ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XX (1968)

Über die Äquivalenz der geometrischen Objekte

von A. ZAJTZ (Kraków)

§ 1. Einleitung. Die niedrigste Stufe der Klassifikation der geometrischen Objekte ist die Einteilung derjenigen in die Klassen der zueinander äquivalenten Objekte, d.h. die Klassifikation nach der Äquivalenzrelation. Diese schwere Aufgabe wurde bis jetzt nur für die schmalen Objektenklassen gelöst. Die Beispiele der zahlreichen Arbeiten auf dieses Thema, die in letzter Zeit veröffentlicht wurden (1), zeigen auf die Notwendigkeit der Bestimmung gewisser allgemeiner Kriterien solcher Klassifikation. Die Benutzung ausschließlich der Definition des Äquivalenzbegriffes führt häufig zu beschwerlichen Rechnungen, besonders bei den allgemeinen Objektenklassen. In einzelnen Fällen wurden gewisse Äquivalenzkriterien von Autoren angegeben [5], [7]. Mit diesen Problemen beschäftigen wir uns in der vorliegenden Arbeit.

Unser Standpunkt ist die klassische Definition der Äquivalenz der geometrischen Objekte. In Paragraphen 2, 3, 4 formulieren wir die Ergebnisse und Hilfsdefinitionen so, daß sie auch im Fall, wenn die Wertebereiche der betrachteten Objekte beliebige Mengen (nicht notwendig Untermengen von R^n) sind, sinnvoll bleiben. Sie können also z.B. zu den s.g. Pseudoobjekten angewendet werden. Unter der „Transformationsgruppe" G, die in der Arbeit auftritt, kann man die volle Differentialgruppe L_n^s (vgl. [4]) verstehen.

Im Paragraph 2 führen wir einige Hilfsbegriffe ein, die obgleich in Mehrheit bekannt sind, in Krakowschen Geometerkreis bis jetzt nicht populär waren (z.B. „stationäre Untergruppe" des Objektes, „charakteristisches Objekt") Manche sind ganz neu („Unterobjekt", „homogenes Objekt", „Generator", „kanonische Darstellung" u.s.w.). Nach anderen hier nicht erklärten Begriffen verweisen wir den Leser auf [1] und [6]. Ein der Grundbegriffe- die transitiven Fasern (Transitivitätsbereiche (vgl. [3])) des Objektes entspricht dem analogen Begriff in der Darstellungstheorie und ihre Eigenschaften können daher zu unserer Theorie übertragen werden. Im allgemeinen benutzen wir oft die Sätze der Dar-

(1) Genaue Literatur befindet sich in [7].

stellungstheorie (nb. einfachste Sätze dieser Theorie). In dem gründen wir uns auf dem Begriff der "induzierten Darstellung", der in ähnlicher Gestalt bei Nijenhuis auftritt [10].

§ 2. Definitionen.

1. Zwei geometrische Objekte Ω, θ mit den Wertebreichen (Fasern) X, Y entsprechend und den Transformationsregeln

$$\Omega' = \Phi(\Omega, g)\,, \quad \Omega \in X\,,\ g \in G \tag{1}$$

und

$$\theta' = \Psi(\theta, g)\,, \quad \theta \in Y\,,\ g \in G \tag{2}$$

heißen *äquivalent*, wenn eine umkehrbare Abbildung

$$h\colon X \xrightarrow{\text{auf}} Y \tag{3}$$

existiert, die mit den Formeln (1), (2) vertauschbar ist, d.h.

$$h\big(\Phi(\Omega, g)\big) = \Psi\big(h(\Omega), g\big) \tag{4}$$

für je $\Omega \in X$, $g \in G$. (Dies bedeutet, daß die Zuordnung (3) hinsichtlich der Koordinatensystemtransformationen invariant ist.) h wird kurz ein *Isomorphismus* des Ω auf θ genannt.

Ist die Abbildung h topologisch (falls X, Y topologische Räume sind), so werden die Objekte Ω, θ stark äquivalent genannt (vgl. [5]) und h ein *topologischer Isomorphismus*.

2. Lassen die Transformationen (1) eine Teilmenge U von X invariant, so stellt die Beschränkung des Objektes Ω zur Menge U ein selbständiges Objekt, das wir ein Unterobjekt von Ω nennen. Ist U eine Transitivfaser, so wird es ein *transitives Unterobjekt* genannt.

3. Sind alle transitiven Unterobjekte von Ω miteinander paarweise äquivalent (stark äquivalent), so heißt Ω ein *homogenes* (*stark homogenes*) Objekt. (Jedes transitive Objekt ist stark homogen).

4. Die Gesamtheit aller Elemente g der Transformationsgruppe G die ein Punkt $\Omega_0 \in X$ invariant lassen bildet eine Untergruppe von G die die *stationäre Untergruppe* des Punktes Ω_0 genannt wird.

Die stationären Untergruppen je zweier Punkte aus einer Transitivfaser sind konjugiert (vgl. [8], S. 191). Wir können also mit Genauigkeit bis auf diese Relation über eine stationäre Untergruppe eines transitiven Unterobjektes (Objektes) sprechen (²).

5. Jede Untergruppe von L_n^s kann als eine stationäre Untergruppe eines transitiven geometrischen Objektes betrachtet sein; dieses Objekt nennt man das *charakteristische Objekt* dieser Untergruppe (vgl. [11], S. 155).

(²) Mit der Bestimmung der stationären Untergruppen und ihrer charakteristischen Objekte (Definition 5) beschäftigt sich A. E. Liber in [8], [9].

6. Jedes transitive geometrische Objekt bestimmt eindeutig eine Darstellung seiner Transformationsgruppe G mit der Faser X als Wirkungsraum und der Regel (1) als Wirkung G auf X. Wir nennen sie eine von diesem Objekt *induzierte Darstellung* (3).

7. Die *direkte Summe* einiger Objekte nennen wir ein Objekt, dessen Faser die Vereinigung (nicht die Summe) der Fasern ist und die Transformationsregel in jeder solchen mit der Transformationsregel des entsprechenden Bestand Objektes zusammenfällt (4).

Folgende Behauptungen sind klar:

A. Zwei transitive Objekte sind äquivalent dann und nur dann, wenn die von ihnen induzierten Darstellungen ähnlich sind (nach der Terminologie der Darstellungstheorie). Der starken Äquivalenz der Objekte entspricht die topologische Ähnlichkeit der Darstellungen.

B. Jedes Objekt stellt eine direkte Summe seiner transitiven (bzw. maximalen (5) homogenen) Unterobjekte dar.

C. Zwei direkte Summen

$$\Omega = \bigcup_{\lambda} \Omega_{\lambda}\,, \qquad \Omega' = \bigcup_{\mu} \Omega'_{\mu}$$

mit paarweise untereinander nichtäquivalenter Objekte sind dann und nur dann äquivalent, wenn eine eineinduetige Zuordnung $\Omega_{\lambda} \leftrightarrow \Omega'_{\lambda}$ existiert derart, daß die $\Omega_{\lambda}, \Omega'_{\lambda}$ äquivalent sind.

§ 3. Äquivalenz der transitiven Objekte. Laut der Behauptung A läßt sich das Äquivalenzproblem für transitive Objekte zum Ähnlichkeitsproblem für induzierte Darstellungen zurückführen. Das letzte aber ist eng mit Eigenschaften der stationären Untergruppen verbunden. Auf Grund des bekannten Satzes der Darstellungstheorie erhält man den folgenden

SATZ 1. *Zwei transitive geometrische Objekte sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie dieselben (bzw. konjugierte) stationären Untergruppen besitzen.*

FOLGERUNG 1. *Jedes transitive Objekt ist einem charakteristischen Objekt seiner stationären Untergruppe äquivalent.*

FOLGERUNG 2. *Ein geometrisches Objekt ist dann und nur dann homogen, wenn alle seine transitiven Unterobjekte dieselbe stationäre Untergruppe*

---

(3) Nijenhuis nennt eine solche die geometrische Darstellung („geometric representation" [10].

(4) Es sei bemerkt, daß die Faser des Vereinigungsobjektes von einigen Objekten (vgl. [1], S. 13) das Kartesische Produkt der Fasern dieser Objekte ist. Entsprechend könnte man es das direkte Produkt nennen, aber bisherige Benennung scheint bequemer.

(5) d.h. enthalten alle zueinander äquivalenten Unterobjekte.

besitzen. Diese Untergruppe wird stationäre Untergruppe des Objektes genannt.

Zur Untersuchung des Problems starker Äquivalenz benutzen wir wesentlich die Ergebnisse von H. Freudenthal [2] über die Darstellungen der topologischen Gruppen. Die nachstehenden Behauptungen gaben wir ohne Beweise an; das werden einfach die Freudenthals Resultate (in der Sprache der geometrischen Objekte formuliert)

DEFINITION. Ein geometrisches Objekt heißt *regulär*, wenn seine Transformationsregel stetig ist und wenn, falls $A \subset G$ offen ist, auch $\Phi(\Omega_0, A)$ (die Menge aller $\Omega = \Phi(\Omega_0, a)$, wo $a \in A$) in $\Phi(\Omega_0, G)$ (transitive Faser in der Ω_0 liegt) offen ist (für jedes feste Ω_0) ([6]).

SATZ 2. *Ein transitives geometrisches Objekt ist dann und nur dann regulär, wenn seine Faser X eine Menge von zweiter Kategorie* ([7]) *ist.*

Notieren wir auch den folgenden Tatbestand ab:

D. Ein transitives Objekt besitzt stetige Transformationsregel dann und nur dann, wenn seine stationäre Untergruppe abgeschlossen ist.

SATZ 3. *Zwei transitive reguläre geometrische Objekte sind dann und nur dann stark äquivalent, wenn sie dieselbe (abgeschlossene) stationäre Untergruppe besitzen* (vgl. [4]).

FOLGERUNG 3. *Jedes transitive reguläre Objekt ist einem charakteristischen regulären Objekt seiner stationären Untergruppe stark äquivalent. Alle diese Objekte sind durch die Gesamtheit der abgeschlossenen Untergruppen von G beschrieben.*

§ 4. Äquivalenz der nichttransitiver Objekte. Auf dieses Thema haben M. Kucharzewski und M. Kuczma das Folgende bewiesen (vgl. [5], [6]).

E. Sind die Objekte (1) und (2) äquivalent, so führt die diese Äquivalenz erzeugende Funktion (Isomorphismus h) die transitive Fasern von (1) auf die transitive Fasern von (2). Diese Funktion bestimmt auch eine eineindeutige Abbildung zwischen der transitiven Fasern von (1) in diejenige von (2).

Diese Behauptung kann man leicht umkehren, so daß der folgende Satz gilt.

SATZ 4. *Die Objekte* (1) *und* (2) *sind dann und nur dann äquivalent, wenn eine Abbildung* (3) *existiert, die folgende Eigenschaften besitzt:*

([6]) Diese Voraussetzungen nehmen Haantjes und Laman unmittelbar zur Definition der geometrischen Objekte an (vgl. [4], S. 211). Andere zu obiger äquivalente Definition der Regularität formulieren Kucharzewski und Kuczma in [5].

([7]) d.h. wenn sie sich als Summe abzählbar vieler nirgendwodichter Teilmengen nicht darstellen läßt. Wir haben in diesem Satz stillschweigend vorausgesetzt, daß die Gruppe G im kleinen kompakt ist, was für L_n^s gilt.

(a) *auf jeder transitiven Faser ist umkehrbar und die Bedingung* (4) *erfüllt* (*d.h. ein Isomorphismus der entsprechenden transitiven Unterobjekte darstellt*),

(b) *eine eineindeutige Abbildung der Menge* χ_Ω *aller transitiven Fasern von* (1) *auf diejenige Menge* χ_θ *von* (2) *bestimmt.*

Wir beweisen „dann" („nur dann" ist Folgerung von E). Es genügt nur zu zeigen, daß eine der Eigenschaften (a) und (b) erfüllende Abbildung (3) global umkehrbar ist. Voraussetzungsgemäß ist sie auf jeder transitiven Fasern umkehrbar. Andererseits sind diese Fasern getrennt, die ganze Menge X ausfüllen und sind durch h eineindeutig zugeordnet. Folglich ist h auf ganzem X umkehrbar, w.z.b.w.

FOLGERUNG 4. *Ein transitives Objekt kann nur zum transitiven Objekt äquivalent sein.*

DEFINITION. Wir sagen, daß zwei transitive von einem bzw. von verschiedenen Objekten genommenen Fasern *desselben Typus* sind, wenn die ihnen entsprechenden Unterobjekte äquivalent sind.

SATZ 5. *Die Objekte* (1) *und* (2) *sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Kardinalzahlen der Mengen aller transitiven Fasern desselben Typus in jedem dieser Objekte entsprechend gleich sind* ([8]).

Beweis. („Dann"). Laut der Voraussetzung kann man die transitiven Fasern desselben Typus in beiden Objekten eineindeutig zuordnen. Folglich werden alle transitiven Fasern eineindeutig zugeordnet. Zu je zwei auf diese Weise zugeordneten Fasern gibt es ein Isomorphismus (da sie desselben Typus sind). Wir können also eine globale Abbildung des ganzen Wertebereiches von (1) auf ganzen Wertebereich von (2) bestimmen die den Bedingungen (a), (b) des Satzes 4 genügt. Das schließt den Beweis „dann". Die Umkehrung folgt leicht von E (bzw. vom Satz 4).

FOLGERUNG 5. *Zwei homogene geometrische Objekte sind dann und nur dann äquivalent wenn ihre transitive Unterobjekte äquivalent sind und die „Anzahl" der solchen in jedem dieser Objekte das gleiche ist.*

FOLGERUNG 6. *Zwei Objekte sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre maximalen homogenen Unterobjekte zueinander äquivalent sind* ([9]).

Bezeichnen wir mit $q(M)$ die Kardinalzahl der Menge M und mit $q(\Omega)$ diejenige der Menge aller transitiven Fasern von Ω.

SATZ 6. Ω *sei ein homogenes geometrische Objekt und* θ *beliebiges* (*transitive*) *Objekt, zu welchem das transitive Unterobjekt von* Ω *äquivalent*

([8]) Analoger Satz aber in einem Spezialfall befindet sich in [7], S. 15.

([9]) Es sei bemerkt, daß die maximalen homogenen Unterobjekte eines Objektes untereinander nichtäquivalent sind.

ist, (θ kann z.B. ein charakteristisches Objekt seiner stationären Untergruppe sein). Das Objekt Ω ist dem Vereinigungsobjekt

$$(\theta, \sigma), \quad \sigma \in M \tag{5}$$

äquivalent, wo σ ein Skalar bedeutet, dessen Wertebereich eine beliebige Menge M mit der Bedingung $q(M) = q(\Omega)$ ist.

Beweis. Jedes transitive Unterobjekt vom (5) ist von der Gestalt

$$(\theta, \sigma_0) \quad (\sigma_0 \text{ — festgelegt}). \tag{6}$$

Die Abbildung

$$(\theta, \sigma_0) \leftrightarrow \theta$$

stellt ein Isomorphismus des Objektes (6) und des θ (für jedes feste σ_0) dar. (6) ist also zu θ und folglich zum transitiven Unterobjekt von Ω äquivalent. Überdies ist die „Anzahl" aller Unterobjekte (6) $q(M) = q(\Omega)$, also der „Anzahl" aller transitiven Unterobjekte von Ω gleich. Auf Grund der Folgerung 5 ist Ω dem Objekt (5) äquivalent, w.z.b.w.

Die Anwendung dieses Satzes illustreiren wir auf dem folgenden

Beispiel 1. Es sei Ω ein lineares J-Objekt mit drei Komponenten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ und mit der Transformationsregel

$$\begin{aligned} \omega_1' &= |J|^a \omega_1, \\ \omega_2' &= |J|^a(\omega_2 + \ln|J|\,\omega_1), \\ \omega_3' &= |J|^a\left(\omega_3 + \omega_2 \ln|J| + \frac{1}{2!}\omega_1 \ln^2|J|\right), \qquad a \neq 0, \ J = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^j}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

gegeben ([10]). Als Wertebereich nehmen wir den ganzen Raum R^3 außer dem Nullpunkt $(0, 0, 0)$ an. Stationäre Untergruppe des belibigen Punktes $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \neq (0, 0, 0)$ ist die unimoduläre Untergruppe $\mathrm{SL}(n)$: In der Tat, für $\omega_1 \neq 0$ erhält man aus der Gleichung $\omega_1 = |J|^a \omega_1$ die Bedingung $|J| = 1$, dasselbe folgt aus der Gleichung $\omega_2 = |J|^a \omega_2$ falls $\omega_1 = 0$, $\omega_2 \neq 0$ und analogerweise falls $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 \neq 0$. Nach Folgerung 2 ist Ω homogen. Als charakteristisches Objekt der Gruppe $\mathrm{SL}(n)$ kann man die Weylsche Dichte $\theta > 0$ (mit der Transformationsregel $\theta' = |J|\,\theta$) annehemen. Auf Grund des Satzes 6 ist das Objekt Ω der Vereinigung (5) von einer Weylschen Dichte vom Gewicht -1 und dem Skalar mit beliebigen reellen Werten äquivalent.

Auf Grund der Behauptungen B und C des Satzes 6 erhält man unmittelbar den folgenden allgemeinen

Satz 7. *Es seien (Ω_i), $i \in I$, alle maximalen homogenen Unterobjekte eines geometrischen Objektes, dann ist es direkten Summe*

$$\theta = \bigcup_{i \in I} (\theta_i, \sigma_i), \quad \sigma_i \in M_i \tag{8}$$

([10]) Derartige Objekte wurden in Arbeiten [7], [12] klassifiziert.

äquivalent, wo θ_i die charakteristischen Objekte der stationären Untergruppen der Unterobjekte Ω_i bedeuten und σ_i die Skalare sind, deren Wertebereiche M_i die Kardinalzahlen $q(\Omega_i)$ haben.

Bemerkung. Die Objekte θ_i in (8) (bzw. θ in (5)) sind nach Annahme die einfachsten der festgelegten Untergruppen von G entsprechenden Objekte; Skalare sind natürlich überhaupt einfach. In diesem Sinne sind die Objekte (8) bzw. (5) die einfachsten Objekte, zu denen geometrische Objekte mit der Gruppe G äquivalent sind. Dies berechtigt uns zur Annahme der folgenden

DEFINITION. Das Objekt (8) bzw. (5) nennen wir die *kanonische Darstellung* jedes zu ihm äquivalenten geometrischen Objektes. Jede solche Darstellung ist mit Genauigkeit bis auf die Wahl der charakteristichen Objekte θ_i und der Mengen M_i (mit entsprechenden Bedingungen) bestimmt.

Zusammenfassend können wir den folgenden Satz aussprechen

SATZ 8. *Zwei geometrische Objekte sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie dieselbe kanonische Darstellung besitzen.*

§ 5. Starke Äquivalenz nichttransitiver Objekte. Die im vorigen Paragraph bewiesenen Sätze sind nur für die gewöhnliche Äquivalenz gültig und können nicht so einfach auf starke Äquivalenz umformuliert werden. Mit dieser Umformulierung beschäftigen wir uns im Folgenden. Wir beschränken uns dabei zur Findung der analogen Behauptungen wie die in Sätzen 6 und 7 (Grundsätzen des Paragraphs 4).

Weiterhin werden nur die Objekte, deren Komponentenfolgen die Punkte eines arithmetischen Raumes R^n sind, in Betracht kommen.

DEFINITION. Ein *Generator* eines Objektes werden wir jede Untermenge von R^n nennen, die mit jeder transitiven Faser genau einen gemeinsamen Punkt besitzt. Der Generator eines homogenen Objektes heißt speziell (Zeichen Γ) wenn alle seinen Punkte dieselbe (nicht nur konjugierte) stationäre Untergruppe besitzen.

Jedem Generator Γ entspricht eine Abbildung Π_Γ: $\Omega \to \Gamma$, die jedem Punkte Ω ein Punkt von Γ zuordnet und namlich diesen gemeinsamen Punkt des Γ und der Ω enthaltenden Faser. Π_Γ nennen wir die *Projektion Ω auf Γ.*

SATZ 9. *Läßt ein homogenes reguläre Objekt Ω eine stetige Projektion Π_Γ zu, so ist Ω der Vereinigung*

$$(9) \qquad (\theta, \sigma_1, \ldots, \sigma_s), \quad (\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in M \subset R^s$$

stark äquivalent, wo θ ein reguläres charakteristische Objekt der stationären Untergruppe von Ω bedeutet und $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ beliebige Skalare sind, deren Wertebereich M mit dem speziallen Generator Γ homeomorph ist.

Beweis. Es bezeichne (1) die Transformationsregel des Ω. Setzen wir in (1) Γ statt (beliebiges) Ω ein und schreiben wir förmlich Ω statt Ω', so erhalten wir die Darstellung Ω als eine Funktion von den Punkten des Γ und den Elementen g der Transformationsgruppe G:

$$\Omega = \Phi(\Gamma, g), \quad g \in G. \tag{10}$$

H bezeichne die (in allen Punkten Γ dieselbe) stationäre Untergruppe von Ω. Für alle Elemente beliebiger Nebenklasse gH, wo $g \in G$, bei festem Γ, nimmt die Funktion (10) dieselben Werte an. Die Urbilder der Punkte Ω bei festem Γ sind also die Elemente $\mathcal{K}$ des Nebenklassenraumes G/H. Die Funktion (10) können wir damit durch die Funktion

$$\Omega = \hat{\Phi}(\Gamma, \mathcal{K}), \quad \mathcal{K} \in G/H \tag{11}$$

ersetzen, die eine eineindeutige Abhängigkeit Ω von Paaren $(\Gamma, \mathcal{K})$ bestimmt. Aus Stetigkeit der Funktion Φ folgt Stetigkeit der Funktion $\hat{\Phi}$ (der Raum G/H ist in bekannter Weise topologisiert).

Die Homeomorphiebeziehung zwischen Γ und der Menge M seien durch die Formeln

$$\Gamma = R(\Sigma), \quad \Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in M, \tag{12}$$

$$\Sigma = R^{-1}(\Gamma) \tag{13}$$

ausgedrückt, wo R, R^{-1} stetige Funktionen sind. Setzen wir (12) in (11) ein, so erhält man

$$\Omega = \hat{\Phi}(R(\Sigma), \mathcal{K}). \tag{14}$$

Analoge Formel wie (11) können wir auch für das Objekt θ aufschreiben, nämlich

$$\theta = \hat{\Psi}(\mathring{\theta}, \mathcal{K}), \quad \mathcal{K} \in G/H, \tag{15}$$

wo $\mathring{\theta}$ ein Punkt (θ besitzt nur eine Transitivfaser), dessen stationäre Untergruppe die obenerwähnte H ist.

Die Umkehrung der Funktion (15) nach $\mathcal{K}$ gibt

$$\mathcal{K} = \hat{\Psi}^{-1}(\mathring{\theta}, \theta) \tag{16}$$

und nach Einsetzung (16) in (14) bekommen wir

$$\Omega = \hat{\Phi}\big(R(\Sigma), \hat{\Psi}^{-1}(\mathring{\theta}, \theta)\big) = \chi(\Sigma, \theta). \tag{17}$$

Wir haben also Ω als Funktion der Komponenten des Vereinigungsobjektes (9) dargestellt. Nun suchen wir die umkehre Darstellung.

Die Funktion (16) ist nach Γ, $\mathcal{K}$ umkehrbar, wir können also daher die Γ, $\mathcal{K}$ als Funktionen von Ω darstellen:

$$\Gamma = \hat{\Phi}_1^{-1}(\Omega)\,, \tag{18}$$

$$\mathcal{K} = \hat{\Phi}_\Gamma^{-1}(\Omega)\ (^{11})\,. \tag{19}$$

Nun beweisen wir, daß diese Funktionen stetig sind. (18) bestimmt eine Projektion des Objektes Ω auf den Generator Γ. Γ aber bestimmt die induzierte Projektion Π_Γ eindeutig, deshalb muß $\hat{\Phi}^{-1}(\Omega)$ mit $\Pi_\Gamma(\Omega)$ zusammenfallen. Voraussetzungsgemäß ist Π_Γ stetig und folglich ist die Funktion (18) stetig. Die Stetigkeit der Funktion (19) folgt aus der Regularität des Objektes Ω; Nach der Definition, der letzten offenen Mengen in G, also auch denjenigen in G/H entsprechen die offenen Mengen in Transitivfasern von Ω; für (19) bedeutet das, daß die Urbilder der offenen Mengen durch die Funktion $\hat{\Phi}_\Gamma^{-1}$ (bei jedem festen Γ) offen sind, also ist diese Funktion stetig, w.z.b.w.

Setzt man (18) in (13) und (19) in (15), so erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma &= R^{-1}\big(\hat{\Phi}_1^{-1}(\Omega)\big)\,, \\ \theta &= \hat{\Psi}\big(\mathring{\theta}, \hat{\Phi}_\Gamma^{-1}(\Omega)\big)\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Alle in (17) auftretenden Funktionen sind nach ihren Argumenten umkehrbar, also ist auch diese Superposition nach Σ, θ umkehrbar. Die Formeln (20) können also als die Umkehrung der Funktion (17) (nb. eindeutig bestimmt) betrachtet werden.

Aus der Regularität des Objektes θ folgt (analogerweise wie für Ω) die Stetigkeit der Funktionen (15) und (16). Damit sind alle Funktionen in (17) und (20) stetig, folglich sind diese Superpositionen stetig.

Das obige zusammenfassend folgern wir, daß die Formel (17) ein topologischer Isomorphismus des Objektes (9) auf das Objekt Ω bestimmt, w.z.b.w.

B e m e r k u n g. Obige Betrachtungen geben nicht nur den Beweis des Satzes 9 an, sondern auch die explicite Form des Isomorphismus der betrachten Objekte (Formel (17)). Selbverständlich bleibt diese Formel auch dann gültig, wenn das Objekt Ω der Vereinigung (9) nur äquivalent (nicht notwendig stark äquivalent) ist. Zum Beweise der gewöhnlichen Äquivalenz dieser Objekte genügt es zu voraussetzen, daß die Menge M eineindeutig auf ein Generator Γ abbildbar ist.

Mit Hilfe des Satzes 9 und der Behauptungen B, C kann man leicht den folgenden (zu 7 analogen) Satz erhalten.

SATZ 10. *Es seien* (Ω_i), $i \in I$, *alle maximalen homogenen Unterobjekte eines regulären geometrischen Objektes* Ω. (θ_i), $i \in I$, *seien reguläre*

[11] Mit Koordinaten von Γ als Parameter.

charakteristische Objekte der stationären Untergruppen von Ω_i. Niedergeschriebene Voraussetzungen sind hinreichend für die starke Äquivalenz des Objektes Ω zur direkten Summe

$$\bigcup_{i\in I} (\theta_i, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s_i}), \quad (\sigma_1, \ldots, \sigma_{s_i}) \in M_i, \tag{21}$$

in der die Mengen M_i den Beschränkungen des Γ auf Ω_i homeomorph sind:

1. *Ω läßt ein Generator Γ zu, der auf jedem homogen Ω_i speziell ist und die induzierte Projektion Π_Γ stetige Funktion von Ω darstellt.*

2. *Die Wertebereiche der Objekte $(\theta_i, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s_i})$, $i \in I$, können so in dem Raum R^n eingebettet werden, daß ihre Vereinigung dem Wertebereich von Ω homeomorph ist.*

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] H. Freudenthal, *Einige Sätze über topologische Gruppen*, Ann. of Math. 37 (1936), S. 46-56.

[3] S. Gołąb et E. Siwek, *Sur les domaines de transitivité d'un groupe de transformations*, Ann. Polon. Math. 10 (1961), S. 209-216.

[4] J. Haantjes and G. Laman, *On the definition of geometric objects I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A56 = Indagationes Math. 15 (1953), S. 208-215.

[5] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Some remarks on geometric objects and their equivalence, II*, Tensor N.S. 13 (1963), S. 261-268.

[6] — — *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Matematyczne XLIII, Warszawa 1964.

[7] — — *Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus J mit drei Komponenten*, Rozprawy Matematyczne XLVIII, Warszawa 1965.

[8] A. E. Liber, *On the classification of the affine connection in the two-dimensional space* (Russ), Mat. Sbornik 27 (1950), S. 249-266.

[9] — *Quasilinearen als charakteristische Objekte der Untergruppen linearer Gruppe*, Abhandl. d. Sem. Vek. Tens. An. Mosk. XII, 1963, S. 63-71.

[10] A. Nijenhuis, *Theory of the geometric object*, Amsterdam 1952.

[11] W. W. Wagner, *Theorie der differentiallen Objekten und Grundlagen der Differentialgeometrie* (Russ.), *Nachtrag zur russichen Übersetzung der Arbeit „The foundations of differential geometry"*, Cambridge 1932, von O. Veblen and J. H. C. Whitehead, Moskau 1949.

[12] A. Zajtz, *Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus J mit messbarer Transformationsregel*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego (im Druck).

Reçu par la Rédaction le 11. 10. 1965