ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVII (1966)

Über spezielle Bahnengeometrien dritter Ordnung

von A. Moór (Szeged)

§ 1. Einleitung. Zu Grunde gelegt sei eine Geometrie der Bahnen dritter Ordnung, in der also die Differentialgleichungen der Bahnen die Form

$$\frac{d^3x^i}{ds^3}+3\Gamma^i\left(x,\frac{dx}{ds},\frac{d^2x}{ds^2}\right)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

haben. Die Grundgrößen dieser Geometrie bilden die $\Gamma^i(x,x',x'')$ (¹), die bei einer Koordinatentransformation

$$\bar{x}^i=\bar{A}^i(x^1,x^2,\ldots,x^n),$$

die mindestens dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzt werden soll, dem Transformationsgesetz

$$\bar{\Gamma}^i(\bar{x},\bar{x}',\bar{x}'')=\bar{A}^i_p\Gamma^p(x,x',x'')-\bar{A}^i_{pq}x''^px'^q-\tfrac{1}{3}\bar{A}^i_{pqr}x'^px'^qx'^r \tag{2}$$

genügen, wo

$$\bar{A}^i_p\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p},\qquad \bar{A}^i_{pq}\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^p\partial x^q},\qquad \bar{A}^i_{pqr}\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^3\bar{x}^i}{\partial x^p\partial x^q\partial x^r}$$

bedeuten (vgl. [2], Formel (2.2)). Die Formel (2) sichert, daß die linke Seite von (1) bei einer zulässigen — d.h. mindestens dreimal stetig differenzierbaren — Koordinatentransformation sich wie ein kontravarianter Vektor transformiert.

Eine derartige Geometrie der Bahnen wurde schon von vielen Mathematikern untersucht (²). Die kontravarianten Ableitungen haben wir in der Arbeit [2] unter Benützung der Homogeneitätsforderung

$$\Gamma^i(x,\varrho x',\varrho^2x'')\equiv\varrho^3\Gamma^i(x,x',x'') \tag{3}$$

(¹) Jetzt und im folgenden bedeuten die Striche die Ableitung nach dem Parameter s.

(²) Vgl. das Literaturverzeichnis der Arbeit [2], insbesondere die in [2] zitierten Arbeiten [2], [3], [4].

bestimmt. Die zwei wesentlichen kovarianten Ableitungen eines Vektorfeldes $\xi^i(x, x', x'')$ der durch (1) charakterisierten Geometrie der Bahnen, sind (vgl. [2], Formeln (2.9a)-(2.10c)):

$$\overset{1}{\nabla}_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial \Gamma^j}{\partial x''^k} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x''^j} G^j_k + \overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk} \xi^j ,$$

$$\overset{2}{\nabla}_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^k} - 2 \frac{\partial \xi^i}{\partial x''^j} \cdot \frac{\partial \Gamma^j}{\partial x''^k} + \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} \xi^j ,$$

wo

(4a) $$G^j_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \Gamma^j}{\partial x'^k} - 2 \frac{\partial \Gamma^j}{\partial x''^m} \cdot \frac{\partial \Gamma^m}{\partial x''^k},$$

(4b) $$\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \Gamma^i}{\partial x''^j \partial x'^k} - 2 \frac{\partial^2 \Gamma^i}{\partial x''^j \partial x''^m} \cdot \frac{\partial \Gamma^m}{\partial x''^k},$$

(4c) $$\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} \overset{\text{def}}{=} 2 \frac{\partial^2 \Gamma^i}{\partial x''^j \partial x''^k}$$

bedeuten. Das invariante Differential des Vektors $\xi^i(x, x', x'')$ ist durch (vgl. [2], Formel (2.5a)):

(5) $$\frac{D\xi^i}{ds} = \frac{d\xi^i}{ds} + \frac{\partial \Gamma^i}{\partial x''^j} \xi^j$$

festgelegt. (5) hat längs einer Bahn (1) die Form:

$$\frac{D\xi^i}{ds} = (\overset{1}{\nabla}_k \xi^i) \frac{dx^k}{ds} + (\overset{2}{\nabla}_k \xi^i) \frac{Dx'^k}{ds}$$

(vgl. [2], Formel (2.9)).

Im folgenden wollen wir zwei verschiedene Typen dieser Geometrie der Bahnen dritter Ordnung näher untersuchen, und zwar die durch

$$1)\ \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = 0 \qquad \text{und} \qquad 2)\ \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = 2a^i_{jk}(x,x')$$

charakterisierten. Die Bedingung 1) bzw. 2) hat offenbar invarianten Charakter, da $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}$ nach (4c) und (2) ein Tensor ist. Die Grundgröße Γ^i ist also nach (4c) beim Typus 1) in x''^i linear und beim Typus 2) vom zweiten Grade. Es wird sich zeigen, daß diese Typen mit den affinen Geometrien der Bahnen zweiter Ordnung, bzw. mit den affinzusammenhängenden Linienelementräumen im engen Zusammenhang stehen (vgl. unsere Hauptsätze I und II).

Die durch 1) $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = 0$, bzw. 2) $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = 2a^i_{jk}(x, x')$ charakterisierten Typen, d.h. die Typen:

(6) $$\Gamma^i(x, x', x'') = b^i_j(x, x') x''^j + c^i(x, x') ,$$

bzw.

$$\Gamma^i(x, x', x'') = \tfrac{1}{2} a^i_{jk}(x, x') x''^j x''^k + b^i_j(x, x') x''^j + c^i(x, x') \tag{7}$$

können nämlich unter gewissen Bedingungen — wie das in den § 2, 3 gezeigt wird — aus der Grundgröße der Bahnengeometrie zweiter Ordnung, bzw. aus denen der affinzusammenhängenden Linienelementräumen zusammengesetzt werden. Sogar der Krümmungstensor

$$R^i_{jlk} = \frac{\partial \overset{1}{\Gamma}{}^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \overset{1}{\Gamma}{}^i_{jl}}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial \Gamma^m}{\partial x''^k} - \frac{\partial \overset{1}{\Gamma}{}^i_{jl}}{\partial x''^m} G^m_k + \overset{1}{\Gamma}{}^m_{jl} \overset{1}{\Gamma}{}^i_{mk} - k/l\,, \tag{8}$$

wo k/l den vorigen Ausdruck mit vertauschten Indizes k und l bedeutet, stimmt bei dem Typus (6) mit dem Krümmungstensor der Bahnengeometrie zweiter Ordnung überein (vgl. Satz 4). Die autoparallelen Kurven der durch (6) bzw. (7) charakterisierten Geometrie sind für geeignete c^i nach den Sätzen 3 und 7 gleichzeitig durch (1) bestimmte Bahnen.

Bezüglich des Typus (7) bemerken wir, daß dieser in den Typus (6) übergeht, falls $a^i_{jk} \equiv 0$ gesetzt wird. a^i_{jk} hat übrigens einen Tensorcharakter (vgl. die Formel (23)). Der Typus (6) hat aber in erster Reihe bezüglich der Krümmung gewisse Spezialeigenschaften die für den Typus (7) nicht gelten — z.B. ist der Krümmungstensor vom Typus (6) von x''^i unabhängig —, außerdem kann die durch (6) bestimmte Größe aus wenigeren geometrischen Objekten konstruiert werden, als der Typus (7) (vgl. unsere Hauptsätze I und II).

§ 2. Der typus: $\Gamma^i \equiv b^i_j(x, x') x''^j + c^i(x, x')$. Nehmen wir an, daß $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = 0$, d.h. daß Γ^i nach (4c) die Form (6) hat. Auf Grund der Transformationsformel (2) besteht:

$$\begin{aligned} \bar{b}^i_j(\bar{x}, \bar{x}') \bar{x}''^j + \bar{c}^i(\bar{x}, \bar{x}') \\ = \bar{A}^i_p \big(b^p_j(x, x') x''^j + c^p(x, x')\big) - \bar{A}^i_{pq} x''^p x'^q - \bar{A}^i_{pqr} x'^p x'^q x'^r\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Beachten wir nun, daß

$$\bar{x}''^j = \bar{A}^j_p x''^p + \bar{A}^j_{pq} x'^p x'^q \tag{10}$$

gilt, so bekommt man aus (9) durch Gleichsetzen auf beiden Seiten der in x''^i linearen bzw. von x''^i unabhängigen Glieder die Transformationsformeln für b^i_j und c^i:

$$\bar{b}^i_j \bar{A}^j_p = \bar{A}^i_r b^r_p - \bar{A}^i_{pq} x'^q\,, \tag{11}$$

$$\bar{c}^i = \bar{A}^i_p c^p - \tfrac{1}{3} \bar{A}^i_{pqr} x'^p x'^q x'^r - \bar{b}^i_j \bar{A}^j_{pq} x'^p x'^q\,. \tag{11a}$$

Nach einer Überschiebung der Gleichung (11) mit

$$A^p_m \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}$$

wird aus (11) wegen $\bar{A}^j_p A^p_m = \delta^j_m$

$$\bar{b}^i_m = \bar{A}^i_r A^p_m b^r_p - \bar{A}^i_{pq} A^p_m x'^q \,. \tag{11b}$$

Die Formeln (11a) und (11b) sind eben die Transformationsformeln der unsere Geometrie bestimmenden Grundgrößen b^i_j und c^i.

Die Formel (11b) zeigt, daß b^i_m im engen Zusammenhang mit der Berwaldschen affinen Geometrie der Bahnen steht. Diese Geometrie ist nämliche durch ein Differentialgleichungssystem von der Form (vgl. [1], Gleichung (1.4)):

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + 2\overset{(B)}{\Gamma^i}(x, x') = 0$$

festgelegt ([3]). Die $\overset{(B)}{\Gamma^i}$, die in den x'^i homogen von zweiter Ordnung sind, genügen der Transformationsformel (vgl. die Transformationsformel (1.9) von [1]):

$$2\overset{(B)}{\bar{\Gamma}^i} = 2\overset{(B)}{\Gamma^p}\bar{A}^i_p - \bar{A}^i_{pq} x'^p x'^q \,. \tag{12}$$

Differenzieren wir diese Transformationsformel nach $\bar{x}'^m$, so erhält man wegen

$$\frac{\partial x'^p}{\partial \bar{x}'^m} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}'^m}(\bar{x}'^r A^p_r) = A^p_m \tag{13}$$

unmittelbar das Resultat, daß $\partial\overset{(B)}{\Gamma^i}/\partial x'^m$ dieselbe Transformationsformel hat, wie b^i_m.

Satz 1. *Ist b^i_m von der Form*

$$b^i_m = \frac{\partial b^i}{\partial x'^m}, \tag{14}$$

so kann

$$b^i(x, x') \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} b^i_m(x, x') x'^m \tag{15}$$

als die Grundgröße einer Berwaldschen affinen Geometrie der Bahnen betrachtet werden.

Beweis. Aus den Formeln (3) und (6) folgt, daß $b^i_j(x, x')$ in den x'^k homogen von erster Ordnung ist, und nebenbei folgt auch die Homogeneität dritter Ordnung von $c^i(x, x')$, die wir im folgenden noch wesentlich benützen wollen. Aus der Homogeneität von b^i_j in bezug auf x'^k folgt

---

([3]) Berwald benützt statt $\overset{(B)}{\Gamma^i}$ die Bezeichnung Γ^i. Wir wollen aber mit Γ^i immer die in (1) vorkommenden Grundgrößen bezeichnen, und mit $\overset{(B)}{\Gamma^i}$ bezeichnen wir die Grundgröße der Berwaldschen Theorie.

nun aus (14) nach einer Überschiebung mit x'^m die Relation (15), da b^i in den x'^k homogen von zweiter Ordnung ist.

Die Homogeneität von b^i und $\overset{(B)}{\Gamma^i}$ stimmt also überein. Wir müssen noch die Identität der entsprechenden Transformationsformeln beweisen. Aus (11b) folgt aber nach einer Überschiebung mit $\bar{x}'^m$ in Hinsicht auf (15), daß b^i derselben Transformationsformel genügt, wie $\overset{(B)}{\Gamma^i}$. Das beweist unseren Satz.

Wir werden jetzt zeigen, daß $c^i(x, x')$ aus den b^i_j und aus den partiellen Ableitungen von b^i_j bestimmbar ist.

Die durch (1) definierten Bahnen können mit Hilfe des durch (5) angegebenen invarianten Differentials in der Form:

$$\frac{D^2 x'^i}{ds^2} + (G^i_j - \Phi^i_j) x'^j = 0 \tag{16}$$

angegeben werden, wo G^i_j durch (4a) bzw. Φ^i_j durch die Formel

$$\Phi^i_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \Gamma^i}{\partial x''^j \partial x^k} x'^k + \frac{\partial^2 \Gamma^i}{\partial x''^j \partial x'^k} x''^k - 3 \frac{\partial^2 \Gamma^i}{\partial x''^j \partial x''^k} \Gamma^k - \frac{\partial \Gamma^i}{\partial x''^t} \cdot \frac{\partial \Gamma^t}{\partial x''^j} \tag{17}$$

angegeben ist (vgl. [2], Formel (5.2)). Hat nun Γ^i die Form (6), so bekommt man aus (16) wegen der Formeln (4a) und (17) in Hinsicht auf die Homogeneität dritter Ordnung der c^i in den x'^i:

$$\frac{D^2 x'^i}{ds^2} + 2 b^i_{[sk]} x''^s x'^k + 3 \left(c^i - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial b^i_k}{\partial x^s} x'^s x'^k + b^i_s b^s_k x'^k \right) \right) = 0\,, \tag{18}$$

wo

$$b^i_{sk} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial b^i_s}{\partial x'^k}, \qquad b^i_s \equiv b^i_{sk} x'^k$$

gesetzt wurden.

Satz 2. *Hat b^i_m die Form* (14), *so ist die allgemeinste Form von c^i (bezüglich der gegebenen b^i_j):*

$$c^i = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial b^i_r}{\partial x^s} x'^r x'^s + b^i_s b^s_r x'^r \right) + f^i(x, x')\,, \tag{19}$$

wo f^i ein beliebiges Vektorfeld bedeutet, das in bezug auf x'^i homogen von dritter Ordnung ist.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß falls (14) gilt,

$$c^i - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial b^i_r}{\partial x^s} x'^r x'^s + b^i_s b^s_r x'^r \right) \tag{20}$$

ein Vektor ist. Nun folgt aber aus der Bedingung (14), daß $b^i_{[sk]} = 0$ und somit drückt (18) aus, daß der Ausdruck (20) in einem bestimmten Linienelement zweiter Ordnung $(\overset{(0)}{x}, \overset{(0)}{x'}, \overset{(0)}{x''})$ einen Vektorcharakter hat, da $D^2x'^i/ds^2$ immer einen Vektor bestimmt.

Eine unmittelbare Berechnung des Vektorcharakters von (20) auf Grund der Transformationsformeln (11a) und (11b) wäre auf Grund von (13) auch möglich, die Rechnungen wären aber ziemlich kompliziert. Man könnte aber die Formel (19) auch mit Hilfe des Satzes 4 der Arbeit [3] beweisen. Nach diesem Satz ist die allgemeinste Form von $3\Gamma^i$ ([4]):

$$3\Gamma^i = \frac{3}{2}\frac{\partial \Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^r} x''^r + \frac{\partial \Gamma^i_{(2)}}{\partial x^l} x'^l + \frac{1}{2}\Gamma^r_{(2)}\frac{\partial \Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^r} + H^i$$

wo $\Gamma^i_{(2)}(x, x')$ eine Bahnengeometrie von zweiter Ordnung bestimmtende Größe und H^i einen beliebigen Vektor bedeutet. Nehmen wir nun für $\Gamma^i_{(2)}$ den Ausdruck

$$\Gamma^i_{(2)} = b^i_j(x, x')x'^j ,$$

so erhält man unter Benützung der Formel:

$$\frac{\partial b^i_j}{\partial x'^r} x'^j = \frac{\partial b^i_r}{\partial x'^j} x'^j = b^i_r$$

die aus (14) unmittelbar folgt, die Form von Γ^i

$$\Gamma^i = b^i_r x''^r + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial b^i_j}{\partial x^k} x'^j x'^k + b^i_r b^r_j x'^j\right) + \frac{1}{3}H^i .$$

Vergleichen wir diese Formel mit (6), so folgt für c^i unmittelbar die Formel (19) mit $f^i = \frac{1}{3}H^i$.

Bemerkung. In der Arbeit [3] war H^i ein von (x^i, x'^i, x''^i) abhängiger, sonst aber beliebiger Vektor. Offenbar kann jetzt H^i bzw. f^i in (19) nur von (x^i, x'^i) abhängig sein, da c^i von x''^i unabhängig vorausgesetzt wurde.

Setzen wir in (19) $f^i \equiv 0$, so folgt aus den Sätzen 1 und 2 der

HAUPTSATZ I. *Aus der Grundgröße $\overset{(B)}{\Gamma^i}(x, x')$ einer Berwaldschen affinen Bahnengeometrie kann immer ein Objekt von der Form* (6) *und mit der Transformationsformel* (2) *konstruiert werden.*

Beweis. Aus Satz 1 folgt, daß in der Formel (6)

$$b^i_m = \frac{\partial \overset{(B)}{\Gamma^i}}{\partial x'^m} \tag{21}$$

([4]) In der Arbeit [3] benutzten wir statt $3\Gamma^i$ die Bezeichnung: $\Gamma^i_{(3)}$.

genommen werden kann, und (19) bestimmt dann c^i für $f^i \equiv 0$ allein aus den $\overset{(B)}{\Gamma^i}$. Das beweist schon den Hauptsatz I.

Bestimmen wir die Grundgröße (6) mittels einer $\overset{(B)}{\Gamma^i}$ in der Weise, daß (21) und (19) mit $f^i(x, x') \equiv 0$ gültig seien, so folgt aus der Gleichung (18), daß die Gleichung der Bahnen die Form

$$\frac{D^2 x'^i}{ds^2} = 0 \tag{22}$$

hat. Die autoparallelen Kurven sind nun durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{Dx'^i}{ds} = 0 \tag{22'}$$

charakterisiert. Aus (22′) folgt aber immer die Relation (22), und das wollen wir im folgenden Satz formulieren:

SATZ 3. *Bestehen die Formeln* (21) *und* (19) *mit* $f^i \equiv 0$, *so ist jede autoparallele Kurve gleichzeitig eine Bahnkurve.*

Bemerkung. Aus (22) folgt offenbar (22′) nicht, da (22) ein Differentialgleichungssystem von dritter Ordnung, während (22′) nur von zweiter Ordnung ist.

Der Krümmungstensor der durch (6) bestimmten Geometrie ist nach (8) und (4b)

$$R^i_{jlk} = \frac{\partial b^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial b^i_{jl}}{\partial x'^m} b^m_k + b^m_{jl} b^i_{mk} - k/l\,,$$

und wenn wir diese Formel mit der Formel des Krümmungstensors einer Berwaldschen Bahnengeometrie vergleichen ([1], Formel (3.3)), so kann unmittelbar die Gültigkeit des folgenden Satzes bestätigt werden:

SATZ 4. *Gelten die Formeln* (21) *und* (19) *mit* $f^i \equiv 0$, *so stimmen die Krümmungstensoren der Berwaldschen Bahnengeometrie und der durch* (1) *und* (6) *bestimmten Bahnengeometrie überein.*

§ 3. Der Typus: $\Gamma^i = \frac{1}{2} a^i_{jk}(x, x') x''^j x''^k + b^i_j(x, x') x''^j + c^i(x, x')$.

Nehmen wir jetzt an, daß $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = 2a^i_{jk}(x, x')$, d.h. Γ^i nach (4c) die Form (7), hat, wo selbstverständlich die a^i_{jk} in j, k symmetrisch sind. Aus (3) folgt, daß die Größen a^i_{jk}, b^i_j bzw. c^i in den x'^i homogen von (-1)-ter, erster, bzw. dritter Dimmension sind. Ihre Transformationsformeln kann man aus (2) bestimmen. Es wird nach (2):

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\bar{a}^i_{jk}\bar{x}''^j\bar{x}''^k + \bar{b}^i_j\bar{x}''^j + \bar{c}^i \\ &\qquad = \bar{A}^i_p(\tfrac{1}{2} a^p_{rt} x''^r x''^t + b^p_r x''^r + c^p) - \bar{A}^i_{pq} x''^p x'^q - \tfrac{1}{3} \bar{A}^i_{pqr} x'^p x'^q x'^r\,.\end{aligned}$$

Eliminiert man aus dieser Formel $\bar{x}'^{i}$ mittels (10), so erhält man auf beiden Seiten ein Polynom der x'^{i}.

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten der Glieder von derselben Ordnung bekommt man:

$$\bar{A}^j_r \bar{A}^k_t \bar{a}^i_{jk} = \bar{A}^i_p a^p_{rt}, \tag{23}$$

$$\bar{b}^i_m = \bar{A}^i_p A^l_m b^p_l - \bar{A}^i_{ql} A^l_m x'^q - \bar{a}^i_{jm} \bar{A}^j_{rq} x'^r x'^q, \tag{24}$$

$$\bar{c}^i = \bar{A}^i_p c^p - \tfrac{1}{3} \bar{A}^i_{pqr} x'^p x'^q x'^r - \tfrac{1}{2} \bar{a}^i_{jk} \bar{A}^j_{rq} \bar{A}^k_{ts} x'^r x'^q x'^t x'^s - \bar{b}^i_j \bar{A}^j_{rq} x'^r x'^q. \tag{25}$$

Die Transformationsformel (23) zeigt unmittelbar, daß a^i_{jk} ein Tensor ist. Unter gewissen Nebenbedingungen — die wir im Satz 5 angeben werden — ist b^i_m eine Grundgröße eines affinzusammenhängenden Linienelementraumes. Ein affinzusammenhängender Linienelementraum ist nämlich durch das invariante Differential von der Form

$$D\xi^i = d\xi^i + C^i_{kj} \xi^k dx'^j + \Gamma^i_{kj} \xi^k dx^j$$

gekennzeichnet, wo C^i_{kj} einen in x'^i von (-1)-ter Dimension homogenen Tensor, den sog. Torsionstensor des Raumes bedeutet und Γ^i_{kj} eine Größe mit den Transformationsformeln (vgl. [4], Formeln (1,3)-(1,6)):

$$\bar{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^i_{kl} A^k_b \bar{A}^a_i A^l_c + C^i_{kl} A^k_b \bar{A}^a_i A^l_{dc} \bar{A}^d_s x'^s + A^i_{bc} \bar{A}^a_i \tag{26}$$

ist. Für C^i_{kl} gilt noch die Relation

$$C^i_{lk} x'^k = C^i_{kl} x'^l = 0 .$$

Satz 5. *Ist*

$$a^i_{jk} x'^k \equiv a^i_{kj} x'^k \equiv 0 , \tag{27}$$

so kann b^i_j als die Größe $\Gamma^i_{jk} x'^k$ und a^i_{jk} als Torsionstensor C^i_{jk} eines affinzusammenhängenden Linienelementraumes betrachtet werden.

Beweis. Bezüglich des Tensors a^i_{jk} ist die Behauptung des Satzes trivial. Wir müssen aber zeigen, daß die Transformationsformeln von b^a_b und $\Gamma^a_{bc} x'^c$ übereinstimmen, falls

$$a^i_{jk} = C^i_{jk}$$

gesetzt wird. Aus (26) folgt nach einer Überschiebung mit $\bar{x}'^c$ auf Grund der Transformationsformel

$$A^l_c \bar{x}'^c = x'^l$$

die Formel

$$\bar{\Gamma}^a_{bc} \bar{x}'^c = \Gamma^i_{kl} x'^l A^k_b \bar{A}^a_i + C^i_{kl} A^k_b \bar{A}^a_i A^l_{dc} \bar{A}^d_s x'^s \bar{x}'^c + A^i_{bc} \bar{A}^a_i \bar{x}'^c . \tag{28}$$

Differenzieren wir nun die Indentität $A^i_c \bar{A}^a_i = \delta^a_c$ nach $\bar{x}^b$ und überschieben wir dann mit $\bar{x}'^c$, so wird:

(29a) $$\bar{A}^a_i A^i_{bc} \bar{x}'^c = -\bar{A}^a_{ip} x'^i A^p_b \,.$$

In ähnlicher Weise erhält man:

(29b) $$A^l_{dc} \bar{A}^d_s \bar{x}'^c = -A^l_d \bar{A}^d_{sp} x'^p \,.$$

Beachten wir jetzt (29a), (29b) und den Tensorcharakter von C^i_{kl}, so wird aus (28):

(30) $$\Gamma^a_{bc} \bar{x}'^c = \Gamma^i_{kl} x'^l A^k_b \bar{A}^a_i - \bar{C}^a_{bd} \bar{A}^d_{sp} x'^s x'^p - \bar{A}^a_{il} A^l_b x'^i \,.$$

Vergleicht man die Transformationsformeln (24) und (30), so sieht man, daß diese für

(31) $$b^a_b = \Gamma^a_{bc} x'^c \,, \qquad a^i_{jk} = C^i_{jk}$$

ineinander übergehen, und das beweist den Satz.

Wir werden jetzt eine Größe c^i mit dem Transformationsgesetz (25) aus a^i_{jk} und b^i_j konstruieren. Für diesen Zweck bestimmen wir die Gleichung der Bahnen in denjenigen Räumen, in denen (27) gilt. Aus (16) folgt nach (4a), (17) für den durch (7) charakterisierten Typus, unter Beachtung der Homogeneitätsrelationen der Größen a^i_{jk}, b^i_j, c^i:

(32) $$\frac{D^2 x'^i}{ds^2} + \tfrac{1}{2} a^i_{rs} x''^r x''^s + (2 b^i_{[rj]} - a^i_{rs} b^s_j) x'^j x''^r - \left(\frac{\partial b^i_j}{\partial x^k} x'^j + b^i_s b^s_k\right) x'^k + 3c^i = 0 \,.$$

Nehmen wir jetzt an, daß im folgenden die Bedingungsgleichung (27) gilt. Dann folgt aus den Transformationsformeln (10) und (24) von x''^i und b^i_m, daß

$$\theta^i \overset{\text{def}}{=} x''^i + b^i_m x'^m$$

ein kontravarianter Vektor ist. Berechnen wir nun x''^i aus dieser Gleichung, substituieren wir dann x''^i in (32), so wird im Hinblick auf $a^i_{[rs]} = 0$:

(33) $$\frac{D^2 x'^i}{ds^2} + \left\{\frac{3}{2} a^i_{rs} b^r_j b^s_k - 2 b^i_{[rj]} b^r_k - \frac{\partial b^i_j}{\partial x^k}\right\} x'^j x'^k - b^i_s b^s_k x'^k + 3c^i = 3\psi^i(x, x') \,,$$

wo

(33a) $$3\psi^i(x, x') = -\tfrac{1}{2} a^i_{rs} \theta^r \theta^s + 2 (a^i_{rs} b^s_j - b^i_{[rj]}) x'^j \theta^r$$

bedeutet.

Wir zeigen nun, daß $3\psi^i$ und somit auch ψ^i ein kontravarianter Vektor ist. Für das erste Glied ist das offensichtlich, da a^i_{rs} ein Tensor und θ^i ein kontravarianter Vektor ist. Für das zweite Glied beachte man, daß wegen der Homogeneität von (-1)-ter Dimension von a^i_{jk} und in Hinsicht auf (27), aus der Transformationsformel (24) die Formel

$$\bar{b}^i_{[mk]}\bar{x}'^k = \bar{A}^i_p A^t_m b^p_{[tr]} x'^r - \bar{a}^i_{jm}\bar{A}^j_{rt} x'^r x'^t$$

folgt; aus (23) und (24) folgt wegen (27)

$$\bar{a}^i_{ms}\bar{b}^s_k\bar{x}'^k = \bar{A}^i_p A^t_m a^p_{ts} b^s_j x'^j - \bar{a}^i_{ms}\bar{A}^s_{rt} x'^r x'^t .$$

Aus den zwei letzten Formeln folgt nun schon unmittelbar, daß $3\psi^i$ nach (33a) ein Vektor ist.

Aus (33) folgt nun auf Grund des Vektorcharakters von $D^2x'^i/ds^2$ und $\psi^i(x, x')$ der

Satz 6. *Gelten die Relationen* (27), *so ist die allgemeinste Form von* $c^i(x, x')$ *bezüglich der angegebenen Größen* a^i_{jk} *und* b^i_j

$$c^i = -\left\{\frac{1}{2} a^i_{rs} b^r_j b^s_k - \frac{2}{3} b^i_{[rj]} b^r_k - \frac{1}{3}\cdot\frac{\partial b^i_j}{\partial x^k}\right\} x'^j x'^k + \frac{1}{3} b^i_s b^s_k x'^k + f^i(x, x') , \tag{34}$$

wo $f^i(x, x')$ *einen beliebigen, in* x'^i *von dritter Dimension homogenen Vektor bedeutet.*

Aus den beiden Sätzen 5 und 6 folgt der

Hauptsatz II. *Aus den Grundgrößen* C^i_{jk} *und* Γ^i_{jk} *eines affinzusammenhängenden Linienelementraumes kann immer ein Objekt von der Form* (7) *und mit der Transformationsformel* (2) *konstruiert werden, falls* $C^i_{[jk]} = 0$ *ist.*

Beweis. Die Formeln (31) bestimmen nach dem Satz 5 die beiden Fundamentalgrößen der Formel (7), während (34) mit $f^i \equiv 0$ die Größe c^i definiert. Das beweist schon den Hauptsatz II.

Bezüglich der Bahnen und autoparallelen Kurven besteht auch für den Typus (7) der folgende

Satz 7. *Gelten die Formeln* (27) *und* (34), *wo* $f^i \equiv 0$ *genommen werden soll, so ist jede autoparallele Kurve gleichzeitig eine Bahnkurve der durch* (1) *und* (7) *bestimmten Geometrie.*

Beweis. Die Gleichung der Bahnen ist durch (32) angegeben. Die Gleichung der autoparallelen Kurven ist nach (5):

$$\frac{Dx'^i}{ds} \equiv \frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{\partial\Gamma^i}{\partial x'^j} x'^j = 0 . \tag{35a}$$

Auf Grund von (7) und (27) erhält man für die Gleichung der autoparallelen Kurven:

$$x''^i + b^i_m x'^m = 0 .$$

Eliminieren wir nun mittels dieser Relation x''^i aus (32) und auch c^i mittels (34), wo noch $f^i \equiv 0$ gesetzt werden soll, so wird die Gleichung der Bahnen:

$$\frac{D^2 x'^i}{ds^2} = 0 \,. \tag{35b}$$

Ist aber längs einer Kurve (35a) erfüllt, so ist auch (35b) gültig w.z.b.w.

Letztens wollen wir noch darauf hinweisen, daß für beide Typen, d.h. für den Typus (6) bzw. (7), die autoparallelen Kurven gleichzeitig Bahnen einer affinen Bahnengeometrie, bzw. eines Linienelementraumes sind, falls beim Typus (6) die b^i_j und c^i aus einer Fundamentalgröße $\overset{(B)}{\Gamma}{}^i$ mit dem Transformationsgesetz (12), bzw. beim Typus (7) die a^i_{jk}, b^i_j, c^i aus den Grundgrößen C^i_{jk} und Γ^i_{jk} eines affinzusammenhängenden Linienelementraumes bestimmt sind. In beiden Fällen wird nämlich die Gleichung der autoparallelen Kurven aus (22′) (beim Typus (7) noch im Hinblick auf (27)) in die Form

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + b^i_m(x, x')x'^m = 0$$

übergehen und das beweist nach (21) bzw. (31) unsere Behauptung.

Literaturverzeichnis

[1] L. Berwald, *Über Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung...*, Annals of Math. 48 (1947), S. 193-215.

[2] A. Moór, *Begründung einer affinen Geometrie der Bahnen dritter Ordnung*, Tensor (N.S.), 16 (1965), S. 37-55.

[3] — *Über die Form der Fundamentalgrößen gewisser affinen Räume*, Publ. Math. 9 (1962), S. 289-297.

[4] O. Varga, *Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz*, Publ. Math. 1 (1947), S. 7-17.

Reçu par la Rédaction le 20. 6. 1964