/2) , \end{aligned}$$

et par suite il n'existe pas de fonction $V(t, x) > 0$, $x \neq 0$, $V(t, 0) = 0$, telle que $V_t(t, x) + V_x(t, x)(-ax - e^{a\pi/2}y) \leqslant 0$ pour chaque (x, y) tel que $x^2 + y^2 \leqslant R$.

On vérifie facilement que les hypothèses L_1 sont satisfaites.

On a

$$q(t) = -a < 0\,, \qquad p(t) = -e^{-a\pi/2} < 0 \qquad (\text{cf. } (3.2))\,,$$

$$\int_{t-h}^{t} [ap(s) + |q(s)|]\,ds = \frac{\pi}{2}(-aa + e^{-a\pi/a})$$

$$< \frac{\pi}{2}\left(-\frac{2a}{\pi} + e^{-1}\right) < -a + 1 \qquad (\text{cf. } (3.3),\ (3.8))\,.$$

L'équation (3.7) est donc stable, bien que les hypothèses du théorème de Liapounov ne soient pas vérifiées.

§ 4. Remarque 4. Il est évident que les hypothèses L_1 ne sont pas nécessaires. Du théorème 1 on obtient aussi la condition suivante:

HYPOTHÈSES L_2.

(4.1) $$q(t) \leqslant 0\,,$$

(4.2) $$\int_{t-h}^{t} q(s)\,ds \leqslant 1 - a\,,$$

(4.3) $$\int_{0}^{t} p(s)\,ds < \gamma \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty\,,$$

$p(t)$, $q(t)$ continues.

THÉORÈME 3. *Les hypothèses L_2 étant admises, la solution $x = 0$ de l'équation* (3.1) *est stable.*

Démonstration. En vertu de (4.3) il existe une fonction $a(t)$ telle que

(4.4) $$a < 0\,, \qquad a(t) + p(t) < 0 \qquad \text{pour } t \geqslant 0$$

et

(4.5) $$\int_{0}^{t} a(s)\,ds > -\gamma > -\infty \qquad \text{pour } t \geqslant 0\,.$$

Posons

$$\omega(t, x) = x\exp\left(\int_{0}^{t} a(s)\,ds\right)\,.$$

En vertu de (4.5)

$$|\omega(t, x)| > |x|e^{-\gamma} > 0 \qquad \text{pour } x \neq 0\,,$$

(4.6) $$x\omega(t, x) > 0\,.$$

Evaluons $\omega_t + \omega_x g(t, x, y)$. On a

$$a(t)\exp\Big(\int_0^t a(s)\,ds\Big)x^2 + \exp\Big(\int_0^t a(s)\,ds\Big)p(t)x^2 +$$

$$+xyq(t)\exp\Big(\int_0^{t-h} a(s)\,ds\Big)\exp\Big(\int_{t-h}^t a(s)\,ds\Big)$$

$$= x\omega(t, x)\big(a(t)+p(t)\big) + x\omega(t-h, y)q(t)\exp\Big(\int_{t-h}^t a(s)\,ds\Big)\,.$$

Pour $x\omega(t-h, y) > 0$, (4.4), (4.1) et (4.6) donnent

$$\omega_t(t, x) + \omega_x(t, x)g(t, x, y) < 0\,.$$

En vertu de (4.4)

$$M(t, r) \leqslant a\big(a(t)+p(t)\big)r + |q|\exp\Big(\int_{t-h}^t a(s)\,ds\Big)r < [a(a+p)-q]r\,.$$

De (4.2) on tire

$$\int_{t-h}^t \big[a\big(a(s)+p(s)\big)-q(s)\big]ds < a\int_{t-h}^t \big(a(s)+p(s)\big)ds + 1 - a$$

d'où, à cause de (4.4), il résulte

$$\int_{t-h}^t M(s, r)\,ds < (1-a)r\,.$$

D'une façon analogue on obtient

$$\int_{t-h}^t m(s, r)\,ds > (a-1)r\,.$$

On peut donc appliquer le théorème 1.

§ 5. Remarque 5. Un théorème analogue au théorème 1 peut être démontré dans le cas des systèmes

$$x_i'(t) = f_i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-h), \ldots, x_n(t-h)\big)\,, \qquad i = 1, \ldots, n,\ h > 0\,. \tag{5.1}$$

On peut, par exemple, admettre les hypothèses suivantes:

Hypothèses H_s. Les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ sont continues

$$f_i(t, 0, \ldots, 0) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n,\ t \geqslant 0\,. \tag{5.2}$$

Il existe des fonctions $\omega_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_n(t, x_1, \ldots, x_n)$ telles que pour chaque $i = 1, \ldots, n$ on a

$$x_i \omega_i(t, x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad \text{pour } x_i \neq 0\,, \tag{5.3}$$

$$|\omega_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \geqslant U_i(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad \text{pour } x \neq 0\,. \tag{5.4}$$

Il existe une constante a, $0 < a < 1$, telle que pour chaque i l'inégalité

$$0 > x_i\left[\frac{\partial}{\partial t}\Omega_i(t, x_1, \ldots, x_n)\right] + \\ + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Omega_i(t, x_1, \ldots, x_n) f_j(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \tag{5.5}$$

est satisfaite dans l'ensemble des $(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ tels que

$$a x_i \omega_i(t, x_1, \ldots, x_n) < x_i \omega_i(t-h, y_1, \ldots, y_n) < x_i \omega_i(x_1, \ldots, x_n)$$

et

$$|\omega_j(t-h, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant |\omega_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \quad \text{pour } j \neq i\,,$$

$$|\omega_j(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \omega_i(t, x_1, \ldots, x_n)|\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Posons

$$\gamma_i(t, r) = \max\left|\frac{\partial}{\partial t}\omega_i(t, x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\omega_i(t, x) f_j(t, x, y)\right|,$$

$$|\omega_j(t, x)| \leqslant r\,, \quad |\omega_j(t-h, y)| \leqslant r$$

et supposons que

$$\int_{t-h}^{t} \gamma_i(s, r)\,ds < r(1-a) \quad \text{pour } r > 0,\ t \geqslant 0\,,\ i = 1, \ldots, n\,.$$

THÉORÈME S. *Les hypothèses* H_s *étant admises, la solution* $x \equiv 0$ *du système* (5.1) *est stable au sens de Liapounov.*

La démonstration est analogue à celle du Théorème 1.

References

[1] Л. Э. Эльсгольц (L. E. Elsgolc), *Устойчивость решений дифференциально-разносных уравнений*, УМН 9, 4 (1962).

[2] Б. С. Разумихин (B. S. Rasoumikhine), *Об устойчивости систем с запаздыванием*, ПММ 20, B. 4 (1956).

Reçu par la Rédaction le 6. 2. 1967