ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVI (1985)

Condition polynomiale de Leja et L-régularité dans C^n

par NGUYEN THANH VAN (Toulouse)

À la mémoire de Franciszek Leja

Résumé. Un ensemble borné E de C^n est L-réqulier en un point a si et seulement si pour tout ensemble pluripolaire X, $E \setminus X$ vérifie la condition polynomiale (L_0) en a.

1. Introduction. J. Siciak a introduit deux notions de régularité dans C^n. Soit $E \subset C^n$, et soit $a \in C^n$.

DÉFINITION 1 [9]. On dit que E vérifie la *condition polynomiale de Leja* (L_0) au point a si pour toute famille F de polynômes sur C^n telle que

$$\operatorname{Sup}\{|f(z): f \in F\} < \infty, \qquad \forall z \in E,$$

et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de a et une constante M tels que

$$|f(z)| \leqslant M \cdot \exp(\varepsilon d^0 f), \qquad \forall f \in F, \qquad \forall z \in U.$$

DÉFINITION 2 [10]. E est dit *L-régulier* au point a lorsque $V_E^*(a) = 0$, avec

$$V_E^* = \operatorname{Reg\,sup}[\sup\{u \in \mathscr{L};\ u \leqslant 0 \text{ sur } E\}]$$

où $\mathscr{L}$ est l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques u sur C^n vérifiant

$$u(z) \leqslant C_u + \operatorname{Log}(1+|z|), \qquad \forall z \in C^n.$$

La première définition est directement inspirée des travaux de F. Leja de l'année 1933 ([4] et [5]), la seconde est l'extension naturelle de la notion classique de non effilement dans C. Ces notions jouent un rôle important dans l'approximation et la théorie du potentiel en plusieurs variables complexes. Elles sont équivalentes lorsque E est compact (Siciak [9], Théorème 1.2 et Cegrell [2]). On considère ici le cas où E est borné.

THÉORÈME 1. *Soit E un ensemble borné de C^n.*

(i) *Si E est L-régulier en a, alors E vérifie (L_0) en a* (voir aussi [3], Théorème 6.5).

(ii) *Si pour tout ensemble pluripolaire X, $E \setminus X$ vérifie (L_0) en a, alors E est L-régulier en a.*

Comme préliminaire pour la preuve de ce théorème, nous allons établir une extension du Lemme de Hartogs.

2. Une extension du Lemme de Hartogs.

THÉORÈME 2. *On suppose que E soit borné et vérifie (L_0) au point a. Soient (λ_n) une suite de nombres > 0 et (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω contenant l'enveloppe polynomiale convexe de $\bar{E}$.*

Si les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $$\frac{1}{\lambda_n}\log|f_n(z)| \leqslant M \quad (\textit{constante finie}), \qquad \forall n, \forall z \in \Omega;$$

(ii) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n}\log|f_n(z)| \leqslant 0, \qquad \forall z \in E,$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\mathscr{C}$ et un voisinage U de a tels que

$$|f_n(z)| \leqslant \mathscr{C}\exp(\varepsilon\lambda_n), \qquad \forall n, \forall z \in U.$$

Démonstration. Nous avons besoin d'une version forte du Théorème de Bernstein–Walsh dûe à W. Pleśniak.

LEMME (Pleśniak [7], Lemme 2.1). *Si Ω est un ouvert de C^n et si K est un compact polynomialement convexe dans Ω, alors il existe des constantes $C > 0$ et $r > 1$ telles que pour toute fonction f holomorphe dans Ω,*

$$\operatorname{Inf}\{\|f-P\|_K \colon P \in \mathscr{P}_q\} \leqslant C\|f\|_\Omega r^{-q}, \qquad \forall q \in N,$$

où $\mathscr{P}_q$ désigne l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant q$ et $\|\ \|_K$, $\|\ \|_\Omega$ les normes uniformes sur K et Ω.

Puisque Ω contient l'enveloppe polynomiale convexe de $\bar{E}$, on peut choisir un compact polynomialement convexe K dans Ω tel que $\bar{E} \subset \mathring{K}$. Soit $r > 1$ comme dans le Lemme. On peut supposer $e^M < r$, quitte à remplacer les λ_n par $A\lambda_n$ avec une constante $A > 0$ suffisamment grande. Pour tout n il existe un polynôme Q_n de degre $\leqslant [\lambda_n]$ (partie entière de λ_n) tel que

$$\|f_n - Q_n\|_K = \operatorname{Inf}\{\|f_n - P\|_K \colon P \in \mathscr{P}_{[\lambda_n]}\},$$

$$\|f - Q_n\|_K \leqslant C \cdot e^{M\lambda_n} r^{[\lambda_n]} \leqslant C \cdot e^M = C',$$

$$|Q_n(z)| \leqslant |f_n(z) - Q_n(z)| + |f_n(z)| \leqslant C' + |f_n(z)|, \qquad z \in K.$$

Soit $u > 1$ arbitraire, en raison de la propriété (ii) de l'énoncé on peut écrire pour $z \in E$:

$$|f_n(z)| \leqslant H(z, u)u^{\lambda_n}, \qquad \forall n,$$

où $H(z, u)$ est finie. Par conséquent

$$|Q_n(z)|u^{-\lambda_n} \leqslant C' + H(z, u) < \infty, \qquad \forall z \in E, \forall n.$$

Soit maintenant $v > 1$ arbitraire. Puisque E vérifie (L_0) en a, l'inégalité précédente entraine l'existence d'un voisinage V de a et une constante $\mathscr{C}$ tels que

$$\|Q_n\|_V \leqslant \mathscr{C}(uv)^{\lambda_n}.$$

Sur $U = V \cap K$ qui est un voisinage de a, on a

$$|f_n(z)| \leqslant |f_n(z) - Q_n(z)| + |Q_n(z)| \leqslant C' + \mathscr{C}(uv)^{\lambda_n} \leqslant \mathscr{C}'(uv)^{\lambda_n}, \qquad \forall n,$$

d'où la conclusion, car pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir u et $v > 1$ tels que $uv \leqslant e^{\varepsilon}$.

Remarque. L'origine de ce résultat remonte à F. Leja [5]. J. Siciak [9] a démontré le Théorème 2, en reprenant l'argument de Leja, dans le cas où E vérifie la condition (L) en a, c'est-à-dire: pour tout voisinage V de a, $E \cap V$ vérifie (L_0) en a. Cette hypothèse est plus forte: en effet on sait d'après A. Sadullaev [8] qu'il existe un compact polynomialement convexe vérifiant (L_0) en chacun de ses points qui ne vérifie pas (L) en un point lui appartenant.

3. Démonstration du Théorème 1.

Démonstration de (i). Soit F une famille de polynômes de degré $\geqslant 1$ telle que

$$(*) \qquad \operatorname{Sup}\{|f(z)|: f \in F\} < \infty, \qquad \forall z \in E.$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$ on pose:

$$\Phi_k = \operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{k}\log|f|: f \in F,\ d^0 f = k\right\}.$$

Puisque E est non pluripolaire (E L-régulier en un point) un résultat de Lelong [6], Théorème 4 (voir aussi Siciak [10], Théorème 3.5) montre que Φ_k^* est un élément de $\mathscr{L}$. Soit $X = U\{x \in C^n: \Phi_k^*(x) > \Phi_k(x)\}$, X est négligeable au sens de Lelong donc pluripolaire d'après Bedford et Taylor [1]. On a

$$\operatorname*{Sup}_k \Phi_k^*(x) < \infty, \qquad \forall x \in E \setminus X \qquad \text{(non polaire)}$$

donc $[\operatorname{Sup}\Phi_k^*]^* \in \mathscr{L}$. On pose maintenant

$$\Psi = \limsup_{k \to \infty} \Phi_k^*$$

alors ψ^* est plurisousharmonique et $\leqslant [\operatorname{Sup}\Phi_k^*]^*$, donc $\Psi^* \in \mathscr{L}$. Soit Y l'ensemble pluripolaire $\{z \in C^n: \Psi^*(z) > \Psi(z)\}$, à cause de $(*)$ on a: $\Psi^*(x) \leqslant 0$, $\forall x \in E\setminus(XUY)$, donc: $\Psi^*(x) \leqslant V^*_{E\setminus(XUY)}$.

XUY étant pluripolaire, on a $V^*_{E\setminus(XUY)} = V_E^*$ d'après Siciak [10], Proposition 3.11, donc: $\Psi^*(a) \leqslant V_E^*(a) = 0$.

La semi-continuité supérieure de Ψ^* et le lemme de Hartogs classique donnent immédiatement: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de a et une constante M tel que $\|f\|_U \leqslant M \cdot e^{\varepsilon d^0 f}$, $\forall f \in F$.

Démonstration de (ii). E est non polaire (sinon $E \setminus E = \emptyset$ ne vérifie (L_0) en aucun point) V_E^* est donc plurisousharmonique sur C^n et $X = \{z \in C^n\colon V_E^*(z) > V_E(z)\}$ est pluripolaire. On a évidemment: $V_E^*(z) = 0$, $\forall z \in E \setminus X$. La conclusion découle immédiatement du lemme suivant.

LEMME. *Si E est un borné de C^n vérifiant la condition (L_0) en un point $a \in \operatorname{Env} \bar{E}$ et si φ est une fonction plurisousharmonique sur un ouvert $\Omega \supset \operatorname{Env} \bar{E}$ telle que $\varphi(z) \leqslant 0$, $\forall z \in E$, alors $\varphi(a) \leqslant 0$.*

Démonstration du lemme. Soit D un ouvert d'holomorphie tel que $\operatorname{Env} \bar{E} \subset D \subset \Omega$. On sait d'après un théorème bien connu de Bremermann qu'il existe une suite (f_k) de fonctions holomorphes sur D telle que

(a) $\left\{\frac{1}{k} \log|f_k|\right\}$ est localement majorée sur D,

(b) $\varphi = \left[\limsup \frac{1}{k} \log|f_k|\right]^*$,

donc: $\limsup \frac{1}{k} \log|f_k(z)| \leqslant 0$, $\forall z \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après le Théorème 2 il existe un voisinage U de a et un entier k_0 tel que: $\frac{1}{k} \log|f_k(z)| \leqslant \varepsilon$, $\forall z \in U$, $\forall k \geqslant k_0$, par conséquent $\varphi(z) \leqslant \varepsilon$, $\forall z \in U$, ce qui prouve que $\varphi(a) \leqslant 0$.

Remarque. On sait d'après Siciak [10] que si E borné est L-régulier en a, alors $E \setminus X$ est L-régulier en a pour tout ensemble pluripolaire X. On ne sait pas si cette assertion reste vraie quand on remplace la L-régularité par la condition (L_0).

Remerciements. L'auteur remercie le Professeur J. Siciak d'avoir considérablement simplifiée sa première démonstration du Théorème 2.

References

[1] E. Bedford, et B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149 (1982), 1–40.

[2] U. Cegrell, *Some characterization of L-regular points*, Monat. für Math. 89 (1980), 289–292.

[3] M. Klimek, *Extremal plurisubharmonic functions and L-regular sets in C^n*, Proc. Royal Irish Acad. 82A (2) (1982), 217–230.

[4] F. Leja, *Sur les suites de polynômes bornés presque partout sur la frontière d'un domaine*, Math. Ann. 108 (1933), 517–524.

[5] —, *Sur une propriété des suites des fonctions analytiques bornées sur une courbe*, C. R. Acad. Sci. Paris 196 (1933), 321.

[6] P. Lelong, *Théorème de Banach-Steinhaus et applications entières d'espaces vectoriels*, Séminaire Lelong 1970, Lecture Notes Springer 205 (1971), 87–112.
[7] W. Pleśniak, *Invariance of the L-regulariry of compact sets in C^n under holomorphic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 246 (1978), 373–383.
[8] A. Sadullaev, *Compacts de C^n localement et globalement P-réguliers* (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR 250 (1980), 1324–1327.
[9] J. Siciak, *Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of C^n*, Ann. Polon. Math. 22 (1969), 145–171.
[10] –, *Extremal plurisubharmonic functions in C^n*, ibidem 39 (1981), 175–211.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
118 ROUTE DE NARBONNE
31400 TOULOUSE, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 22.09.1983