ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIX (1974)

À propos d'un lemme de Tadeusz Ważewski

par Tiberiu Popoviciu (Cluj)

1. Dans la plupart des traités d'analyse mathématique on trouve le théorème bien connu, dû à Cauchy:

Soit (A_n) une suite donnée infinie, croissante, de nombres positifs tendant vers $+\infty$ et (a_n) une suite infinie quelconque de nombres réels. Alors si nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = l \tag{1}$$

nous avons aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_n} = l. \tag{2}$$

La propriété est d'ailleurs vraie, quelle que soit la limite l, finie ou non.

Sous les hypothèses du théorème, la propriété (2) résulte donc toujours de la propriété (1). Au contraire, la propriété (1) ne résulte pas toujours de la propriété (2). Pour illustrer cette affirmation on donne d'habitude le simple exemple: $A_n = n$, $a_n = (-1)^n$.

2. Un important lemme, établi par Tadeusz Ważewski dans ses remarquables recherches sur le théorème de l'Hôspital, nous suggère la propriété suivante [1]:

W. *Soit $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ une suite donnée infinie, croissante, de nombres positifs tendant vers $+\infty$ et $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ une suite infinie quelconque de nombres réels. Supposons que nous ayons la propriété* (2). *Alors on peut trouver une suite partielle $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$ de la suite des indices $(n)_{n=1}^{+\infty}$ telle que l'on ait aussi*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{k_{n+1}}-a_{k_n}}{A_{k_{n+1}}-A_{k_n}} = l. \tag{3}$$

---

[1] Tadeusz Ważewski, *Une démonstration uniforme du théorème généralisé de l'Hôspital*, Ann. Soc. Polon. Math. 22 (1949), p. 161–168.

On peut considérer cette propriété comme une sorte de réciproque du théorème de Cauchy.

Pour la démonstration de la propriété W nous pouvons suivre la démonstration que Tadeusz Ważewski a donnée à son lemme.

Nous avons

$$\frac{a_{k_{n+1}}-a_{k_n}}{A_{k_{n+1}}-A_{k_n}}=\left(\frac{a_{k_{n+1}}}{A_{k_{n+1}}}-\frac{a_{k_n}}{A_{k_n}}\right)\frac{1}{1-A_{k_n}/A_{k_{n+1}}}+\frac{a_{k_n}}{A_{k_n}}. \tag{4}$$

Mais, la suite (A_n) tendant vers $+\infty$, on peut choisir la suite (k_n) des indices de manière que l'on ait

$$\frac{A_{k_n}}{A_{k_{n+1}}}<\frac{1}{2}, \quad n=1,2,\ldots \tag{5}$$

Remarquons aussi que de (2) il résulte que a_{k_n}/A_{k_n} tend vers l pour $n\to+\infty$.

La propriété W résulte alors immédiatement de (4) *lorsque l est fini.*

Si l est infini ($=+\infty$ ou $-\infty$), il faut compléter la démonstration. Si, par exemple, $l=+\infty$, on peut d'abord extraire une suite partielle $(p_n)_{n=1}^{+\infty}$ d'indices de manière que la suite $(a_{p_n}/A_{p_n})_{n=1}^{+\infty}$ soit croissante (tendant alors vers $+\infty$). On extrait ensuite la suite (k_n) de la suite (p_n), donc aussi de la suite (n) de manière que l'on ait encore (5). On voit facilement que cela est toujours possible. La formule (4) nous montre que la propriété W est encore vraie pour $l=+\infty$. On démontre de la même manière la propriété W si $l=-\infty$.

Pour terminer, remarquons que lorsque la limite l est finie, dans la propriété W on peut choisir la suite partielle des indices (k_n) indépendamment de la suite (a_n).

Reçu par la Rédaction le 24. 7. 1973