ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1965)

Sur la convergence des approximations successives pour les équations différentielles ordinaires au cas de l'espace de Banach

par T. WAŻEWSKI (Kraków)

Envisageons l'équation de la forme (1.2) et, pour simplifier, admettons provisoirement la suivante

HYPOTHÈSE K. *La fonction* $f(x,y)$ *intervenant dans* (1.1) *est réelle, continue et bornée sur le plan réel* P *tout entier. Par chaque point de* P *passe une intégrale unique de* (1.1).

Soit $y_n(x)$ la suite des approximations successives de la forme (2.4). M. Müller a montré dans [2] que l'Hypothèse K ne suffit pas pour la convergence de cette suite. J. Dieudonné a prouvé dans [1] que, dans l'Hypothèse K, cette suite converge vers une solution de (1.2) alors et seulement alors lorsque la suite des différences $y_n(x)-y_{n-1}(x)$ tend vers la fonction identiquement nulle lorsque n tend vers l'infini. Sa démonstration s'appuie sur le lemme de Arzela relatif aux suites des fonctions également continues.

Le but de la présente note est d'étendre ce résultat de Dieudonné au cas où les valeurs de y et $f(x,y)$ appartiennent à un espace B de Banach, la variable x étant réelle. À cet effet nous admettons que f satisfait à l'inégalité (2.1). Il est important de souligner que nous n'admettons pas que la fonction $h(t,u)$ intervenant dans cette inégalité soit croissante par rapport à u, car dans le cas de h croissant en u la suite $y_n(x)$ est forcément convergente (cf. [7]).

Suivant [6] l'inégalité (2.1) garantit l'unicité et l'existence des intégrales de (1.1) cependant on ne sait pas si elle garantit la convergence de $y_n(x)$. Néanmoins, en généralisant le résultat de Dieudonné, on peut prouver (cf. Théorème 1) que $y_n(x)$ converge alors et seulement alors lorsque la suite des différences $y_n(x)-y_{n-1}(x)$ tend vers la fonction identiquement nulle. Le lemme de Arzela n'étant pas juste lorsque les valeurs des fonctions appartiennent à l'espace de Banach la démonstration nécessite une méthode différente de celle de Dieudonné.

Le Théorème 1 a été communiqué sans démonstration au cours du Congrès des Mathématiciens Hongrois à Budapest (août 1960).

§ 1. Notations et hypothèses préliminaires. R désigne la classe des nombres réels, B — un espace linéaire complet de Banach à norme homogène, $|z|$ — la norme de z, lorsque $z \in B$, et la valeur absolu de z, lorsque $z \in R$.

Nous introduisons les équations différentielles ordinaires

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

$$u' = h(x, u). \tag{1.2}$$

Nous admettons que

$$x \in R, \quad u \in R, \quad h \in R, \quad y \in B, \quad f \in B \tag{1.3}$$

ce qui veut dire que les variables x, u et les valeurs de h sont réelles, que y varie dans B et les valeurs de $f(x, y)$ appartiennent à B.

§ 2. Hypothèse H. $f(x, y)$ est continue et bornée dans le cylindre borné

$$V: \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \ |y| \leqslant r \ (0 < r < +\infty),$$

$|f|$ possède dans V la borne supérieure finie M. La fonction $h(x, u)$ est continue dans la demi-bande fermée

$$E: \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \ 0 \leqslant u < +\infty.$$

On a $h(x, u) \geqslant 0$ dans E, $h(x, 0) = 0$ dans l'intervalle fermé $[0, r]$ et par l'origine $(0, 0)$ passe une intégrale unique (identiquement nulle) de l'équation (1.2). Pour $(x, y) \in V$, $(x, z) \in V$ on a

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant h(x, |y - z|). \tag{2.1}$$

Nous posons

$$a = r/(M+2) < r \tag{2.2}$$

et introduisons le cylindre $W \subset V$

$$W: \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \ |y| \leqslant r.$$

Nous désignons par $J(a)$ l'intervalle fermé $[0, a]$. La fonction $y_0(x)$ aux valeurs appartenant à B est continue dans $J(a)$ et

$$|y_0(x)| \leqslant r \quad \text{pour} \quad x \in J(a). \tag{2.3}$$

Les approximations successives $y_n(x)$ sont définies par les formules

$$y_n(x) = \int_0^x f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\, dt \quad \text{pour} \quad x \in J(a). \tag{2.4}$$

Théorème 1. *Dans l'Hypothèse* H *ont lieu les propriétés suivantes:*

Propriété P(1). *Pour chaque indice i la fonction $y_i(x)$ est définie dans $J(a)$, satisfait à l'inégalité*

$$|y_i(x)| \leqslant r \quad pour \quad x \in J(a) \tag{2.5}$$

et le diagramme de $y = y_i(x)$ est situé dans le cylindre W.

Propriété P(2). *Il existe une intégrale unique*

$$y = g(x), \quad g(0) = 0 \tag{2.6}$$

de l'équation (1.1), *elle est définie dans $J(a)$ et son diagramme est situé dans le cylindre W.*

Propriété P(3). *Pour $n \to \infty$ les deux convergences uniformes suivantes*

$$y_n(x) \rightrightarrows g(x) \quad dans \quad J(a), \tag{2.7}$$

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) \rightrightarrows 0 \quad dans \quad J(a) \tag{2.8}$$

ne peuvent avoir lieu que simultanément.

Démonstration. P(1) a évidemment lieu pour $i = 0$ (cf. (2.3)). En admettant que P(1) ait lieu pour un certain i on vérifie, en s'appuyant sur (2.4) et sur la définition de M et a, qu'elle a lieu pour $i+1$. La propriété P(2) a lieu en raison du Théorème 1 inséré dans [6]. Nous passons à la démonstration de P(3). La relation (2.8) constitue une conséquence évidente de (2.7). Pour terminer la démonstration nous admettons que (2.8) ait lieu. Il reste à prouver (2.7).

On a pour $x \in J(a)$ les identités

$$g'(x) = f\big(x, g(x)\big), \quad y'_n(x) = f\big(x, y_{n-1}(x)\big)$$

et, par suite

$$\big(y_n(x) - g(x)\big)' = f\big(x, y_{n-1}(x)\big) - f\big(x, y_n(x)\big) + f\big(x, y_n(x)\big) - f\big(x, g(x)\big)$$

d'où en vertu de (2.1)

$$\big|\big(y_n(x) - g(x)\big)'\big| \leqslant h\big(x, |y_n(x) - g(x)|\big) + h\big(x, |y_n(x) - y_{n-1}(x)|\big).$$

En désignant le nombre dérivé supérieur à droite de $k(x)$ par $D^+k(x)$ on a (cf. [8])

$$D^+|y_n(x) - g(x)| \leqslant \big|\big(y_n(x) - g(x)\big)'\big|$$

donc pour $x \in J(a)$ on a

$$D^+|y_n(x) - g(x)| \leqslant h\big(x, |y_n(x) - g(x)|\big) + h\big(x, |y_n(x) - y_{n-1}(x)|\big). \tag{2.9}$$

Introduisons l'équation différentielle auxiliaire réelle

$$u' = h(x, u) + h(x, |y_n(x) - y_{n-1}(x)|). \tag{2.10}$$

Comme $h(x, u)$ est continue dans E, $h(x, 0) \equiv 0$ et a lieu (2.8) donc $h(x, |y_n(x) - y_{n-1}(x)|)$ tend uniformément vers zéro dans $J(a)$. Pour n tendant vers ∞ le deuxième membre de (2.10) tend donc, dans chaque compact, uniformément vers le deuxième membre de l'équation (1.2) dont l'unique intégrale issue de l'origine est identiquement nulle. In s'ensuit, en vertu d'un théorème connu, que la suite des intégrales supérieures $z_n(x)$ issues de l'origine de l'équation (2.10) tend uniformément vers zéro dans $J(a)$. Mais en rapprochant l'inégalité différentielle (2.9) de l'équation (2.10) on obtient (cf. [5]), dans $J(a)$, l'inégalité $|y_n(x) - g(x)| \leqslant z_n(x)$, d'où résulte immédiatement la relation (2.7), ce qui termine la démonstration.

§ 3. L'inégalité (2.1) constitue la condition suffisante „du type LP" (c.-à-d. du type de Lipschitz-Perron) pour l'unicité des intégrales de (1.1) issues d'un point initial quelconque. Dans les critères d'unicité du type LP l'hypothèse essentielle consiste en ce que la fonction identiquement nulle constitue l'unique solution $u(x)$ de l'équation de comparaison (1.2) pour laquelle on a

(*cas du type* LP) $\qquad u(0) = 0\,.$

Si, en envisageant l'équation de comparaison (1.2), ont fait abstraction des points (x, u) pour lesquels $x = 0$ et si l'on admet que la fonction identiquement nulle constitue l'unique intégrale $u(x)$ de l'équation de comparaison (1.2) pour laquelle on a

(*cas du type* NK) $\qquad \lim\limits_{x=0} u(x)/x = 0$

alors l'inégalité (2.1) constitue pour l'équation (1.1) la condition suffisante d'unicité „du type NK" (c.-à-d. du type de Nagumo-Kamke).

Chaque condition du type LP est évidemment du type NK. C. Olech a prouvé qu'a lieu, aussi la relation inverse en un certain sens: Si pour une équation (1.1) avec le deuxième membre continu est vérifiée une condition du type NK (relativement à une équation de comparaison (1.2)) alors on peut trouver une équation de comparaison (avec une autre fonction h dont la forme dépend de la forme particulière de $f(x, y)$) qui fournit pour (1.1) une condition d'unicité (2.1) du type LP (cf. [3], [4]).

En s'appuyant sur cette remarque et sur le Théorème 1, on obtient immédiatement le théorème suivant qui est plus précis.

THÉORÈME 2. *Si la fonction f est continue dans E, $|f|$ est borné dans E par M et pour l'équation* (1.1) *a lieu une condition d'unicité* (2.1) *du type de Lipschitz-Perron ou du type de Nagumo-Kamke alors les relations* (2.7) *et* (2.8) *ne peuvent être vérifiées qu'à la fois.*

§ 4. Le Théorème 1 n'est pas intéressant au cas où la fonction $h(x, u)$ est croissante en u, car la suite des approximations successives (2.4) est alors forcément convergente (cf. [7]). Cette remarque conduit au suivant

Problème LP. Peut-on construire la fonction $f(x, y)$, la fonction $h(x, u)$ (non croissante en u) et l'approximation initiale $y_0(x)$ qui satisfont à l'Hypothèse H du Théorème 1 et celà d'une telle façon que la suite des approximations successives (2.4) ne soit pas convergente dans l'intervalle $J(a)$?

Travaux cités

[1] J. Dieudonné, *Sur la convergence des approximations successives*, Bull. Sciences Math. 69 (1945), p. 62-72.

[2] M. Müller, *Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 619-645.

[3] C. Olech, *Remarks concerning criteria for uniqueness of solutions of ordinary differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), p. 661-666.

[4] — *On existence and uniqueness of solutions of ordinary differential equations in the case of Banach spaces*, ibidem, p. 667-673.

[5] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), p. 112-166.

[6] — *Sur l'existence et l'unicité des intégrales des équations différentielles ordinaires au cas de l'espace de Banach*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), p. 301-305.

[7] — *Sur une extension du procédé de I. Jungermann pour établir la convergence des approximations successives au cas des équations différentielles ordinaires*, ibidem, 8 (1960), p. 43-46.

[8] — *Une modification du théorème de l'Hôpital liée au problème du prolongement des intégrales des équations différentielles*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), p. 1-12.

Reçu par la Rédaction le 20. 1. 1964