ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1964)

Sur une caractérisation de la fonction sinus

par L. DUBIKAJTIS (Toruń)

Dans [2] M. Kuczma considère le problème de la caractérisation des fonctions trigonométriques à l'aide d'équations fonctionnelles. Il y pose le problème suivant: caractériser la fonction cosinus comme la solution unique d'une équation à une variable vérifiant des conditions supplémentaires aussi simples que possible. Dans ce but il remplace l'équation

$$\text{(a)} \qquad \varphi(2x) = 2\varphi^2(x)-1$$

(considérée par H. G. Forder [1]) — par une autre équation, quoique plus compliquée, mais telle que $\varphi(x) = \cos x$ soit son unique solution continue, de période 2π, déterminée pour tout x.

Il est facile de vérifier que la résolution de ce problème, proposée par M. Kuczma, peut être représentée sous la forme suivante:

La fonction $\varphi(x) = \cos x$ est la solution continue unique de l'équation (a) ayant la période 2π, déterminée pour tout x et vérifiant les conditions suivantes:

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\text{(c)} \qquad \varphi(x) \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

Les conditions concernant la fonction $\varphi(x)$, quoique assez simples, sont ici bien nombreuses.

Nous allons résoudre d'une manière semblable, mais moins compliquée, un problème analogue concernant la fonction $\sin x$.

THÉORÈME. $\varphi(x) = \sin x$ *est la fonction unique vérifiant les conditions suivantes*:

(1) $\varphi(x)$ *est déterminée pour tout* x *et vérifie l'équation*

$$2\varphi^2(x) + \varphi\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1,$$

(2) $\varphi(x)$ *est une fonction impaire* (*c'est-à-dire* $\varphi(-x) = -\varphi(x)$),

(3) *$\varphi(x)$ est positive pour* $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

(4) *$\varphi(x)$ est continue dans un entourage du point* 0.

Remarque 1. Nous verrons plus tard (lemme 2) que les conditions (1) et (2) impliquent que

(5) la fonction $\varphi(x)$ est périodique avec la période 2π.

Mais la condition (2) ne peut pas être remplacée par (5), car il existe une fonction: $\varphi(x) = \frac{1}{2}$, vérifiant les conditions (1), (3), (4) et (5) et ne vérifiant pas la condition (2).

Remarque 2. La condition (3) joue aussi un rôle essentiel, car pour chaque k entier les fonctions

$$\varphi(x) = (-1)^k \sin[(2k+1)x] \tag{6}$$

vérifient toutes les conditions (1), (2) et (4).

Remarque 3. La condition (3) peut être remplacée par la suivante: „si $0 < x \leqslant \frac{\pi}{6}$, $0 < \varphi(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$", car cette condition implique en vertu de (1) la condition (3).

Remarque 4. La condition (4) peut être remplacée par la suivante: „$\varphi(x)$ est continue (1) dans un intervalle $\langle 0, \varepsilon)$ (où $\varepsilon > 0$)", car cette condition implique en vertu de (2) la condition (4).

Pour prouver notre théorème nous démontrerons quelques lemmes.

Lemme 1. *Les conditions* (1) *et* (2) *impliquent*

$$\varphi(\pi - x) = \varphi(x) . \tag{7}$$

Démonstration. En mettant: $y = -z = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ nous obtenons d'après (1) les égalités:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) = 1 - 2\varphi^2(y)$$

et

$$\varphi(\pi - x) = \varphi\left(\pi - \frac{\pi}{2} - 2z\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - 2z\right) = 1 - 2\varphi^2(z) .$$

Comme d'après (2) on a $\varphi^2(y) = [-\varphi(-y)]^2 = \varphi^2(z)$, nous en concluons que $\varphi(\pi - x) = \varphi(x)$.

Lemme 2. *Les conditions* (1) *et* (2) *impliquent que*

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x) . \tag{8}$$

---

(1) Cela veut dire que $\varphi(x)$ est continue dans $(0, \varepsilon)$ et continue à droite au point 0.

Démonstration. En se basant sur la condition (2) et sur le lemme 1 on obtient les égalités suivantes:

$$\varphi(2\pi+x)=\varphi[\pi-(2\pi+x)]=\varphi(-\pi-x)=-\varphi(\pi+x)$$
$$=-\varphi[\pi-(\pi+x)]=-\varphi(-x)=\varphi(x)\,.$$

LEMME 3. *Le conditions* (1), (2) *et* (3) *impliquent que pour chaque* x *le signe de la fonction* $\varphi(x)$ *est déterminé d'une manière univoque.*

Démonstration. En vertu de (2) on a $\varphi(0)=-\varphi(-0)$, d'où résulte

$$\varphi(0)=0\,. \tag{9}$$

Donc, en mettant $x=0$ dans (1) on obtient $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Nous avons donc $\varphi(x)\geqslant 0$ pour $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. On en conclut, d'après le lemme 1, que $\varphi(x)\geqslant 0$ pour $0\leqslant x\leqslant\pi$, donc d'après (2) on a $\varphi(x)\leqslant 0$ pour $-\pi\leqslant x\leqslant 0$. Le signe de $\varphi(x)$ étant déterminé dans l'intervalle $\langle-\pi,\pi\rangle$, elle est déterminée pour chaque x en vertu du lemme 2.

LEMME 4. *Les conditions* (1), (2) *et* (3) *impliquent que la fonction* $\varphi(x)$ *est déterminée d'une manière univoque en tout point de la forme* $x=\frac{k\pi}{2^{n-1}}$ (*où* k *et* n *sont des entiers et* $n\geqslant 0$) [2].

Démonstration (induction par rapport à n).

1° Pour $n=0$ nous considérons $\varphi\left(\frac{k\pi}{2^{-1}}\right)$, c'est-à-dire $\varphi(2k\pi)$. D'après le lemme 2 on a $\varphi(2k\pi)=\varphi(0)$ donc d'après (9): $\varphi(2k\pi)=0$.

2° Supposons que pour un nombre fixé n et pour tous les entiers k, les valeurs $\varphi\left(\frac{k\pi}{2^{n-1}}\right)$ sont déterminées d'une manière univoque. L'équation (1) entraîne la condition suivante:

$$\varphi\left(\frac{k\pi}{2^n}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1-\varphi\left[\frac{(2^{n-2}-k)\pi}{2^{n-1}}\right]\right\}}$$

qui avec le lemme 3 donne la conclusion de notre lemme.

LEMME 5. *Les conditions* (1), (2) *et* (4) *impliquent que la fonction* $\varphi(x)$ *est continue en chaque point.*

Démonstration. La fonction $\varphi(x)$ étant continue dans $(-\varepsilon,\varepsilon)$, est continue aussi dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}-2\varepsilon,\frac{\pi}{2}+2\varepsilon\right)$ d'après la condition (1). Pour prouver notre lemme il suffit donc de démontrer que notre fonc-

---

[2] Il est facile de démontrer que le lemme est aussi vrai pour n négatifs.

tion, étant continue dans un intervalle $\left(\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}+\delta\right)$, doit être continue également dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}-2\delta, \frac{\pi}{2}+2\delta\right)$.

Supposons que $\varphi(x)$ soit continue dans $\left(\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}+\delta\right)$. La condition $\frac{\pi}{2}-\delta < x < \frac{\pi}{2}+\delta$ étant équivalente aux inégalités $-\frac{\pi}{2}-2\delta < \frac{\pi}{2}-2x < -\frac{\pi}{2}+2\delta$, nous voyons que la fonction $\varphi(z) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) = 1-2\varphi^2(x)$ est continue dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}-2\delta, -\frac{\pi}{2}+2\delta\right)$. On en conclut d'après (2) que $\varphi(z)$ est continue aussi dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}-2\delta, \frac{\pi}{2}+2\delta\right)$.

Pour démontrer notre théorème il suffit de remarquer que d'après le lemme 4 la fonction $\varphi(x)$ assujettie aux conditions (1)-(4) est déterminée d'une manière univoque dans un ensemble dense et d'après le lemme 5 elle est continue, d'où résulte qu'elle est univalente en tout point. La fonction $\sin x$ vérifiant toutes les conditions du théorème, nous avons: $\varphi(x) = \sin x$.

On peut encore poser le problème suivant: toutes les solutions de l'équation (1) vérifiant les conditions (2) et (4) ont-elles la forme (6)?

Travaux cités

[1] H. G. Forder, *Duplication formulae*, Math. Gaz. 41 (1957), p. 215-217.

[2] M. Kuczma, *On a characterization of the cosine*, Ann. Polon. Math., ce volume, p. 53-57.

Reçu par la Rédaction le 30. 8. 1963