ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIV (1977)

Über Randwertprobleme für Gleichungen vom gemischten Typ im R^3 (II)

von M. SCHNEIDER (Berlin)

Zusammenfassung. Für die Differentialgleichung vom gemischten Typ

$$L[u]:=k(x_3)(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})+u_{x_3x_3}+r(x_i)=0$$

mit $k(x_3)\gtreqless 0$ für $x_3\gtreqless 0$ wird ein Eindeutigkeitssatz für quasi-reguläre Lösungen des Frankl–Morawetz Problems hergeleitet. Hierbei werden die im Teil I der Arbeit (erschienen in dieser Zeitschrift) hergeleiteten Rand- und Koeffizientenforderungen für die Gültigkeit einer a priori Abschätzung für eine Lösung von $L[u]=0$ benutzt. Für die Eindeutigkeitsaussage ergeben sich unter anderen die Forderungen $u_{x_3}(x_i)=0\big(|k(x_3)|^{1/2}\big)$, $r(x_i)=o\big(|k(x_3)|\big)$ für $x_3\to\pm 0$.

Im einfach zusammenhängenden, beschränkten Gebiet $G\subset \boldsymbol{R}^3$ ist der Differentialoperator

$$\tilde{L}[u]:=k(x_3)(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})+u_{x_3x_3}+r(x_i)u \tag{1}$$

mit $k(x_3)\gtreqless 0$ für $x_3\gtreqless 0$ gegeben. G wird für $x_3>0$ durch eine stückweise glatte Fläche $\Phi^{(0)}(x_i)=0$ begrenzt – mit dem Schnitt $x_1^2+x_2^2=1$ für $x_3=0$ – und für $x_3<0$ durch die charakteristische Fläche von (1)

$$\Phi^{(1)}(x_i):=-(x_1^2+x_2^2)^{1/2}-\int\limits_0^{x_3}\big(-k(t)\big)^{1/2}dt=0, \tag{3}$$

sowie einer stückweisen glatten Fläche $\Phi^{(3)}(x_i)=0$ mit dem Schnitt $x_1^2+x_2^2=1$ für $x_3=0$, die der Bedingung

$$k(x_3)\big(\Phi_{x_1}^{(3)^2}+\Phi_{x_2}^{(3)^2}\big)+\Phi_{x_3}^{(3)^2}\geqslant 0 \tag{4}$$

genügt. $\Phi^{(3)}=0$ kann mit der charakteristischen Fläche

$$\Phi^{(2)}(x_i):=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}-1-\int\limits_0^{x_3}\big(-k(t)\big)^{1/2}dt=0 \tag{2}$$

zusammenfallen. Beim *Frankl–Morawetz Problem* werden Bedingungen gesucht, so daß für eine „quasi-reguläre” Lösung $u(x_i)$ von $\tilde{L}[u]=0$ mit $u|_{\Phi^{(0)}\cup\Phi^{(3)}}=0$ folgt $u\equiv 0$.

Bemerkung 7. Die Numerierung aus (I) wird beibehalten und entsprechend fortgesetzt. Für „quasi-regulär" siehe die folgende Definition.

In der Note (I) wurden für das Frankl–Morawetz Problem hinreichende Bedingungen (34), (35) und (36) für die Gültigkeit von

$$0 \leqslant \iint\limits_{\partial G_1 \cup \partial G_2} \Omega = \iiint\limits_{G_1 \cup G_2} [d, \Omega] \leqslant 0 \tag{12}$$

mit Ω und $[d, \Omega]$ nach (8) und (10) angegeben. Die Aufgabe besteht somit darin, Funktionen a^k; $k = 0, 1, 2, 3$ derart zu bestimmen, daß (12) gilt und zusätzlich folgt $u \equiv 0$.

Definition. Eine Funktion $u(x_i)$ wird quasi-reguläre Lösung des Frankl–Morawetz Problems in G genannt, falls

a) $u(x_i) \in C^0(\bar{G}) \cap C^1(G_1) \cap C^1(G_2)$ Lösung von $\tilde{L}[u] = 0$ in $G_1 = G \cap \cap \{x_3 > 0\}$ und $G_2 = G \cap \{x_3 < 0\}$ ist,

b) $u_{x_1}, u_{x_2}, \frac{(k')^{\frac{1}{2}}}{k} u_{x_3} \in L^2(G_1) \cap L^2(G_2)$ $(k' > 0)$; u_{x_1}, u_{x_2} stetigen Anschluß für $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 < 1$ haben; $u_{x_3}(x_i) = o(|k(x_3)|^{\frac{1}{2}})$ für $x_3 \to 0 \pm$ gilt;

c) auf die Integrale $\iiint u\tilde{L}[u]d\tau$, $\iiint u_{x_i}\tilde{L}[u]d\tau$, jeweils erstreckt über G_1 und G_2 der Gaußsche Satz anwendbar ist, wobei die auftretenden Flächenintegrale erstreckt über innere Flächen, die gegen ∂G_1 und ∂G_2 konvergieren, existieren.

Satz 3.

Voraussetzung. (i) $k(x_3) \gtreqless 0$ *für* $x_3 \gtreqless 0$, $k(x_3) \in C^0(\bar{G}) \cap C^1(\bar{G} \cap \{x_3 \neq 0\})$, $k'(x_3) > 0$ *in* $\bar{G} \cap \{x_3 \neq 0\}$, $\lim\limits_{x_3 \to 0\pm} \frac{k}{k'} = 0$.

(ii) $r(x_i) \in C^0(\bar{G}) \cap C^1(G_1) \cap C^1(G_2)$; $r(x_i)|_{\Phi(1)} \geqslant 0$; $r(x_i) = o(|k(x_3)|)$ *für* $x_3 \to 0 \pm$; *mit* $\delta = \inf\limits_{x \in \bar{G}} \left\{ \frac{1}{|k(x_3)|^2} \right\}$ *gelte* $F_1(x_i) := -[r(\delta k + 1/k)]_{x_3} \geqslant 0$ *in* G_1, $F_1(x_i) \in L^1(G_1)$; $F_2(x_i) := -[r(-\delta k + 1/k)]_{x_3} \geqslant 0$ *in* G_2, $F_2(x_i) \in L^1(G_2)$.

(iii) *Für die Randflächen gelte*

$$\Phi^{(0)}_{x_3}|_{\Phi(0)} \geqslant 0; \qquad \Phi^{(3)}_{x_3}|_{\Phi(3)} \leqslant 0.$$

Behauptung. *Ist* $u(x_i)$ *quasi-reguläre Lösung von* $\tilde{L}[u] = 0$ *in* G *mit* $u|_{\Phi(0) \cup \Psi(3)} = 0$, *so gilt* $u \equiv 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, zunächst fest gewählt. Dann wird der Gaußsche Satz auf die Form (8) Ω in $G \cap \{x_3 > \varepsilon\}$ und $G \cap \{x_3 < -\varepsilon\}$ angewendet.

(i) $G \cap \{x_3 > \varepsilon\}$: Mit

$$a^0 = a^1 = a^2 = 0, \qquad a^3 = \delta k(x_3) + \frac{1}{k(x_3)} \tag{38}$$

folgt unter Beachtung von (10) und (11)

$$(39)\qquad 2\iiint\limits_{G\cap\{x_3>\varepsilon\}} a^3 u_{x_3}\tilde{L}[u]\,d\tau = \iint\limits_{\Phi^{(0)}} \{k(x_3)(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)+u_{x_3}^2\}\,a^3[dx^1, dx^2]+$$
$$+\iint\limits_{x_3=\varepsilon} (-a^3)\{2u_{x_3}^2+ru^2-k(x_3)(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)-u_{x_3}^2\}\,[dx^2, dx^1]+$$
$$+\iiint\limits_{G\cap\{x_3<\varepsilon\}} u^2\{-[r(\delta k+1/k)]_{x_3}\}\,d\tau+$$
$$+\iiint\limits_{G\cap\{x_3>\varepsilon\}} \{2\delta k k'(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)+k'(-\delta+1/k^2)u_{x_3}^2\}\,d\tau.$$

(ii) $G\cap\{x_3<-\varepsilon\}$: Mit

$$(40)\qquad a^0 = a^1 = a^2 = 0,\qquad a^3 = \delta\big(-k(x_3)\big)+\frac{1}{k(x_3)}$$

gilt unter Beachtung von (19), (32) und Lemma 3

$$(41)\qquad 2\iiint\limits_{G\cap\{x_3<-\varepsilon\}} a^3 u_{x_3}\tilde{L}[u]\,d\tau = \iint\limits_{\Phi^{(1)}} u^2(-a^3)\,r\big(-k(x_3)\big)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\varrho}\,[dx^3, d\varphi]+$$
$$+\iint\limits_{\Phi^{(1)}} \bar{Q}(u_{x_i}, u_{x_j})\,\frac{1}{\varrho}\,[dx^3, d\varphi]+$$
$$+\iint\limits_{\Phi^{(3)}} (a^3 u_{x_3})^2\,\frac{k(x_3)(\Phi_{x_1}^{(3)2}+\Phi_{x_2}^{(3)2})+\Phi_{x_3}^{(3)2}}{a^3\Phi_{x_3}^{(3)}}\,\frac{1}{\varrho}\,[d\varphi, dx^3]+$$
$$+\iint\limits_{x_3=-\varepsilon} a^3\{2u_{x_3}^2+ru^2-k(x_3)(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)-u_{x_3}^2\}\,[dx^1, dx^2]+$$
$$+\iiint\limits_{G\cap\{x_3<-\varepsilon\}} \{2\delta(-k)k'(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)+k'(\delta+1/k^2)u_{x_3}^2\}\,d\tau+$$
$$+\iiint\limits_{G\cap\{x_3<-\varepsilon\}} u^2\big\{-\big[r\big(\delta(-k)+1/k\big)\big]_{x_3}\big\}\,d\tau.$$

Ist $u(x_i)$ quasi-reguläre Lösung, so existieren die in (39) und (41) auftretenden Integrale und es folgt überdies $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\big(\iint\limits_{x_3=\varepsilon}\Omega+\iint\limits_{x_3=-\varepsilon}\Omega\big)=0$; unter den Voraussetzungen des Satzes 3 folgt sodann aus (39) und (41) $u\equiv 0$.

Für das Literaturverzeichnis siehe Note (I), S. 12.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
FACHBEREICH 3 — MATHEMATIK, BERLIN

Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1974