ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Sur la stabilité des solutions d'un système d'équations différentielles à paramètre retardé

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Dans la présente note nous établissons une condition suffisante pour la stabilité (au sens de Liapunow) de la solution $x \equiv 0$ du système d'équations

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big), \qquad h > 0\,, \tag{1}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f(t, x, y)$ continue.

La démonstration du théorème en question est basée sur la méthode des évaluations des solutions du système (1) par les solutions d'une équation différentielle sens retardement (cf. [3]). Dans la suite de ce travail nous allons donner un simple exemple d'une équation différentielle à paramètre retardé pour laquelle la méthode de Liapunow ne peut pas être utilisée, tandis que l'application de notre théorème donne la stabilite de la solution $x \equiv 0$.

Dans la note [1] Elsgolc a remarqué qu'il serait intéressant de chercher de nouvelles méthodes dans l'étude de la stabilité des solutions des équations à paramètre retardé, car la méthode de Liapunow ne peut être utilisé dans certains cas particuliers. Une modification de la méthode de Liapunow a été donnée par Krasowski (dans [2]), mais la nôtre est tout à fait différente.

§ 1. Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H_1. 1) *$f(t, x, y)$ est une fonction continue pour $t \geqslant 0$, x, y quelconques.*

2) *Il existe une fonction $V(x)$ positive pour $x \neq 0$ telle que*

$$V(x) \geqslant P > 0 \qquad \textit{pour } |x| \geqslant R_0\,. \tag{1.1}$$

$V(x)$ est une fonction de classe C^1

$$V_x(x) f(t, x, y) \leqslant K\big(V(x)\big) + R\big(t, V(y)\big) \tag{1.2}$$

où les fonctions $K(u)$ et $R(t, u)$ satisfont aux

HYPOTHÈSES H_2. 1) *$K(u)$ est de classe C^1 pour $-\infty < u < +\infty$ et $R(t, u)$ est continue pour $t \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ et de classe C^1 pour $t \geqslant 0$, $u > 0$, $v > 0$,*

$$K(0) = R(t, 0) = 0 \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{1.3}$$

$$\lim_{v\to\infty} R(t, v) = \infty, \tag{1.4}$$

$$R_v(t, u) > 0, \quad R_t(t, u) \leqslant 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0,\ u > 0, \tag{1.5}$$

$$K(u) + R(t, u) < 0 \quad \textit{pour} \quad u > 0,\ t \geqslant 0. \tag{1.6}$$

2) *La solution $u \equiv 0$ de l'équation*

$$u' = K(u) \tag{1.7}$$

est stable au sens de Liapunow. Supposons que $W(u)$ soit la fonction de Liapunow de l'équation (1.7) avec une dérivée compléte par rapport à (1.7) négativement définie, et qu'on ait

$$uW_u(u) > 0 \quad \textit{pour} \quad u \neq 0, \qquad W(u) \to \infty \quad \textit{pour} \quad |u| \to \infty. \tag{1.8}$$

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses H_1 et H_2 la solution $x \equiv 0$ du système (1) est stable au sens de Liapunow.*

La démonstration est basée sur les lemmes suivants:

§ 2. LEMME 1. *Supposons que*

H_3. *La fonction non négative $v(t)$*

$$v(t) \geqslant 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 \tag{2.1}$$

satisfait à l'inégalité suivante

$$v'(t) \leqslant K\big(t, v(t)\big) + R\big(t, v(t-h)\big) \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0, \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} v(t) = \varphi(t) \geqslant 0 \quad \textit{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0, \\ |\varphi(t)| \leqslant M \quad \textit{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

$\overline{H}_2$. *$K(t, u)$ est de classe C^1 pour $t \geqslant 0$, $-\infty < u < +\infty$, $R(t, u)$ est continue pour $t \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, et de classe C^1 pour $t \geqslant 0$, $u > 0$,*

$$K(t, 0) = R(t, 0) = 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0, \tag{2.4}$$

$$\lim_{u\to\infty} R(t, u) = \infty, \tag{2.5}$$

$$R_u(t, u) > 0, \quad R_t(t, u) \leqslant 0, \quad K_t(t, u) \leqslant 0 \quad \textit{pour } t \geqslant 0,\ u > 0 \tag{2.6}$$

$$K(t, u) + R(t, u) < 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0,\ u > 0. \tag{2.7}$$

Sous les hypothèses H_3 et $\overline{H}_2$ il existe pour chaque $M > 0$ suffisamment petit un $r > 0$ tel que

$$v(t) < w(t) \quad \textit{pour} \quad 0 < t < \infty \tag{2.8}$$

où $w(t)$ est la solution de l'équation

$$w' = K(t, w) + r - K(t, M), \tag{2.9}$$

$$w(0) = M > 0, \tag{2.10}$$

r peut être défini par la relation

$$r = \max\big(M, R(0, M+\eta_0) + K(0, M)\big), \tag{2.11}$$

η_0 quelconque positif.

LEMME 2. *Sous les hypothèses* H_2 *il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un $M_0 > 0$ tel que pour $0 < M \leqslant M_0$ la solution $w(t)$ de l'équation* (2.9) (*avec* (2.10)) *satisfait à l'inégalité*

$$0 < w(t) < \varepsilon \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

La démonstration du Lemme 1 est analogue à celle du théorème 1 de la note [3].

Nous démontrons que l'inégalité (2.8) a lieu dans un intervalle $\langle 0, \delta)(\delta > 0)$. La deuxième étape de la démonstration consiste à prolongement l'inégalité (2.8) de l'intervalle $\langle 0, \delta)$ sur un intervalle plus large.

Considérons la fonction $v(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant h$. Nous avons

$$0 \leqslant v(t-h) = \varphi(t-h) \leqslant M \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant h$$

et par suite en vertu de (1.5) et (2.2)

$$v'(t) \leqslant K\big(t, v(t)\big) + R(t, M) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant h. \tag{2.12}$$

Désignons par $\sigma(t)$ la fonction suivante

$$\sigma(t) = R^{-1}\big(t, r - K(t, M)\big). \tag{2.13}$$

En vertu de (2.4) et (2.7) on a

$$-K(t, M) > R(t, M) > 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0, u \geqslant 0$$

et par suite en vertu de (2.5) $\sigma(t)$ est défini par (2.13) dans tout l'intervalle $\langle 0, \infty)$. On a

$$R\big(t, \sigma(t)\big) = R^{-1}\Big(t, R\big(t, r - K(t, M)\big)\Big) = r - K(t, M)$$

et par suite en vertu de (2.9)

$$w'(t) = K\big(t, w(t)\big) + R\big(t, \sigma(t)\big). \tag{2.14}$$

On a

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= R^{-1}\big(0, r - K(0, M)\big) \\ &\geqslant R^{-1}[0, R(0, M+\eta_0) + K(0, M) - K(0, M)] = M + \eta_0 > M, \end{aligned}$$

d'où il vient

$$v'(0) \leqslant K\big(0, v(0)\big) + R(0, M) < K\big(0, v(0)\big) + R\big(0, \sigma(0)\big).$$

$v'(t)$ et $K(t, v(t)) + R(t, \sigma(t))$ étant continues nous avons

(2.15) $$v'(t) < K(t, v(t)) + R(t, \sigma(t)) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \delta$$

d'où en vertu de (2.14) et de l'inégalité

$$v(0) \leqslant M = w(0)$$

nous obtenons (cf. [4])

$$v(t) < w(t) \quad \text{pour} \quad 0 < t < \delta .$$

Dans tout l'intervalle $(0, \delta)$ où $v(t-h) < w(t-h)$ nous avons

$$v'(t) < K(t, v(t)) + R(t, w(t-h)) .$$

Nous démontrons que $w(t-h) < \sigma(t-h) \leqslant \sigma(t)$. Ainsi nous obtenons

$$v'(t) < K(t, v(t)) + R(t, \sigma(t))$$

d'où il résulte l'inégalité en question pour $t \geqslant \delta$.

Démontrons que $\sigma(t)$ est croissante. Considérons $\sigma'(t)$. En vertu de (2.13) on a

$$\sigma'(t) = R_t^{-1}(t, r - K(t, M)) - R_u^{-1}(t, r - K(t, M)) K_t(t, M) .$$

De la définition de $R^{-1}(t, u)$ il vient

$$R_t^{-1}(t, u) + R_u^{-1}(t, u) R_t[t, R^{-1}(t, u)] = 0$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= -R_v^{-1}(t, r - K(t, M)) \left[R_t\big(t, R^{-1}(t, r - K(t, M))\big) + K_t(t, M)\right] \\ &= -R_u^{-1}(t, r - K(t, M)) \left[R_t(t, \sigma(t)) + K_t(t, M)\right] \end{aligned}$$

d'où en vertu de (2.6)

(2.16) $$\sigma'(t) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$

et par suite $\sigma(t)$ est croissante (au sens large).

Envisageons la fonction $\omega(t) = \sigma(t) - w(t)$

$$\omega(0) = \sigma(0) - M \geqslant \eta_0 > 0 .$$

Prenons la dérivée de $\omega(t)$

$$\omega'(t) = \sigma'(t) - w'(t) = \sigma'(t) - \left[K(t, w(t)) + R(t, \sigma(t))\right]$$

d'où pour chaque t tel que $w(t) = \sigma(t)$ on a [en vertu de (2.7) et (2.16)] $\omega'(t) > 0$ pour chaque t tel que $\omega(t) = 0$. La supposition que

(2.17) $$\omega(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(t) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < t_0$$

implique

$$\omega'(t_0) > 0$$

et par suite

$$\omega(t) < 0 \quad \text{pour} \quad t_0 - \varepsilon \leqslant t < t_0$$

ce qui est incompatible avec (2.17) (cf. [4]). Nous avons ainsi démontré que

$$w(t) < \sigma(t) \tag{2.18}$$

dans tout intervalle où $w(t) > 0$.

Nous démontrons que $w(t) > 0$ (pour M suffisamment petit) dans tout l'intervalle $\langle 0, \infty)$. En vertu de (2.4), (2.6) et (2.7) nous avons

$$K(t, u) < 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0\,, \ u > 0\,. \tag{2.19}$$

M et r étant positifs nous avons

$$w'(t) = K\big(t, w(t)\big) + \big(r - K(t, M)\big) > K\big(t, w(t)\big)\,,$$

d'où en vertu de la théorie des inégalités différentielles (cf. [4]) nous avons

$$\sigma(t) > w(t) > \zeta(t) \quad \text{pour} \quad t > 0 \tag{2.20}$$

où $\zeta(t)$ est la solution de l'équation

$$\xi' = K(t, \xi) \tag{2.21}$$

telle que

$$\zeta(0) = w(0) = M > 0\,.$$

La fonction $K(t, u)$ étant de classe C^1 il y a pour l'équation (2.21) et chaque condition initiale $\xi(t_0) = \xi_0 \geqslant 0$ unicité des solutions et par suite en vertu de (2.4) l'unique solution $\xi(t)$ telle que $\xi(t_0) = 0$ est $\xi(t) \equiv 0$, d'où il vient que $\zeta(t) > 0$ pour $t \geqslant 0$, d'où en vertu de (2.20) et (2.18). $\zeta(t)$ est défini (pour M suffisamment petit dans tout l'intervalle $\langle 0, \infty)$ et par suite nous avons les inégalités (2.18) dans tout l'intervalle $\langle 0, \infty)$.

En vertu de (2.18), $\sigma(t)$ étant croissante, nous obtenons

$$v'(t) < K\big(t, v(t)\big) + R\big(t, \sigma(t)\big) \tag{2.22}$$

pour tous les $t > 0$ tels que $v(t-h) < w(t-h)$.

La supposition que $v(t) < w(t)$ dans un intervalle fini $(0, a)$ implique

$$v(a) = w(a) > 0\,, \quad v(t) < w(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < a \tag{2.23}$$

d'où il vient que pour $t = a$ sont satisfaites les inégalités

$$v(a-h) < w(a-h)$$

et par suite, ent vertu de (2.23), les inégalités

$$v'(a) < K\big(a, w(a)\big) + R\big(a, \sigma(a)\big) = w'(a)\,,$$

d'où

$$v(t) > w(t) \quad \text{pour} \quad a - \varepsilon < t < a$$

ce qui est incompatible avec (2.23). Nous avons ainsi démontré que $a = \infty$. La démonstration du lemme 1 est ainsi terminée.

§ 3. Démonstration du lemme 2. Nous démontrons que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\varrho_0 > 0$ et $\delta_0 > 0$ tel que pour $M \leqslant \delta_0$ et $r - K(M) < \varrho_0$ on a l'inégalité

$$0 < w(t) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty\,.$$

Envisageons un $\varepsilon_0 > 0$. La dérivée complète $\left.\dfrac{dW}{dt}\right._{(1.7)}$ étant négativement définie, il existe une fonction non négative $\overline{W}(u)$ telle que

$$\overline{W}(u) > 0 \quad \text{pour} \quad u \neq 0\,,\ \overline{W}(0) = 0\,, \tag{3.1}$$

$$\left.\frac{dW(u)}{dt}\right._{(1.7)} = W_u(u)K(u) \leqslant -\overline{W}(u)\,. \tag{3.2}$$

Posons par définition

$$a = \min_{|u|=\varepsilon_0} W(u) = \min\big(W(-\varepsilon_0),\, W(\varepsilon_0)\big)\,.$$

Désignons par S l'ensemble où $W(u) = a$ et

$$\beta = \min_{u \in S} |u|\,, \qquad \gamma_1 = \min_{|u|=\beta} \overline{W}(u)\,, \qquad \gamma_2 = \max_{|u|=\beta} |W_u(u)|\,, \qquad \varrho_0 = \gamma_1/2\gamma_2\,.$$

Nous avons ainsi pour l'équation

$$u' = K(u) + \varrho\,, \qquad 0 < \varrho \leqslant \varrho_0\,, \tag{3.}$$

$$\left.\frac{dW(u)}{dt}\right._{(3.3)} = W_u(u)K(u) + W_u(u)\,\varrho \leqslant -\overline{W}(u) + |W_u(u)|\,\varrho\,.$$

Nous avons pour $|u| = \beta$

$$|W_u(u)| \leqslant \gamma_2\,, \qquad -\overline{W}(u) \leqslant -\gamma_1$$

et par suite

$$\left.\frac{dW(u)}{dt}\right._{(3.3)} \leqslant -\gamma_1 + \gamma_2\frac{\gamma_1}{2\gamma_2} = -\frac{1}{2}\gamma_1 < 0 \qquad \text{pour} \qquad |u| = \beta\,,\ 0 < \varrho \leqslant \varrho_0$$

d'où il vient que pour chaque solution $u(t)$ de (3.3) telle que

$$u(t_0) = \beta \qquad (t_0 \geqslant 0)$$

on a

$$W\big(u(t)\big) > W\big(u(t_0)\big) \qquad \text{pour} \qquad t_0 - \eta_0 \leqslant t < t_0\,,$$

$$W\big(u(t)\big) < W\big(u(t_0)\big) \qquad \text{pour} \qquad t_0 < t \leqslant t_0 + \eta_0\,.$$

La fonction $W(u)$ étant croissante pour $u > 0$, on a

$$u(t) > u(t_0) = \beta \qquad \text{pour} \qquad t_0 - \eta_0 \leqslant t < t_0\,,$$

$$u(t) < u(t_0) = \beta \qquad \text{pour} \qquad t_0 < t \leqslant t_0 + \eta_0$$

et par suite pour chaque solution telle que

$$u(0) < \beta \leqslant \varepsilon_0$$

on a

$$u(t) < \beta \leqslant \varepsilon_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty .$$

Il suffit donc de prendre

$$\varrho_0 = \gamma_1/2\gamma_2, \qquad \delta_0 = \beta/2 ,$$

c'est-à-dire

$$M \leqslant \beta/2 \quad \text{et} \quad r - K(M) < \gamma_1/2\gamma_2$$

et par suite il suffit de choisir M et η_0 de telle manière que

$$M \leqslant \beta/2, \qquad M - K(M) < \gamma_1/2\gamma_2, \qquad R(0, M + \eta_0) < \gamma_1/2\gamma_2 ,$$

$K(u)$ et $R(0, M)$ étant continues par rapport à M et $K(0) = R(0, 0) = 0$ la démonstration du lemme 2 se trouve terminée.

§ 4. Démonstration du théorème 1. En vertu du lemme 2 pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut choisir $M > 0$ tel que la solution $w(t)$ de l'équation

$$w' = K(w) + r - K(M), \qquad w(0) = M$$

satisfait à l'inégalité

$$0 < w(t) < \varepsilon .$$

En vertu du lemme 1 nous avons pour chaque solution $x(t)$ et pour la fonction $v(t)$

$$v(t) = V\big(x(t)\big) \tag{4.1}$$

tels que

$$v(t) \leqslant M \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0 \tag{4.2}$$

l'inégalité

$$0 \leqslant v(t) \leqslant w(t) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty . \tag{4.3}$$

Considérons un $0 < \mu_0 < R_0$ tel que

$$V(x) < P \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant \mu_0 . \tag{4.4}$$

Posons

$$\varepsilon_0 = \min_{\mu_0 \leqslant |x| \leqslant R_0} V(x) .$$

Choisissons un M_0 tel qu'on ait (4.3) avec $M = M_0$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$. La fonction $V(x)$ étant continue, il existe un $\bar{\delta} > 0$ tel que $\bar{\delta} < \mu_0$ et $V(x) < M_0$ pour $|x| \leqslant \bar{\delta}$. Pour des $x(t)$ tels que

$$|x(t)| \leqslant \bar{\delta} \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0$$

on a

$$0 \leqslant v(t) = V\big(x(t)\big) \leqslant M_0 \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0$$

et par suite

$$0 \leqslant v(t) = V\big(x(t)\big) < w(t) < \varepsilon_0 = \min_{\mu_0 \leqslant |x| \leqslant R_0} V(x)$$

d'où il vient que

$$|x(t)| < \mu_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty;$$

μ_0 étant quelconque, la démonstration de la stabilité est terminée.

§ 5. Exemple. Considérons l'équation

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) + g\big(t, x(t-h)\big) \tag{5.1}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, $g = (g_1, \dots, g_n)$, $h > 0$.

Supposons que

$$f(t, 0) = g(t, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$

f, g continues et telles que

$$xf(t, x) \leqslant -a|x|^2, \quad a > 0\,,$$
$$|g(t, y)| \leqslant b(t)|y|\,,$$
$$0 < b(t) < a, \quad b'(t) \leqslant 0\,.$$

Posons $V(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |x|$. Nous avons

$$\frac{dV}{dt}_{(5.1)} = \frac{xf(t, x)}{|x|} + \frac{x}{|x|} g(t, y) \leqslant -a|x| + b(t)|y| = -aV(x) + b(t)V(y)\,,$$

$$K(u) + R(t, u) = -au + b(t)u < 0 \quad \text{pour} \quad u > 0\,.$$

L'équation (1.7) est de la forme

$$u' = -au$$

et par suite $x = 0$ est une solution stable au sens de Liapunow de l'équation (5.1).

Remarque 1. Pour l'équation

$$u'(t) = -au(t) + bu(t-h) \tag{5.2}$$

il n'existe pas de fonction de Liapunow avec une dérivée complète négative pour $|u| \leqslant R_0$, car de l'inégalité

$$V_t(t, u) + V_u(t, u)(-au + bv) < 0$$

il vient

$$V_u(t, u)au > V_t(t, u) + V_u(t, u)vb\,,$$

d'où, v étant quelconque, il vient que

$$V_u(t, u) = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$$

et, par suite, b étant différent de zéro, $V(t, u) \equiv V(t, 0) \equiv 0$. La fonction $V(t, u)$ n'est donc pas positivement définie.

§ 6. Le lemme 1 permet d'obtenir aussi d'autres théorèmes concernant la stabilité. Nous démontrons les théorèmes suivants.

THÉORÈME 2. *Admettons les hypothèses* H_1, $H_2 1)$ *et les Hypothèses suivantes:*

HYPOTHÈSES H_4. *La fonction* $K(u)$ *est strictement décroissante. Désignons par* u_ϱ *la solution de l'équation*

$$K(u_\varrho) + \varrho = 0 \tag{6.1}$$

et supposons que pour chaque $0 < u_0 \neq u_\varrho$ *on ait*

$$\left| \int_{u_0}^{u_\varrho} \frac{du}{K(u) + \varrho} \right| = \infty , \tag{6.2}$$

$$u_\varrho > \varrho . \tag{6.3}$$

Sous les hypothèses H_1, $H_2 1)$ *et* H_4 *la solution* $x = 0$ *de l'équation* (1) *est stable au sens de Liapunow.*

Démonstration. En vertu des hypothèses H_1 et $H_2 1)$ nous avons pour chaque solution $x(t)$, telle que $V(x(t)) \leqslant M$ pour $-h \leqslant t \leqslant 0$, inégalité (2.8) (cf. lemme 1) et, par suite, pour démontrer la stabilité, il suffit de prouver que

$$w(t) \leqslant u_{r-k(M)} \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant 0 ,$$
$$\lim_{M \to 0} \dot{u}_{r-k(M)} = 0 .$$

La deuxième relation résulte de la continuité de $K(u)$, $(K(0) = 0.)$ De l'hypothèse (6.2) il s'ensuit que les solutions $u(t)$ de l'équation

$$u' = K(u) + \varrho , \qquad u(0) \neq u_\varrho \tag{6.4}$$

ne coupent pas la droite $u = u_\varrho$ pour t fini. La fonction $K(u)$ étant decroissante, on a

$$K(u) + \varrho < 0 \qquad \text{pour} \qquad u > u_\varrho ,$$
$$K(u) + \varrho > 0 \qquad \text{pour} \qquad u < u_\varrho$$

et, par suite, dans le cas où $0 < u(0) < u_\varrho$, la solution $u(t)$ de (6.4) est croissante pour $t \geqslant 0$ et on a

$$0 < u(0) < u(t) < u_\varrho . \tag{6.5}$$

Posons $\varrho = r - K(M)$. En vertu de (2.11) on a $\varrho = r - K(M) \geqslant \geqslant M - K(M) > M$ et en vertu de (6.3)

$$u_\varrho > \varrho > M$$

et, par suite, $w(t)$ est la solution de (6.4) telle que $w(0) = M < u_\varrho$, d'où en vertu de (6.5), on a

$$0 < M < w(t) < u_\varrho = u_{r-K(M)} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty$$

et par suite

$$0 \leqslant u(t) < w(t) < u_{r-K(M)};$$

de la convergence $u_{r-K(M)} \to 0$ pour $M \to 0$ il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut choisir un $M_0 > 0$ tel que

$$0 \leqslant u(t) < w(t) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0,\ 0 < M \leqslant M_0 .$$

La stabilité est ainsi démontrée.

§ 7. THÉORÈME 3. *Admettons les hypothèses* H_1, $\overline{\mathrm{H}}_2$ *et les hypothèses suivantes:*

HYPOTHÈSES H_5. *Pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $M_\varepsilon > 0$ *tel que*

$$K(t, \varepsilon) + r - K(t, M) < 0 \quad \text{pour} \quad 0 < M \leqslant M_\varepsilon . \tag{7.1}$$

Sous les hypothèses H_1, $\overline{\mathrm{H}}_2$ *et* H_5 *la solution* $x \equiv 0$ *de* (1) *est stable* (*au sens de Liapunow*).

Démonstration. De l'inégalité (7.1) il résulte que (cf. [4]) pour chaque $\varepsilon > 0$, $0 < M < M_\varepsilon$ on a

$$0 \leqslant V\big(x(t)\big) < w(t) < \varepsilon$$

(où $w(0) = M$, $V\big(x(t)\big) \leqslant M$ pour $-h \leqslant t \leqslant 0$) d'où on obtient facilement que pour chanque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|x(t)| < \varepsilon$ pour $t \geqslant 0$ et $|x(t)| \leqslant \delta$ pour $-h \leqslant t \leqslant 0$.

Travaux cités

[1] Л. Э. Эльсгольц, *Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений*, Успехи Мат. Наук 9 (4) (62) (1954), p. 95-112.

[2] Н. Н. Красовский, *Обобщение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению*, Прикладная Математика и Механика, 20 (1956), p. 255-265.

[3] Z. Mikolajska, *Sur l'allure asymptotique des solutions d'une équation différentielle avec le paramètre retardé*, Ann. Polon. Math. 16 (1965), p. 213-219.

[4] J. Szarski, *Differential inequalities*, Warszawa 1965.

Reçu par la Rédaction le 25. 4. 1966