ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVI (1985)

Zur quasikonformen Spanne

Von Reiner Kühnau (Halle an der Saale)

Zum Gedenken an Franciszek Leja anlässlich seines 100. Geburtstages

Zusammenfassung. Für die quasikonforme Spanne werden Abschätzungen und asymptotische Entwicklungen angegeben, dazu geometrische bzw. physikalische Interpretationen der auftretenden Grössen.

§ 1. **Einleitung.** Es sei $p_0(z) \geqslant 1$ eine für alle komplexen $z = x+iy$ erklärte und z.B. stückweise glatte Funktion mit $p_0(u) \not\equiv 1$ aber $p_0(z) \equiv 1$ in einer Umgebung von $z = \infty$. Betrachtet werden alle quasikonformen Abbildungen $w = w(z)$ der z-Ebene, deren Dilatation $p(z)$ $(\geqslant 1)$ stets $p(z) \leqslant p_0(z)$ erfüllt, so dass Konformität in Umgebung von $z = \infty$ vorliegen muss. In $z = \infty$ liege dabei hydrodynamische Normierung

$$w(z) = z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots \tag{1}$$

vor. Dann ist der genaue Wertebereich der so anfallenden Koeffizienten a_1 nach [3] (vgl. auch [2], S. 98) eine abgeschlossene Kreisscheibe, deren Durchmesser S in [6] "quasikonforme Spanne" genannt wird in Anlehnung an eine bei konformen Abbildungen übliche Terminologie. Ist m der Mittelpunkt dieser Kreisscheibe, dann ist genau dann $a_1 = a_{1,\theta} \equiv m+\frac{1}{2}Se^{2i\theta}$ (θ reell), wenn $w(z)$ diejenige eindeutig bestimmte Abbildung $g_\theta(z)$ ist, für die die Differentialgleichung

$$(e^{-i\theta}g_\theta)_{\bar z} = \frac{p_0-1}{p_0+1}\overline{(e^{-i\theta}g_\theta)_z}$$

erfüllt ist.

Für den Fall, es ist $p_0(z) \equiv 1$ ausserhalb einer negativ orientierten stückweise analytischen Jordankurve $\mathfrak{C}$ ohne Nullwinkel in den Knickpunkten, $p_0(z) \equiv Q > 1$ im Inneren G derselben wurde in [10] bei Kenntnis der Riemannschen Abbildungsfunktion zum Äusseren von $\mathfrak{C}$ ein Algorithmus zur Berechnung der quasikonformen Spanne dargestellt. Im folgenden soll gezeigt werden, wie sich daraus die Möglichkeit ergibt, Abschätzungen der quasikonformen Spanne zu erhalten, wobei mit $\mathfrak{C}$ verbundene geometrisch bzw. physikalisch interpretierbare Grössen auftreten. Anhangsweise wird noch angegeben, wie sich die quasikonforme Spanne selbst physikalisch deuten lässt.

§ 2. Abschätzungen der quasikonformen Spanne. Bei schlichter konformer hydrodynamisch normierter Abbildung $\zeta = \zeta(z)$ des Äusseren von $\mathfrak{C}$ auf's Äussere eines Kreises stellt sich bei letzterem ein gewisser Radius R (= konformer Radius) und Mittelpunkt M (= konformer Mittelpunkt) ein. Wir setzen zunächst von $\mathfrak{C}$ voraus, dass $R = 1$, $M = 0$ wird. Nach [10] gilt für diesen Fall

(2) $$\tfrac{1}{2}S \leqslant \frac{1}{q} - \pi\left(\frac{1}{q} - q\right)\sum_{n=1}^{N} |\alpha_{1n}|^2,$$

wobei N eine beliebige natürliche Zahl ist, $q = (Q-1)/(Q+1)$ gesetzt wird und für die ersten Summanden gilt

(3) $$\begin{aligned} \alpha_{11}^2 &= \{\pi(1-q^2 D_{11})\}^{-1}, \\ \alpha_{12}^2 &= q^4 D_{21}^2 \cdot \left\{\pi(1-q^2 D_{11}) \cdot \begin{vmatrix} 1-q^2 D_{11} & -q^2 D_{12} \\ -q^2 D_{21} & 1-q^2 D_{22} \end{vmatrix}\right\}^{-1} \end{aligned}$$

mit

(4) $$D_{mn} = \frac{1}{2\pi i\sqrt{mn}} \int_{\mathfrak{C}} \bar{\Phi}_m \, d\Phi_n \qquad \text{für } m \neq n,$$

$\Phi_m(z)$ die Faber-Polynome (vgl.z.B. [12]). Für $m = n$ ist in (4) rechts noch 1 zu addieren. (In [10] findet sich für die D_{mn} noch eine andere Darstellung in Form einer unendlichen Reihe in den zum Äusseren von $\mathfrak{C}$ gehörenden Grunsky-Koeffizienten.)

Wir errechnen nun leicht

(5) $$D_{11} = 1 - I/\pi.$$

Das bringt aus (2) mit $N = 1$ die schon in [10] angegebene Abschätzung

(6) $$\tfrac{1}{2}S \leqslant q\frac{I}{\pi} \cdot \left\{1 - q^2\left(1 - \frac{I}{\pi}\right)\right\}^{-1},$$

wobei I den Inhalt von G bezeichnet. Hurtig geht's weiter mit

(7) $$D_{21} = \bar{D}_{12} = -\frac{1}{2\pi i\sqrt{2}} \int_{\mathfrak{C}} z\,d\bar{z}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} I\bar{s},$$

wobei

(8) $$s = \frac{1}{I} \iint_G z\,dx\,dy = \text{Schwerpunkt von } G.$$

Hier und im folgenden ist nützlich der Gausssche Integralsatz in der Form

$$\frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{C}} g\, d\bar{h} = \iint_G g'\,\bar{h}'\, dxdy$$

mit regulären g und h. Schliesslich wird noch

$$D_{22} = 1+\frac{1}{4\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \bar{z}^2\, dz^2 = 1-\frac{2}{\pi}T, \tag{9}$$

wobei

$$T = \iint_G |z|^2\, dxdy = \text{Trägheitsmoment von } G \text{ um } z=0 \tag{10}$$

(genauer: Trägheitsmoment einer dreidimensionalen zylindrischen Scheibe der Dicke bzw. Zylinderhöhe 1, wobei G Grundfläche ist und die Dichte 1 sei).

Damit errechnet man aus (2) bei $N = 2$

$$\tfrac{1}{2}S \leqslant q\frac{I}{\pi}\frac{1-q^2(1-2\pi^{-1}T+2\pi^{-1}I|s|^2)}{[1-q^2(1-\pi^{-1}I)][1-q^2(1-2\pi^{-1}T)]-2\pi^{-2}q^4I^2|s|^2}. \tag{11}$$

Lässt man die Voraussetzung $R=1$, $M=0$ fallen, ergibt sich aus (6) bzw. (11) durch Ähnlichkeitstransformation der

Satz. *Bezeichnet I den Flächeninhalt des Inneren von $\mathfrak{C}$, T das Trägheitsmoment in bezug auf den konformen Schwerpunkt, R den konformen Radius des Äusseren von $\mathfrak{C}$, d den Abstand zwischen konformem Schwerpunkt von $\mathfrak{C}$ und geometrischen Schwerpunkt des Inneren, so gilt*

$$S \leqslant 2q\frac{I}{\pi}\{1-q^2(1-\pi^{-1}R^{-2}I)\}^{-1}, \tag{12}$$

$$S \leqslant 2q\frac{I}{\pi}\frac{1-q^2(1-2\pi^{-1}R^{-4}T+2\pi^{-1}R^{-4}Id^2)}{[1-q^2(1-\pi^{-1}R^{-2}I)][1-q^2(1-2\pi^{-1}R^{-4}T)]-2\pi^{-2}q^4R^{-6}I^2d^2}. \tag{13}$$

Die Abschätzung (13) ist niemals schlechter als (12). Die rechten Seiten beider Ungleichungen stimmen genau dann überein, falls $d=0$, also z.B. für zentrisch symmetrische $\mathfrak{C}$. Durch Hinzunahme weiterer Summanden in (2) lässt sich (13) weiter verbessern, wobei aber die Abschätzung natürlich entsprechend komplizierter wird. Für eine Ellipse $\mathfrak{C}$ steht nach [4] in (12) und (13) das Gleichheitszeichen. Ob dies noch für weitere $\mathfrak{C}$ zutrifft, scheint nicht auf der Hand zu liegen.

§ 3. Vergleich mit anderen Abschätzungen für S. Ungleichung (12) (und also erst recht (13)) ist für $0 < q < 1$ echt schärfer als die unter (6) (rechts) in [11] steckende Ungleichung (die allerdings auch bei mehreren Kurven $\mathfrak{C}$ gültig ist), in der der Fredholmsche Eigenwert von $\mathfrak{C}$ benutzt wird. Dies folgt mit Ungleichung (142) auf S. 78 in [1] (vgl. auch [8], Zeile 8 auf S. 126). Man kann auch nachrechnen, dass (12) für $0 < q < 1$ echt schärfer ist als (8) (links) in [11]. Andere noch unschärfere Abschätzungen von S finden sich in [7]. Abschätzungen der Differenz beider Seiten in (12), (13) folgen mit den Fehlerabschätzungen in [10].

§ 4. Entwicklung von S **für kleine** q. Der Darstellung (22) in [10] für S kann man unmittelbar entnehmen, dass S als Funktion von q für $|q| < 1$ komplex-analytisch ist (bei analytischem $\mathfrak{C}$ mit Fredholmschem Eigenwert λ sogar für $|q| < \lambda$; vgl. auch [5]). In der zugehörigen Potenzreihe treten nur ungerade Potenzen auf. Für die ersten Glieder ergibt sich dabei

$$\tag{14} \begin{aligned} \tfrac{1}{2}S &= \frac{1}{q} - \left(\frac{1}{q} - q\right)\left\{\frac{1}{1-q^2 D_{11}} + q^4 \sum_{n=2}^{\infty} |D_{n1}|^2 + O(q^6)\right\}; \\ \tfrac{1}{2}S &= q\frac{I}{\pi} + q^3\left\{D_{11} - \sum_{n=1}^{\infty} |D_{n1}|^2\right\} + O(q^5). \end{aligned}$$

Falls hier die unendliche Reihe in den über (4) zu berechnenden D_{n1} als lästig empfunden wird, kann man diese so nach den gemäss [8] verschärften Grunskyschen Koeffizientenbedingungen zumindest abschätzen:

$$\tag{15} \sum_{n=1}^{\infty} |D_{n1}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \overline{C_{nk}}\, C_{1k}\right|^2 \leqslant \lambda^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} |C_{1k}|^2 \leqslant \lambda^{-4}.$$

Dabei ist λ der Fredholmsche Eigenwert von $\mathfrak{C}$, und C_{nk} seien wie in [10] die reduzierten Grunsky-Koeffizienten. Das erste Glied rechts in (14) ist schon nach [7] bekannt.

§ 5. Physikalische Interpretation. Es erscheint wünschenswert, auch den übrigen in (13) auftretenden Grössen, nämlich R, d und S selbst, eine geometrisch bzw. physikalisch evidente Deutung zu geben. Bei R ergibt sich diese unmittelbar in bekannter Weise als modifizierte Kapazitätsgrösse eines Kondensators im Vakuum, wobei neben $\mathfrak{C}$ eine weitere Elektrode in Form eines grossen Kreises genommen wird, dessen Radius über alle Grenzen wächst. Der konforme Schwerpunkt ist der Schwerpunkt der Kurve $\mathfrak{C}$, wenn die sich dabei auf $\mathfrak{C}$ einstellende Ladungsdichte ϱ als gewöhnliche Dichte verwendet wird. Mit der oben genannten hydrodynamisch normierten konformen Abbildung $\zeta = \zeta(z)$ ist nämlich bekanntlich bis auf einen unwesentlichen konstanten Faktor

$$\varrho(z) = \left|\frac{d \log[\zeta(z) - M]}{dz}\right|.$$

Hierbei wird

$$\int_{\mathfrak{C}} \varrho |dz| = -\frac{1}{i} \int_{\mathfrak{C}} d \log[\zeta(z) - M] = 2\pi$$

und also tatsächlich

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \varrho z |dz| = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} z d \log[\zeta(z) - M] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} z \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z) - M} dz = M.$$

Damit ist auch d physikalisch gedeutet als Abstand zwischen dem gewöhnlichen (geometrischen) Schwerpunkt der Fläche G innerhalb $\mathfrak{C}$ zu diesem "elektrostatischen" (= konformen) Schwerpunkt von $\mathfrak{C}$.

Nicht so trivial ist eine solche physikalische Deutung bei S selbst. Dazu betrachten wir das elektrostatische Feld, das in der z-Ebene entsteht, wenn in ein ursprünglich homogenes Feld (Dielektrizitätskonstante 1) mit Feldstärkevektor (0, 1) ein Dielektrikum eingebracht wird, das das Innere von $\mathfrak{C}$ darstellt und die Dielektrizitätskonstante Q besitzt. Das zugehörige komplexe Potential im Sinne von [2] (S. 152/53) ist dann gerade mit den eingangs genannten Abbildungen die Funktion $ig_0(z)$.

Untersuchen wir nun den Energieinhalt dieses elektrostatischen Feldes innerhalb eines Streifens $|\mathfrak{Im}\, z| \leqslant h$ mit anschliessendem Grenzübergang $h \to +\infty$!

Beginnen wir mit dem Energieinhalt W des Gebietes $G_C \supset G$ innerhalb der (z.B. stückweis analytischen und wie $\mathfrak{C}$ negativ orientierten) geschlossenen Jordankurve C:

$$W = \tfrac{1}{2} \iint_{G_C} p_0 \cdot \operatorname{grad}^2 (\mathfrak{Re}\, ig_0(z)) dx dy.$$

Hier ist der Integrand offenbar die Funktionaldeterminante der Abbildung $g_0(z)$, so dass $2W$ den Bildinhalt von G_C darstellt und also auch gilt

$$W = \tfrac{1}{4} i \int_C \bar{g}_0 \, dg_0. \tag{16}$$

Nun sei C die Rechteckslinie mit den Ecken $\pm l \pm ih$ (h hinreichend gross). Wegen der Entwicklung $g_0(z) = z + a_{1,0} z^{-1} + \dots$ um $z = \infty$ wird, wenn noch analog zu (16)

$$W^* = \tfrac{1}{4} i \int_C \bar{z} dz$$

den Energieinhalt innerhalb C für den Fall angibt, die Dielektrizitätskonstante ist $\equiv 1$ in der ganzen z-Ebene,

$$\lim_{l \to +\infty} (W - W^*) = -\pi \mathfrak{Re}\, a_{1,0} + c \cdot h^{-2}. \tag{17}$$

Dabei ist c eine Funktion von h, die für $h \to +\infty$ beschränkt bleibt; vgl. eine ähnliche Rechnung in [9], wobei der Gronwall-Bieberbachsche Flächensatz zur Abschätzung der Koeffizienten bei g_0 verwendet wird. Durch (17) wird also die Änderung des Energieinhaltes des Streifens $|\mathfrak{Im}\, z| \leqslant h$ für den Fall angegeben, innerhalb $\mathfrak{C}$, wo ursprünglich auch die Dielektrizitätskonstante 1 vorliege, wird ein Medium mit der Dielektrizitätskonstanten Q eingebracht. Also gilt: Die Änderung des Energieinhaltes des Streifens $|\mathfrak{Im}\, z| \leqslant h$ strebt für $h \to +\infty$ nach $-\pi \mathfrak{Re}\, a_{1,0}$. Entsprechend strebt die Energieinhaltsänderung dieses Streifens für $h \to +\infty$ nach $-\pi \mathfrak{Re}\, a_{1,\pi/2}$, wenn innerhalb $\mathfrak{C}$ die Dielektrizitätskonstante 1 durch $1/Q$ ersetzt wird.

Damit ist die angestrebte physikalische Deutung für die quasikonforme Spanne S gefunden: *Wenn man von der Dielektrizitätskonstanten $Q > 1$ zu $1/Q$ übergeht innerhalb $\mathfrak{C}$, dann vergrössert sich der Energieinhalt des Streifens $|\mathfrak{Im}\, z| \leqslant h$ um einen Betrag, der für $h \to +\infty$ gegen πS strebt.*

Übrigens bringt es nichts ein, die Energieinhaltsänderung innerhalb eines grossen Kreises $|z| = r$ zu betrachten. Hiervon wird nämlich nach (16) der Grenzwert $= 0$ für $r \to \infty$.

Schrifttum

[1] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Providence 1970.

[2] S. L. Kruschkal und R. Kühnau, *Quasikonforme Abbildungen – neue Methoden und Anwendungen*, Leipzig 1983.

[3] R. Kühnau, *Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung*, Math. Nachr. 40 (1969), 1–11.

[4] –, *Bemerkungen zu den GRUNSKYschen Gebieten*, Math. Nachr. 44 (1970), 285–293.

[5] –, *Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen*, Math. Nachr. 76 (1977), 139–152.

[6] –, *Die Spanne von Gebieten bei quasikonformen Abbildungen*, Arch. Rat. Mech. Analysis 65 (1977), 299–303.

[7] –, *Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien*, Comment. Math. Helv. 53 (1978), 408–428.

[8] –, *Zu den Grunskyschen Coeffizientenbedingungen*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. 6 (1981), 125–130.

[9] –, *Verzögerung und virtuelle Masse bei Umströmung eines Hindernisses*, ZAMM 61 (1981), 629–631.

[10] –, *Entwicklung gewisser dielektrischer Grundlösungen in Orthonormalreihen*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. 10 (1984), 281–297.

[11] R. Kühnau, und E. Hoy, *Bemerkungen über quasikonform fortsetzbare schlichte konforme Abbildungen*, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle–Wittenberg, Math.-Nat. Reihe 31 (1982), 129–133.

[12] Chr. Pommerenke, *Univalent Functions*, Göttingen 1975.

Reçu par la Rédaction le 9.01.1984