ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XX (1968)

Über eine axiomatische Auszeichnung der Determinanten

von M. KUCHARZEWSKI (Katowice)

Diese Arbeit befaßt sich mit einer Charakterisierung der Determinanten mit Hilfe von einigen einfachen Eigenschaften. Diese Charakterisierung scheint unter allen bisherigen eine der schärfsten zu sein. Das Problem, das in dieser Arbeit gelöst wird, hat Herr S. Gołąb gestellt bei der Gelegenheit seiner Untersuchungen ein Flächenmaß bzw. Volumenmaß in axiomatischer Weise zu definieren [1]. In der erwähnten Arbeit wurde bewiesen, daß eine Funktion f einer Veränderlichen quadratischen Matrix zweiter Ordnung, die die zwei unten angegebenen Bedingungen erfüllt und außerdem die Eigenschaft besitzt, daß sie das Vorzeichen wechselt, falls die Spalten vertauscht werden, bis auf eine multiplikative Konstante der Determinante dieser Matrix gleich ist. Dabei werden über die Funktion f keine Regularitätsannahmen gemacht.

Dieser Satz wird in dieser Note auf Matrizen von beliebiger Ordnung verallgemeinert. Gleichzeitig hat es sich gezeigt, daß die dritte Bedingung überflüssig ist.

SATZ 1. *Es bezeichne A eine beliebige quadratische Matrix von der Ordnung n (n eine gegebene natürliche Zahl, größer als 1).*

1. *Wir setzen voraus, daß*

$$f(A) = f(B)\,,$$

falls die Matrix B aus A durch Subtraktion einer Zeile (bzw. einer Spalte) von einer anderen Zeile (Spalte) hervorgeht.

2. *Wir setzen weiter voraus, daß*

$$f(B) = \varrho f(A)\,,$$

falls die Matrix B and A entsteht, wenn jedes Element einer Zeile (bzw. Spalte) der Matrix A mit demselben von Null verschiedenen Faktor ϱ multipliziert wird.

Unter diesen Bedingungen besteht die Formel

$$f(A) = C\Delta,$$

wo C eine Konstante ist und Δ die Determinante der Matrix A bedeutet

Dieser Satz ist der von C. Carathéodory ([3], S. 318) angegebenen Kennzeichnung der Determinanten äquivalent. Ich möchte aber diesen Satz hier mit Hilfe eines von M. Kuczma herrührenden Satzes beweisen. Da dieser Beweis sehr einfach und kurz ist, glaube ich, es lohnt sich ihn zu veröfferentlichen. Zuerst definieren wir die sogenannten elementaren Umformungen T_1 und T_2 der Matrizen ([2], S. 199).

Folgende Umformungen der Matrizen nennen wir *elementare* Umformungen T_1 bzw. T_2:

T_1: Multiplizieren einer Zeile (Spalte) mit einer beliebigen Zahl und Addieren zu einer anderen Zeile (Spalte).

T_2: Multiplizieren beliebiger Zeile (Spalte) mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl ϱ und gleichzeitiges Dividieren einer anderen Zeile (Spalte) durch dieselbe Zahl ϱ.

Der zitierte Satz von M. Kuczma lautet folgendermaßen:

SATZ 2. *Jede Matrix*

$$A = |a_{ij}|\,, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

kann unter Anwendung der Umformungen T_1 *und* T_2 *auf die folgende kanonische Form* $|d_{ij}|$

$$d_{ij} = 0 \quad \textit{für} \quad i \neq j\,,$$
$$d_{ii} = 0 \quad \textit{oder} \quad d_{ii} = 1 \quad \textit{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$
$$d_{nn} = \Delta = \operatorname{Det} \|a_{ij}\|$$

zurückgeführt werden. Im Falle $\Delta \neq 0$ *muß* $d_{ii} = 1$, *für* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *gelten.*

Wir zeigen jetzt, daß eine Funktion $f(A)$, die die Bedingungen 1 und 2 (Satz 1) erfüllt, bei den Umformungen T_1 und T_2 der Matrix A ungeändert bleibt.

Aus der Bedingung 2 folgt, daß f sich bei der Umformung T_2 nicht ändert. Daß f auch bei T_1 ungeändert ist, zeigen wir wie folgt. Wird die Matrix A in der Form

$$[a_1, \ldots, a_n]$$

geschrieben werden, wo mit a_i die i-te Spalte der Matrix A bezeichnet ist, so haben wir auf Grund der Voraussetzungen:

$$f([a_1, \ldots, a_n]) = \frac{1}{\varrho} f([a_1, \ldots, a_i, \ldots, \varrho a_j, \ldots, a_n]) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{\varrho} f([a_1, \ldots, a_i - \varrho a_j, \ldots, \varrho a_j, \ldots, a_n]) \tag{2}$$

$$= f([a_1, \ldots, a_i - \varrho a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n])\,. \tag{3}$$

(1) folgt aus der Bedingung 2, (2) aus 1 und (3) wieder aus 2.

Die Relation (3) zeigt, daß f sich nicht ändert, wenn man die mit ϱ multiplizierte j-te Spalte zur i-ten addiert. Ganz analog kann man entsprechende Relation fur die Zeilen beweisen.

Jetzt wollen wir den Satz 1 beweisen. Bezeichnen wir mit $\varphi(u)$ die Funktion

$$\varphi(u) = f\left(\begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & u \end{Vmatrix}\right),$$

so erhält man aus dem Satz 2, daß f folgende Form

$$f(A) = \varphi(\Delta) \quad \text{für} \quad \Delta \neq 0 \tag{4}$$

haben muß, wo Δ die Determinante der Matrix A ist.

Für $\Delta = 0$ erhalten wir aus dem Satz 2

$$f(A) = f\left(\begin{Vmatrix} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{n-1} & \\ & & & 0 \end{Vmatrix}\right), \tag{5}$$

wo $\delta_i = 1$ oder $\delta_i = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ sind.

Die rechte Seite von (5) muß aber gleich Null sein. In der Tat, multiplizieren wir die letzte Zeile der an dieser Seite auftretenden Matrix mit ϱ, so ergibt sich aus der Bedingung 2

$$f\left(\begin{Vmatrix} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{n-1} & \\ & & & 0 \end{Vmatrix}\right) = \varrho f\left(\begin{Vmatrix} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{n-1} & \\ & & & 0 \end{Vmatrix}\right), \tag{6}$$

was nur mit

$$f\left(\begin{Vmatrix} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{n-1} & \\ & & & 0 \end{Vmatrix}\right) = 0 \tag{7}$$

verträglich ist.

Aus (5) und (7) erhält man weiter

$$f(A) = 0 \quad \text{für} \quad \Delta = 0\,. \tag{8}$$

Darüber hinaus ergibt sich aus (4) und aus der Bedingung 2

$$\varphi(\varrho\Delta) = \varrho\varphi(\Delta)\,. \tag{9}$$

Setzt man in (9) $\Delta = 1$ ein, so haben wir

$$\varphi(\varrho) = C\varrho\,, \tag{10}$$

wo $C = \varphi(1)$ ist.

Mit Hilfe von (10) kann (4) in folgender Form

$$f(A) = C\Delta \quad \text{für} \quad \Delta \neq 0 \tag{11}$$

geschrieben werden.

Die Beziehung (11), die für $\Delta \neq 0$ bewiesen wurde, bleibt wegen (8) auch für $\Delta = 0$ richtig. Der Satz 1 ist auf diese Weise vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb, *Über ein Funktionalgleichungssystem aus dem Gebiete der Geometrie* (im Druck).

[2] M. Kuczma, *Bemerkung zur vorhergehenden Arbeit von M. Kucharzewski*, Publ. Math. Debrecen, 6 (3-4) (1959), S. 199-203.

[3] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig und Berlin 1918.

Reçu par la Rédaction le 28. 4. 1967