ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Обобщение одного неравенства для полиномов

Д. Ж. Джокович (Белград)

Введение. Пусть $P(x)$ — полином степени $n \geqslant 2$ с действительными коэффециентами, и a, b два его последовательные действительные нуля. Если $P(x) > 0$ (соответственно $P(x) < 0$) для $x \in (a, b)$, то обозначим через $M(P; a, b)$ наибольшее (соответственно наименьшее) значение $P(x)$ для $x \in (a, b)$. Пусть, с учётом кратности, y_ν $(\nu = 1, \ldots, 2r)$ все корни уравнения

$$P(y) = hM(P; a, b) \qquad (0 < h < 1),$$

принадлежащие (a, b), причём, $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_{2r}$. Максимальную из длин промежутков $(y_{2\nu-1}, y_{2\nu})$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ обозначим через $\Delta(P, h; a, b)$, т. е.

$$\Delta(P, h; a, b) = \max_\nu (y_{2\nu} - y_{2\nu-1}).$$

В случае, когда все нули полинома действительны, имеем $r = 1$.

С. Пашковский ([3]) доказал неравенства

$$\Delta(P, h; a, b) \leqslant (b-a)\sqrt{1-h} = (b-a)\Delta(Q_2, h; 0, 1), \tag{1}$$

$$\Delta(P, h; a, b) \geqslant (b-a)\Delta(Q_n, h; 0, 1), \tag{2}$$

при следующих предположениях и обозначениях:

(a) все нули полинома $P(x)$ действительны;

(b) a, b имеют значения, данные раньше;

(c) $Q_n(x) = x^{n-1}(1-x)$, где $n \geqslant 2$ — степень полинома $P(x)$.

Неравенство (1) было доказано Эрдёшом ([1]) значительно раньше Пашковского.

В настоящей работе мы дадим одно обобщение неравенства (2). Докажем, что при некоторых дополнительных условиях неравенство (2) верно и для полиномов с действительными коэффициентами, нули которых не обязательно все действительны. Если эти дополнительные условия не выполнены, может оказаться, что неравенство (2) неверно. Наше доказательство основанно на применении интерполяционной формулы Эрмита ([2]). Леммы 1-3 и 5-6 Пашковского ([3]) могут быть доказаны тем-же методом.

Обобщение неравенства (2). Если z_1 и z_2 ($z_1 \neq z_2$) — комплексные числа, обозначим через $K(z_1, z_2)$ внутреннюю открытую область окружности с диаметром, концы которого z_1 и z_2.

Теорема. *Пусть $P(x)$ — полином степени $n \geqslant 2$ с действительными коэффициентами, a и b ($a < b$) — два последовательные действительные нуля $P(x)$ и $z \in (a, b)$ — одна из точек, для которых $P(z) = M(P; a, b)$. Неравенство* (2) *верно при предположении, что $K(a, z) \cup K(z, b)$ не содержит нулей полинома $P(x)$. (Последнее условие наверно выполняется, если $K(a, b)$ не содержит нулей полинома $P(x)$).*

Доказательство. Пусть x_ν ($\nu = 1, \ldots, m$) — все действительные и $p_\nu \pm iq_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, s$; $q_\nu \neq 0$) — все мнимые нули полинома $P(x)$, с учётом их кратности. Причём, $m + 2s = n$.

Если $s = 0$, то утверждение теоремы следует из неравенства (2) Пашковского. Итак, пусть $s \geqslant 1$, $n \geqslant 4$. Обозначим через $R(x)$ полином, выполняющий следующие условия:

1° $R(x)$ имеет степень n;

2° числа x_ν ($\nu = 2, \ldots, m$) и числа $p_\nu \pm iq_\nu$ ($\nu = 2, \ldots, s$), с учётом их кратности, являются нулями полинома $R(x)$;

3° числа $p \pm iq$ — нули полинома $R(x)$, причём, мы рассматриваем p и q как параметры;

4° $R(z) = P(z)$;

5° $R'(z) = 0$.

Из интерполяционной формулы Эрмита ([2], стр. 64-68, 266-267) следует, что полином $R(x)$, выполняющий условия 1°-5°, существует и определяется ими однозначно. Условия 2° и 3° обнаруживают $n-1$ нулей полинома $R(x)$. Отсюда заключаем, что $R(x)$ имеет ещё один действительный нуль t. Параметры p и q будем изменять таким образом, чтобы $t = x_1$, т. е. чтобы действительные нули полиномов $P(x)$ и $R(x)$ совпадали (учитывая и их кратность).

Положим

$$P(x) = (x - x_1)\left((x - p_1)^2 + q_1^2\right)S(x)\,, \tag{3}$$

где $S(x)$ — полином степени $n-3$. Полином $R(x)$ должен иметь следующую форму:

$$R(x) = C(x - t)\left((x - p)^2 + q^2\right)S(x)\,, \tag{4}$$

где $C \neq 0$ — действительная постоянная. Из $P'(z) = 0$ и 5° следует

$$\frac{1}{x_1 - z} = \frac{S'(z)}{S(z)} - \frac{2(p_1 - z)}{(z - p_1)^2 + q_1^2}, \qquad \frac{1}{t - z} = \frac{S'(z)}{S(z)} - \frac{2(p - z)}{(z - p)^2 + q^2}.$$

Равенство $t = x_1$ будет иметь место, если

$$\frac{p-z}{(z-p)^2+q^2} = \frac{p_1-z}{(z-p_1)^2+q_1^2}. \tag{5}$$

В плоскости комплексного переменого $p+iq$, уравнение (5) есть окружность с центром на действительной оси, проходящая через точки z и p_1+iq_1. Обозначим эту окружность через K. Итак, предположив, что $p+iq \in K$, $q \neq 0$, мы доказали, что действительные нули полиномов $P(x)$ и $R(x)$ совпадают (с учётом их кратности). Отсюда и из 4° следует, что

$$\operatorname{sgn} P(x) = \operatorname{sgn} R(x) \tag{6}$$

для всех действительных x.

Если $p+iq \neq p_1 \pm iq_1$ то $P(x)$ и $R(x)$ — не тождественны. Полином $T(x) = P(x) - R(x)$ имеет степень n. Нам уже известны все его нули:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ z,\ z,\ x_{k+1},\ x_{k+2},\ldots,\ x_m;$$
$$p_2 \pm iq_2,\ p_3 \pm iq_3,\ \ldots,\ p_s \pm iq_s.$$

Все действительные нули полинома $P(x)\,T(x)$ имеют чётный порядок. Поэтому либо

$$P(x)\,T(x) \geqslant 0 \quad \text{для всех } x, \tag{A}$$

либо

$$P(x)\,T(x) \leqslant 0 \quad \text{для всех } x. \tag{B}$$

В случае (A) заключаем, что для всех $x \neq z$

$$\operatorname{sgn} P(x) = \operatorname{sgn} T(x) = \operatorname{sgn}\bigl(P(x) - R(x)\bigr). \tag{7}$$

Аналогично, в случае (B) для всех $x \neq z$ имеем

$$\operatorname{sgn} P(x) = -\operatorname{sgn} T(x) = \operatorname{sgn}\bigl(R(x) - P(x)\bigr). \tag{8}$$

Обратимся теперь к условиям, которым должны удовлетворять p и q, для того чтобы альтернатива (A) имела место. Так как $t = x_1$ из (3) и (4) получаем

$$R(x) = C\frac{(x-p)^2+q^2}{(x-p_1)^2+q_1^2}P(x). \tag{9}$$

Постоянная C определяется при помощи условия 4°

$$C = \frac{(z-p_1)^2+q_1^2}{(z-p)^2+q^2}. \tag{10}$$

Если $C < 1$, из (9) получаем, что $|R(x)| \leqslant |P(x)|$ для действительных достаточно больших x. Учитывая (6) заключаем, что (8) невозможно для достаточно больших x. Итак, если $C < 1$ — альтернатива (A) верна. Аналогично, из $C > 1$ следует, что альтернатива (B) верна. Из (10) следует, что альтернатива (A) имеет место, если расстояние точек z и $p+iq$ больше расстояния точек z и p_1+iq_1.

Из предыдущего следует, что если точка $p+iq$ движется по окружности K из начального положения p_1+iq_1 и удаляется от точки z, то график полинома $R(x)$ в начальном положении совпадает с графиком полинома $P(x)$, а потом примыкается к оси x, не изменяя действительных нулей и не изменяя своего значения в точке z. Из геометрических соображений ясно, что $\Delta(R, h;\, a, b)$ уменьшается при описанном движении точки $p+iq$ и будет минимальным, когда точка $p+iq$ попадет на действительную ось. Условия теоремы обеспечивают чтобы эта точка на действительной оси была вне промежутка (a, b). Применяя индукцию по числу пар мнимых нулей полинома $P(x)$, получаем утверждение теоремы.

В случае, когда $p_1 = z$, окружность K переходит в прямую $p = z$. Тогда надо точку $p+iq$ удалить в бесконечность вдоль этой прямой. Степень полинома $R(x)$ уменьшится на две единицы. Это не мешает доказательству, так как из работы Пашковского ([3], лемма 8) следует, что

$$\Delta(Q_{n-2}, h;\, 0, 1) > \Delta(Q_n, h;\, 0, 1)\,.$$

Теорема доказана.

Примечания. (a) Покажем, что в случае, когда $K(a, z) \cup K(z, b)$ содержит нули полинома $P(x)$, неравенство (2) может оказаться неверным. Дадим один пример. Пусть

$$P(x) = x(1-x)(x-\tfrac{7}{12})^2\,, \qquad a = 0\,, \qquad b = 1\,.$$

Двухкратный нуль $\frac{7}{12}$ можно заменить мнимыми $\frac{7}{12} \pm i\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Все вычисляемые величины получают приращения, которые $\to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Полином $P(x)$ имеет абсолютный максимум $P(\frac{1}{6}) = 5^3 2^{-6} 3^{-4}$ и локальный максимум $P(\frac{7}{8}) = 7^3 2^{-12} 3^{-2}$. Положим

$$h = P(\tfrac{7}{8})/P(\tfrac{1}{6}) = 7^3 3^2 2^{-6} 5^{-3} = 0{,}385875\,.$$

Уравнение $P(y) = hP(\frac{1}{6})$ имеет двухкратный корень $\frac{7}{8}$. Остальные корни $y_{1,2} = (5 \mp 3\sqrt{2})/24$. Итак $\Delta(P, h;\, 0, 1) = \sqrt{2}/4$.

С другой стороны, для полинома $Q_4(x) = x^3(1-x)$ величина $\Delta(Q_4, h; 0, 1)$ равна разнице корней уравнения $x^3(1-x) = 7^3 3^5 2^{-14} 5^{-3}$, принадлежащих промежутку $(0, 1)$. Из неравенств $Q_4(\frac{1}{2}) > 7^3 3^5 2^{-14} 5^{-3}$ и $Q_4(\frac{9}{10}) > 7^3 3^5 2^{-14} 5^{-3}$ следует, что $\Delta(Q_4, h; 0, 1) > 0{,}4$. Следовательно, $\Delta(P, h; 0, 1) < \Delta(Q_4, h; 0, 1)$, и нули $\frac{7}{12} \pm i\varepsilon$ принадлежат области $K(\frac{1}{6}, 1)$.

(b) Автор также поставил себе задачу истолковать условия

$$p_\nu \pm iq_\nu \notin K(a, z) \cup K(z, b) \tag{11}$$

как свойство графика полинома $P(x)$. Мне кажется, что в случае полинома четвёртой степени

$$P(x) = x(1-x)\big((x-p)^2+q^2\big)\,, \qquad a=0\,, \qquad b=1\,,$$

(11) равносильно условию, чтобы график $P(x)$ не имел двух локальных максимумов в интервале $(0,1)$. Мне удалось доказать, что если $P(x)$ имеет два максимума в интервале $(0,1)$ то $p+iq \in K(0,1)$.

Цитированная литература

[1] P. Erdös, *Note on some elementary properties of polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), pp. 954-958.

[2] В. Л. Гончаров, *Теория интерполирования и приближения функций*, Москва 1954.

[3] С. Пашковский, *О полиномах, все корни которых вещественны*, Ann. Polon. Math. 5 (1958), стр. 165-194.

Reçu par la Rédaction le 4. 3. 1965