ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLV (1985)

Remarques sur un problème de M. Biernacki relatif aux fonctions subordonnées dans le cas des majorantes convexes

par Z. Bogucki et J. Zderkiewicz (Lublin)

Abstract. The aim of the paper is to prove that if we additionally assume in inequality (2) that $f(z)/f'(0) \in S^*$, then the number $R = 2-\sqrt{3}$ cannot be enlarged and that if $f(z)/f'(0) \in S^c$, then $R \leqslant \frac{1}{3}$.

Désignons par S la famille des fonctions $f(z) = z+a_2 z^2+\ldots$, analytiques et univalentes dans le cercle unité K, et soient S^c resp. S^* les sous-classes de la famille S de toutes les fonctions qui représentent le cercle K sur des domaines convexes resp. étoilés par rapport au point $w = 0$.

Soit Ω la famille des fonctions ω analytiques dans le cercle K et satisfaisant dans celui-ci aux conditions $\omega(0) = 0$, $0 \leqslant \omega'(0) < 1$, $|\omega(z)| < 1$.

Dans le travail [3] il a été démontré que si $\omega \in \Omega$, $F \in S$, on a

$$(1) \qquad (|z| < 3-\sqrt{8}) \Leftrightarrow (|f'(z)| < |F'(z)|), \quad f(z) = F(\omega(z)).$$

Dans [2] l'équivalence (1) a été établie même dans le cas où $f(z)/f'(0) \in S^*$. Des résultats obtenus dans [1] il résulte que si $\omega \in \Omega$ et $F \in S^c$, on a

$$(2) \qquad (|z| < 2-\sqrt{3}) \Leftrightarrow (|f'(z)| < |F'(z)|), \quad f(z) = F(\omega(z)).$$

Dans cette note nous ferons deux remarques à propos de l'équivalence (2).

Remarque 1. L'équivalence (2) a lieu aussi dans le cas où $f(z)/f'(0) \in S^*$.

Remarque 2. Si $f(z)/f'(0) \in S^c$ et si $|f'(z)| < |F'(z)|$ pour $|z| < R$, on a $R \leqslant \frac{1}{3}$.

Justifions d'abord la remarque 1. Pour cela il suffira de montrer que si r est quelconque fixé et $2-\sqrt{3} < r < 1$, il existe des fonctions $\varphi \in \Omega$ et $G \in S^c$ telles que $g(z)/g'(0) = G(\varphi(z))/\varphi'(0) \in S^*$ et que

$$|g'(-r)| > |G'(-r)|.$$

Soit $u = \varphi(z)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$, une fonction qui effectue la représentation conforme du cercle K sur le cercle K entaillé le long d'un segment de l'axe réel dont l'une des extrémités est le point $u = 1$. On constate aisément que φ est la solution de l'équation

$$\frac{u}{(1+u)^2} = (1-t)\frac{z}{(1+z)^2}, \qquad 0 < t < 1,$$

d'où il résulte que dans le cercle K on a

$$\varphi(z) = z - tz\frac{1+z}{1-z} + O(t^2).$$

Si maintenant $F \in S^c$, on aura

$$f(z) = F(\varphi(z)) = F(z) - tzF'(z)\frac{1+z}{1-z} + O(t^2)$$

et

(3) $$|f'(z)| = |F'(z)|\left(1 - t\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{F'(z)}\left(zF'(z)\frac{1+z}{1-z}\right)'\right]\right) + O(t^2).$$

Soit

$$G(z) = \frac{z}{1-z} \quad \text{et} \quad g(z) = G(\varphi(z));$$

on voit aisément que $g(z)/g'(0) \in S^*$. De l'égalité (3) on obtient, pour $z = -r < 0$,

(4) $$|g'(-r)| = |G'(-r)|\left[1 - t\frac{1-4r+r^2}{(1+r)^2}\right] + O(t^2).$$

Comme $1-4r+r^2 < 0$ lorsque $2-\sqrt{3} < r < 1$, on tire de (4) pour t suffisamment petits,

$$|g'(-r)| > |G'(-r)|, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Pour justifier la remarque 2 on construit une fonction qui représente le cercle K sur le cercle $\Delta \subset K$ tangent à K au point $z = -1$ et contenant le point $z = 0$. On voit sans peine que $\omega(z)$ admet dans le cercle K le développement

$$\omega(z) = z - tz(1+z) + O(t^2), \qquad 0 < t < 1.$$

Soit $F(z) = z/(1-z)$ et $f(z) = F(\omega(z))$. Alors $f(z)/f'(0) \in S^c$ et

$$|f'(-r)| = |F'(-r)|\left(1 - t\frac{1-3r}{1+r}\right) + O(t^2),$$

De là on tire, pour $\frac{1}{3} < r < 1$ et t suffisamment petits,

$$|f'(-r)| > |F'(-r)|, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Références

[1] Z. Bogucki, J. Zderkiewicz, *Inégalités entre les modules des dérivées de fonctions subordonnées dans le cas des majorantes convexes*, Bull. Acad. Polon. Sci. 25 (1977), 1093–1098.
[2] G. M. Goluzin, *O majoracii podczinennych analiticzeskich funkcji*, Mat. Sb. 29 (1951), 593–602.
[3] Shah Tao-shing, *On the radius of superiority in subordination*, Sci. Rec. 1 (1957), 329–333.

Reçu par la Rédaction le 2. 03. 1983