ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1964)

Sur un problème aux limites discontinues dans la théorie des fonctions analytiques

par E. NICZYPOROWICZ (Bialystok)

1. Introduction. Soit $|z| = 1$ la circonférence de rayon unité dans le plan de la variable complexe. Désignons par S^+ le domaine formé par l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et par S^- le domaine $|z| > 1$. On supposera que le contour L des domaines S^+ et S^- est décrit dans le sens positif, c'est-à-dire conforme au sens de la rotation d'angle $\pi/2$ qui ramène l'axe réel à l'axe imaginaire.

Le problème aux limites de Riemann consiste à trouver une fonction $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorphe dans le domaine S^+, limité par le contour L, continue dans le domaine $S^+ + L$ et dont les valeurs limites $\Phi^+(t) = u(t) + iv(t)$ satisfont à la condition:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Re}\{[a(t)+ib(t)]\Phi^+(t)\} \equiv a(t)u(t) - b(t)v(t) = f(t)\,,$$

où $a(t), b(t), f(t)$ sont des fonctions réelles définies pour $t \in L$.

Le problème aux limites de Riemann est dit continu ou discontinu suivant que $a(t), b(t), f(t)$ sont des fonctions continues ou discontinues en t.

C'est N. I. Muskhelishwili ([1], pp. 105-112 et pp. 279-283) qui a résolu le problème de Riemann en le ramenant au problème de Hilbert. Le problème discontinu généralisé de Riemann relatif aux fonctions de la classe $\mathfrak{H}_a^{\mu}$ a été résolu par W. Pogorzelski, [2].

2. Énoncé du problème. Le problème consiste à trouver un système de fonctions:

$$\Phi_\nu(z) = u_\nu(x, y) + iv_\nu(x, y) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

1° définies et holomorphes dans le domaine S^+;

2° ayant des fonctions limites $\Phi_\nu(t) = u_\nu(t) + iv_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ pour $t \in L' = L - \sum_{j=1}^{p} c_j$. Les points $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sont leurs points de discontinuité au voisinage desquels les fonctions $\Phi_\nu(z)$ vérifient les inégalités:

$$\text{(2)} \qquad |\Phi_\nu(z)| < \frac{\text{const}}{\prod_{j=1}^{p} |z - c_j|^{\Theta_j \varrho}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqslant \varrho < 1),$$

où:

$$\Theta_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j = k_1, k_2, \ldots, k_q, \\ 1 & \text{si} \quad j \neq k_1, k_2, \ldots, k_q, \end{cases} \qquad q \leqslant p;$$

3° telles que les valeurs limites satisfont à n équations:

$$\text{(3)} \quad \operatorname{Re}\{[a_\nu(t) + ib_\nu(t)]\Phi_\nu^+(t)\}$$
$$\equiv a_\nu(t)u_\nu(t) - b_\nu(t)v_\nu(t) = f_\nu(t) + \lambda F_\nu[t, u_1(t), \ldots, u_n(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)] +$$
$$+ \int\limits_L \frac{\varphi_\nu[t, u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau), v_1(\tau), \ldots, v_n(\tau)]}{|\tau - t|^\delta} d\tau \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

pour $t \in L'$; δ est une constante non négative inférieure à l'unité;

4° les points $c_1, c_2, \ldots, c_p \in L$ sont rangés conformément au sens positif du contour L $(c_{p+1} = c_1)$;

5° $a_\nu(t), b_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions réelles du point $t \in L'$; elles ont aux points $c_1, c_2, \ldots, c_p$ des discontinuités de première espèce et satisfont à l'intérieur des arcs $\widehat{c_j c_{j+1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, p;\ c_{p+1} = c_1)$ aux conditions de Hölder

$$\begin{aligned} |a_\nu(t) - a_\nu(t_1)| &\leqslant \text{const}\, |t - t_1|^h, \\ |b_\nu(t) - b_\nu(t_1)| &\leqslant \text{const}\, |t - t_1|^h, \end{aligned} \qquad (0 < h \leqslant 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

et à la condition:

$$a_\nu^2(t) + b_\nu^2(t) \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

6° les fonctions $f_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions réelles du point $t \in L'$, de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ (voir W. Pogorzelski [4], p. 151); elles vérifient à l'intérieur des arcs $\widehat{c_j c_{j+1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, p;\ c_{p+1} = c_1)$ les inégalités:

$$\begin{aligned} |f_\nu(t)| &< \frac{\text{const}}{\prod\limits_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \alpha}}, \\ |f_\nu(t) - f_\nu(t_1)| &< \frac{\text{const}\, |t - t_1|^\mu}{W(t, t_1)}, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$W(t, t_1) = |t - c_j|^{\Theta_j \alpha + \mu} |t_1 - c_{j+1}|^{\Theta_{j+1} \alpha + \mu} \qquad (t \in \widehat{c_j c_{j+1}};\ t_1 \in \widehat{t c_{j+1}})$$

et:

$$\Theta_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j = k_1, k_2, \ldots, k_q, \\ 1 & \text{si} \quad j \neq k_1, k_2, \ldots, k_q, \end{cases} \qquad \Theta_{j+1} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j+1 = k_1, k_2, \ldots, k_q, \\ 1 & \text{si} \quad j+1 \neq k_1, k_2, \ldots, k_q, \end{cases}$$

$$q \leqslant p, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad 0 < \mu < 1, \quad 0 < \alpha + \mu < 1;$$

7° les fonctions $F_\nu[t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n]$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions réelles définies dans la région $t \in L'$, $u_\nu + iv_\nu \in \Pi$ (Π étant le plan de la variable complexe); elles satisfont aux inégalités de Hölder-Lipschitz

$$(4)\qquad |F_\nu(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)-F_\nu(t_1, u_1', \ldots, u_n', v_1', \ldots, v_n')| < k_F\left[\frac{|t-t_1|^{h_F}}{W(t,t_1)}+\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu-u_\nu'|+\sum_{\nu=1}^{n}|v_\nu-v_\nu'|\right]$$

et à l'inégalité:

$$(5)\qquad |F_\nu(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)| < k_F\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu|+\sum_{\nu=1}^{n}|v_\nu|\Big)+m_F\,,$$

où k_F, h_F, m_F sont des nombres positifs fixés et $0 < h_F \leqslant 1$;

8° les fonctions $\varphi_\nu[t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n]$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions réelles définies dans la région $t \in L'$, $u_\nu + iv_\nu \in \Pi$; elles satisfont à l'inégalité de Hölder-Lipschitz:

$$(6)\qquad |\varphi_\nu(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)-\varphi_\nu(t_1, u_1', \ldots, u_n', v_1', \ldots, v_n')| < k_\varphi\left[|t-t_1|^{h_\varphi}+\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu-u_\nu'|+\sum_{\nu=1}^{n}|v_\nu-v_\nu'|\right]$$

et à l'inégalité:

$$(7)\qquad |\varphi_\nu(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)| < k_\varphi\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu|+\sum_{\nu=1}^{n}|v_\nu|\Big)+m_\varphi\,,$$

où $k_\varphi, h_\varphi, m_\varphi$ sont des nombres positifs fixés et $0 < h_\varphi \leqslant 1$.

3. Résolution du problème. En s'appuyant sur les résultats obtenus par W. Pogorzelski dans [2], on peut affirmer que dans le cas où tous les indices $\varkappa_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont non négatifs, si le problème (3) a une solution formée par les fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$ dont les valeurs limites $\Phi_1^+(t), \Phi_2^+(t), \ldots, \Phi_n^+(t)$ sur la circonférence L sont des fonctions de classe $\mathfrak{H}(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$, les fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$ satisfont nécessairement à l'équation suivante (analogue à l'équation (62) de [2]):

$$(8)\qquad \Phi_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{Z_\nu(z,\tau)\widetilde{f}_\nu(\tau)\,d\tau}{\tau-z}+\frac{1}{2}X_\nu(z)P_\nu(z)+\frac{1}{2}\overline{X_\nu\Big(\frac{1}{\bar z}\Big)}\,\overline{P_\nu\Big(\frac{1}{\bar z}\Big)}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

où:

$$(9)\qquad Z_\nu(z,\tau) = \frac{X_\nu(z)[a_\nu(\tau)-ib_\nu(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)[a_\nu^2(\tau)+b_\nu^2(\tau)]}-\frac{\overline{X_\nu\Big(\frac{1}{\bar z}\Big)}\,\frac{z}{\tau}\,[a_\nu(\tau)+ib_\nu(\tau)]}{\overline{X_\nu^+(\tau)}[a_\nu^2(\tau)+b_\nu^2(\tau)]}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$(10)\qquad f_\nu(t) = f_\nu(t) + \lambda F_\nu[t, u_1(t), \ldots, u_n(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)] + \\ + \int_L \frac{\varphi_\nu[t, u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau), v_1(\tau), \ldots, v_n(\tau)]}{|\tau - t|^\delta} d\tau \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$X_\nu(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - c_j)^{\lambda_j^\nu} e^{\Gamma_\nu(z)},$$

$$\Gamma_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G_\nu(\tau)\, d\tau}{\tau - z},$$

$$G_\nu(\tau) = -\frac{a_\nu(\tau) - ib_\nu(\tau)}{a_\nu(\tau) + ib_\nu(\tau)}.$$

Le valeurs λ_j^ν vérifient l'inégalité

$$-1 < \lambda_j^\nu + (a_j^{\nu+} + a_j^{\nu-}) < 1$$

où:

$$a_j^{\nu+} = -\frac{1}{2\pi i} \log G_\nu(c_j + 0), \qquad a_j^{\nu-} = \frac{1}{2\pi i} \log G_\nu(c_j - 0), \qquad (j = 1, 2, \ldots, p;\ \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$P_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont des polynômes dont le degré ne dépasse pas $\varkappa_\nu$, où:

$$\varkappa_\nu = -\sum_{j=1}^{p} \lambda_j^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on tient compte de ce que

$$\Phi_\nu^+(t) = u_\nu(t) + iv_\nu(t),$$

$$\overline{\Phi_\nu^+(t)} = u_\nu(t) - iv_\nu(t),$$

ou bien

$$u_\nu(t) = \frac{\Phi_\nu^+(t) + \overline{\Phi_\nu^+(t)}}{2},$$

$$v_\nu(t) = \frac{\Phi_\nu^+(t) - \overline{\Phi_\nu^+(t)}}{2i},$$

on trouve:

$$(11)\qquad F_\nu[t, u_1(t), \ldots, u_n(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)] \\ = \widetilde{F}_\nu[t, \Phi_1^+(t), \ldots, \Phi_n^+(t)] = \widetilde{F}_\nu[t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ainsi que:

$$(12)\qquad \varphi_\nu[t, u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau), v_1(\tau), \ldots, v_n(\tau)] \\ = \widetilde{\varphi}_\nu[t, \Phi_1^+(\tau), \ldots, \Phi_n^+(\tau)] = \widetilde{\varphi}_\nu[t, \psi_1(\tau), \ldots, \psi_n(\tau)] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

où l'on a posé:

(13) $$\psi_\nu(t) = \Phi_\nu^+(t) \quad \text{pour} \quad t \in L' .$$

En vertu de (11), (12) et (10), les équations (8) peuvent se mettre sous la forme:

(14) $$\Phi_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Z_\nu(z,\tau)f_\nu(\tau)\,d\tau}{\tau - z} + \frac{\lambda}{2\pi i}\int_L \frac{Z_\nu(z,\tau)\widetilde{F}_\nu[\tau,\psi_1(\tau),\ldots,\psi_n(\tau)]\,d\tau}{\tau - z} +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Z_\nu(z,\tau)}{\tau - z}\left\{\frac{\widetilde{\varphi}_\nu[\tau,\psi_1(\vartheta),\ldots,\psi_n(\vartheta)]\,d\vartheta}{|\vartheta-\tau|^\delta}\right\}d\tau +$$
$$+\frac{1}{2}X_\nu(z)P_\nu(z) + \frac{1}{2}\overline{X_\nu\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\,\overline{P\left(\frac{1}{\bar z}\right)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) .$$

Après avoir appliqué les formules de Plemelj ([1], p. 47) et en introduisant les notations (13), on aura

(15) $$\psi_\nu(t) = \frac{1}{2}Z_\nu(t,t)f_\nu(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Z_\nu(t,\tau)f_\nu(\tau)\,d\tau}{\tau - t} +$$
$$+\frac{\lambda}{2}Z_\nu(t,t)\widetilde{F}_\nu[t,\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)] +$$
$$+\frac{\lambda}{2\pi i}\int_L \frac{Z_\nu(t,\tau)\widetilde{F}_\nu[\tau,\psi_1(\tau),\ldots,\psi_n(\tau)]\,d\tau}{\tau - t} +$$
$$+\frac{1}{2}Z_\nu(t,t)\int_L \frac{\widetilde{\varphi}_\nu[t,\psi_1(\vartheta),\ldots,\psi_n(\vartheta)]\,d\vartheta}{|\vartheta - t|^\delta} +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L Z_\nu(t,\tau)\left\{\int_L \frac{\widetilde{\varphi}_\nu[\tau,\psi_1(\vartheta),\ldots,\psi_n(\vartheta)]\,d\vartheta}{|\vartheta-\tau|^\delta}\right\}\frac{d\tau}{\tau - t} +$$
$$+\frac{1}{2}X_\nu^+(t)P_\nu(t) + \frac{1}{2}\overline{X_\nu^-(t)}\,\overline{P_\nu(t)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) ,$$

où l'on a posé conformément à la formule (9)

(16) $$Z_\nu(t,t) = \frac{a_\nu(t) - ib_\nu(t)}{a_\nu^2(t) + b_\nu^2(t)} - \frac{\overline{X_\nu^-(t)}[a_\nu(t) + ib_\nu(t)]}{\overline{X_\nu^+(t)}[a_\nu^2(t) + b_\nu^2(t)]} ,$$

(17) $$Z_\nu(t,\tau) = \lim_{z\to t} Z_\nu(z,\tau) = \frac{X_\nu^+(t)[a_\nu(\tau) - ib_\nu(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)[a_\nu^2(\tau) + b_\nu^2(\tau)]} - \frac{\overline{X_\nu^-(t)}\dfrac{t}{\tau}[a_\nu(\tau) + ib_\nu(\tau)]}{\overline{X_\nu^+(\tau)}[a_\nu^2(\tau) + b_\nu^2(\tau)]} ,$$
$$X_\nu^+(t) = \sqrt{G_\nu(t)}\,X_\nu(t) ,$$
$$X_\nu^-(t) = \frac{X_\nu(t)}{\sqrt{G_\nu(t)}} .$$

Considérons dans les équations (15) les fonctions $\psi_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ comme inconnues tandis que les fonctions $P_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ comme des polynômes arbitraires de degré $\varkappa_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Les équations (15) forment un système d'équations intégrales à singularités fortes, qui ne peut être résolu par les méthodes de l'analyse classique. On utilisera donc, pour le résoudre, une méthode topologique et on prouvera qu'il existe au moins un système de fonctions $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ $\ldots, \psi_n(t)$ de classe $\mathfrak{H}(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ satisfaisant au système d'équations intégrales (14) en tous les points $t \in L'$ différents de c_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$, pourvu que $|\lambda|$ soit suffisamment petit.

Soit Λ un espace fonctionnel formé de tous les systèmes de n fonctions complexes $[\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)]$ définies et continues pour $t \in L'$, satisfaisant aux inégalités:

$$|\psi_\nu(t)| < \frac{\text{const}}{\prod\limits_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho + \mu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où:

$$\Theta_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j = k_1, k_2, \ldots, k_q, \\ 1 & \text{si} \quad j \neq k_1, k_2, \ldots, k_q, \end{cases} \qquad q \leqslant p.$$

La constante qui figure au numérateur peut admettre toutes les valeurs positives, tandis que le nombre ϱ est une constante positive, inférieure à l'unite, fixée pour tout l'espace Λ conformément à la condition:

$$\max_{\substack{\nu=1,2,\ldots,n \\ j \neq k_1, k_2, \ldots, k_q}} |\lambda_j^\nu + (\alpha_j^{\nu+} + \alpha_j^{\nu-})| < \varrho < 1$$

où les valeurs $\lambda_j^\nu + (\alpha_j^{\nu+} + \alpha_j^{\nu-})$ caractérisent l'allure des fonctions canoniques $X_\nu(z)$ au voisinage des points c_j $(j = 1, \ldots, p)$. Le nombre μ est une constante arbitraire qu'on choisit d'après les conditions:

$$\varrho + \mu < 1; \quad 0 < \mu < \min(h, h_F, h_\varphi, \delta); \tag{18}$$
$$\mu + \max_{\substack{\nu=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,p}} |\lambda_j^\nu + (\alpha_j^{\nu+} + \alpha_j^{\nu-})| < 1$$

où h, h_F, h_φ caractérisent les fonctions $a_\nu, b_\nu, F_\nu, \varphi_\nu$ (définies au § 2: 5° 7°, 8°).

Introduisons maintenant des définitions grâce auxquelles l'espace Λ sera un espace de Banach, c'est-à-dire un espace linéaire, normé, métrique et complet.

Admettons que la somme de deux points arbitraires $U = [\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)]$ et $U' = [\psi_1'(t), \psi_2'(t), \ldots, \psi_n'(t)]$ de l'espace Λ est un point de cet espace défini par la formule

$$[\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)] + [\psi_1'(t), \psi_2'(t), \ldots, \psi_n'(t)]$$
$$= [\psi_1(t) + \psi_1'(t), \psi_2(t) + \psi_2'(t)], \ldots, \psi_n(t) + \psi_n'(t)]$$

et que le produit d'un nombre réel γ par un point $U = [\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ $\ldots, \psi_n(t)]$ de l'espace Λ est un point de cet espace défini par la formule

$$\gamma[\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)] = [\gamma\psi_1(t), \gamma\psi_2(t), \ldots, \gamma\psi_n(t)] .$$

En observant que la somme et le produit ainsi définis obéissent aux lois ordinaires de l'algèbre, on voit que l'espace Λ est un espace linéaire.

En définissant la norme $\|U\|$ du point $U = [\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)]$ de l'espace Λ par la formule

$$\|U\| = \max_{\nu=1,2,\ldots,n} \sup_{t\in L'} \Big[\prod_{j=1}^{p} |t-c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu} |\psi_\nu(t)|\Big], \tag{19}$$

où

$$\Theta_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j = k_1, k_2, \ldots, k_q, \\ 1 & \text{si} \quad j \neq k_1, k_2, \ldots, k_q, \end{cases} \qquad q \leqslant p$$

et la distance $\delta(U, U')$ des points U et U' de l'espace Λ par la relation

$$\delta(U, U') = \|U-U'\|,$$

on voit que l'espace Λ un espace normé et métrique.

Lemme 1. *L'espace fonctionnel Λ est un espace complet.*

Démonstration. Soit $\{U_m\} = \{[\psi_1^{(m)}(t), \psi_2^{(m)}(t), \ldots, \psi_n^{(m)}(t)]\}$ une suite arbitraire de points de l'espace Λ vérifiant la condition de Cauchy au sens de la norme définie ci-dessus, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}\delta(U_m, U_{m+p}) &= \|U_m - U_{m+p}\| \\ &= \max_{\nu=1,2,\ldots,n} \sup_{t\in L'} \Big[\prod_{j=1}^{p} |t-c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu} |\psi_\nu^{(m)}(t) - \psi_\nu^{(m+p)}(t)|\Big] < \varepsilon\end{aligned}$$

lorsque $m > N_\varepsilon$ (N_ε étant le nombre correspondant à $\varepsilon > 0$) et p est un nombre entier positif arbitraire.

Il en résulte que les suites des fonctions:

$$\Psi_\nu^{(m)}(t) = \prod_{j=1}^{p} |t-c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu} \psi_\nu^{(m)}(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

convergent uniformément, au sens ordinaire, vers les fonctions respectives $\Psi_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ qui sont continues et bornées dans l'ensemble des points $t \in L'$. Par conséquent le système de fonctions

$$\psi_\nu(t) = \frac{\Psi_\nu(t)}{\prod_{j=1}^{p} |t-c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu}}$$

définies dans l'ensemble L', constitue le point limite $U = [\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ $\ldots, \psi_n(t)]$ de la suite $\{U_m\} = \{[\psi_1^{(m)}(t), \psi_2^{(m)}(t), \ldots, \psi_n^{(m)}(t)]\}$ au sens de la norme définie ci-dessus. Il a donc été établi que la condition de Cauchy est une condition suffisante de la convergence d'une suite de points $\{U_m\}$. Ainsi l'espace Λ est complet.

Considerons maintenant l'ensemble E de tous les points $[\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ $\ldots, \psi_n(t)]$ *de l'espace Λ dont les composantes satisfont aux inégalités*

$$\text{(20)}\qquad \begin{aligned} & W_1(t, t_1)|\psi_\nu(t) - \psi_\nu(t_1)| \leqslant \varkappa |t-t_1|^\mu, \\ & \prod_{j=1}^{p} |t-c_j|^{\Theta_j\varrho} |\psi_\nu(t)| \leqslant R, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où $W_1(t, t_1) = |t-c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu} |t_1 - c_{j+1}|^{\Theta_{j+1}\varrho+\mu}$; R, $\varkappa$ *sont des nombres positifs fixés arbitrairement,*

$$\Theta_j = \begin{cases} 0 & si \quad j = k_1, k_2, \ldots, k_q, \\ 1 & si \quad j \neq k_1, k_2, \ldots, k_q, \end{cases}$$

et

$$\Theta_{j+1} = \begin{cases} 0 & si \quad j+1 = k_1, k_2, \ldots, k_q, \\ 1 & si \quad j+1 \neq k_1, k_2, \ldots, k_q; \end{cases}$$

$j = 1, 2, \ldots, p$, $q \leqslant p$, $\Theta_{p+1} = \Theta_1$, $t \in \widehat{c_j c_{j+1}}$, $t_1 \in \widehat{t c_{j+1}}$.

On démontrera que l'ensemble E est fermé.

Conformément à la définition de l'espace Λ, les fonctions $\psi_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ de l'ensemble E sont de classe $\mathfrak{H}_\varrho^\mu(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$. Soit $\{U_m\} = \{[\psi_1^{(m)}(t), \psi_2^{(m)}(t), \ldots, \psi_n^{(m)}(t)]\}$ une suite arbitraire de points de l'ensemble E, convergente au sens de la norme (19) vers le point $U = [\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)]$. Les suites des fonctions $\{\psi_\nu^{(m)}(t)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont alors uniformément convergentes, en toute portion fermée de l'ensemble L', vers les fonctions respectives $\psi_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. On en déduit que le point limite satisfait aussi aux inégalités (20). L'ensemble E contient donc tous ses points limites, c'est-à-dire c'est un ensemble fermé.

Montrons maintenant que l'ensemble E est un ensemble convexe.

Soient $U = [\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)]$ et $U' = [\psi_1'(t), \psi_2'(t), \ldots, \psi_n'(t)]$ deux points arbitraires de l'ensemble E; ils vérifient donc les inégalités (20). On voit bienque tout point $(1-\gamma)U + \gamma U'$, où $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, satisfait aux relations

$$\prod_{j=1}^{p} |t-c_j|^{\Theta_j\varrho} |(1-\gamma)\psi_\nu(t) + \gamma\psi_\nu'(t)| \leqslant R,$$

$$W_1(t, t_1)|(1-\gamma)[\psi_\nu(t) - \psi_\nu(t_1)] + \gamma[\psi_\nu'(t) - \psi_\nu'(t_1)]| \leqslant \varkappa |t-t_1|^\mu$$

qui sont analogues à (20); le point $(1-\gamma)U + \gamma U'$ appartient donc à l'ensemble E, ce qui prouve que cet ensemble est convexe.

Vu le système d'équations intégrales (15), transformons l'ensemble E en l'ensemble E' à l'aide des relations

$$\begin{aligned}(21)\qquad \chi_\nu(t) &= \frac{1}{2} Z_\nu(t,t) f_\nu(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Z_\nu(t,\tau) f_\nu(\tau)\, d\tau}{\tau - t} + \\ &+ \frac{\lambda}{2} Z_\nu(t,t) \widetilde{F}_\nu[t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)] + \\ &+ \frac{\lambda}{2\pi i}\int_L \frac{Z_\nu(t,\tau)\widetilde{F}_\nu[\tau, \psi_1(\tau), \ldots, \psi_n(\tau)]\, d\tau}{\tau - t} + \\ &+ \frac{1}{2} Z_\nu(t,t)\int_L \frac{\widetilde{\varphi}_\nu[t, \psi_1(\vartheta), \ldots, \psi_n(\vartheta)]\, d\vartheta}{|\vartheta - t|^\delta} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_L Z_\nu(t,\tau)\left\{\int_L \frac{\widetilde{\varphi}_\nu[\tau, \psi_1(\vartheta), \ldots, \psi_n(\vartheta)]\, d\vartheta}{|\vartheta - \tau|^\delta}\right\}\frac{d\tau}{\tau - t} + \\ &+ \frac{1}{2} X_\nu^+(t) P_\nu(t) + \frac{1}{2}\overline{X_\nu^-(t)}\,\overline{P_\nu(t)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,.\end{aligned}$$

Cherchons maintenant des limitations pour les fonctions $\chi_1(t), \chi_2(t), \ldots \ldots, \chi_n(t)$.

Si l'on tient compte de (11), de l'hypothèse (5), des inégalités

$$(22)\qquad \begin{aligned} |u_\nu(\tau)| &\leqslant |\psi_\nu(\tau)|\,, \\ |v_\nu(\tau)| &\leqslant |\psi_\nu(\tau)| \end{aligned}$$

et des relations (20), on voit que les fonctions $\widetilde{F}_\nu$ vérifient les conditions

$$(23)\qquad |\widetilde{F}_\nu[\tau, \psi_1(\tau), \ldots, \psi_n(\tau)]| < \frac{2nk_F R + Cm_F}{\prod\limits_{j=1}^{p} |\tau - c_j|^{\Theta_j\varrho}}\,,$$

où

$$(24)\qquad C = \sup_{\tau\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p} |\tau - c_j|^{\Theta_j\varrho}\Big]\,.$$

D'autre part, la relation (11), l'hypothèse (4), les inégalités

$$(25)\qquad \begin{aligned} |u_\nu(\tau) - u_\nu(\tau_1)| &\leqslant |\psi_\nu(\tau) - \psi_\nu(\tau_1)|\,, \\ |v_\nu(\tau) - v_\nu(\tau_1)| &\leqslant |\psi_\nu(\tau) - \psi_\nu(\tau_1)| \end{aligned}$$

et les relations (20) entraînent les inégalités

$$(26)\qquad |\widetilde{F}_\nu[\tau, \psi_1(\tau), \ldots, \psi_n(\tau)] - \widetilde{F}_\nu[\tau_1, \psi_1(\tau_1), \ldots, \psi_n(\tau_1)]| < \frac{k_F(C' + 2n\varkappa)|\tau - \tau_1|^\mu}{W_1(\tau, \tau_1)}$$

où l'on a posé:

$$(27)\qquad C' = \sup_{\tau,\tau_1\in L'}[|\tau - \tau_1|^{h_F - \mu}]\,,$$

$\tau \in \widehat{c_j c_{j+1}}$, $\tau_1 \in \widehat{\tau c_{j+1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, p;\ c_{p+1} = c_1)$.

De même l'égalité (12), l'hypothèse (7), les inégalités (22) et (20) impliquent la limitation

$$|\tilde{\varphi}_\nu[\tau, \psi_1(\vartheta), \dots, \psi_n(\vartheta)]| < \frac{2nk_\varphi R + C_1 m_\varphi}{\prod_{j=1}^{p} |\vartheta - c_j|^{\Theta_j \varrho}}, \tag{28}$$

où

$$C_1 = \sup_{\vartheta \in L'} \Big[\prod_{j=1}^{p} |\vartheta - c_j|^{\Theta_j \varrho}\Big]. \tag{29}$$

Les relations (12), (6) et (25) entraînent (si l'on tient compte de (20)) l'inégalité:

$$|\tilde{\varphi}_\nu[\tau, \psi_1(\vartheta), \dots, \psi_n(\vartheta)] - \tilde{\varphi}_\nu[\tau_1, \psi_1(\vartheta_1), \dots, \psi_n(\vartheta_1)]| < \frac{k_\varphi C_1'[|\tau - \tau_1|^\mu + |\vartheta - \vartheta_1|^\mu]}{W_1(\vartheta, \vartheta_1)}, \tag{30}$$

où l'on a posé

$$C_1' = \max[\sup_{\vartheta, \vartheta_1 \in L'} W_1(\vartheta, \vartheta_1), 2n\varkappa]. \tag{31}$$

Si l'on tient compte des hypothèses que les fonctions $f_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ sont des fonctions de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_q})$ et que les fonctions $a_\nu(t)$, $b_\nu(t)$ satisfont à la condition de Hölder à l'intérieur des arcs $\widehat{c_j c_{j+1}}$ $(j = 1, 2, \dots, p;\ c_{p+1} = c_1)$ ainsi que des notations (9), (16), (17), on parvient à la conclusion que les fonctions (21) sont définies et continues sur L à l'intérieur des arcs $\widehat{c_j c_{j+1}}$ $(j = 1, 2, \dots, p;\ c_{p+1} = c_1)$. En vertu du théorème 3, [3], et des relations (23), (28), (26), (30) les fonctions (21) vérifient les inégalités:

$$\begin{aligned} |\chi_\nu(t)| &\leqslant \frac{m_\chi}{\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho}}, \\ |\chi_\nu(t) - \chi_\nu(t_1)| &\leqslant \frac{k_\chi}{W_1(t, t_1)} |t - t_1|^\mu, \end{aligned} \tag{32}$$

où m_χ et k_χ désignent des constantes définies par les relations

$$\begin{aligned} m_\chi = {} & A_1 M_1 + A_2 + |\lambda| M_1(2nk_F R + Cm_F) + |\lambda| A_3 k_F(C' + 2n\varkappa) + \\ & + |\lambda| A_4(2nk_F R + Cm_F) + A_5 M_1(2nk_\varphi R + C_1 m_\varphi) + \\ & + A_6 M_2(2nk_\varphi R + C_1 m_\varphi) + A_7 M_P, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_\chi = {} & A_1' M_1 + A_2' + |\lambda| M_1(2nk_F R + Cm_F) + |\lambda| A_3' k_F(C' + 2n\varkappa) + \\ & + |\lambda| A_4'(2nk_F R + Cm_F) + A_5' M_1(2nk_\varphi R + C_1 m_\varphi) + \\ & + A_6' M_2(2nk_\varphi R + C_1 m_\varphi) + A_7' M_P + A_8' k_P. \end{aligned}$$

Dans ces dernières relations on a posé

$$M_1 = \sup_{t \in L'} |Z_\nu(t, t)|\,,$$

$$M_2 = \sup_{t \in L'} \left[\left| \int\limits_L \frac{Z_\nu(t, \tau)\, d\tau}{\tau - t} \right| \prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho} \right],$$

$$M_P = \sup_{t \in L'} |P_\nu(t)|$$

et A_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$, A'_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ y désignent des constantes positives indépendantes des fonctions qui interviennent au second membre de la relation (21) et k_P est un coefficient de Hölder concernant les fonctions $P_\nu(t)$ sur L.

On déduit des limitations (32) que la transformation (21) fait correspondre à tout point $[\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)]$ de l'ensemble E un certain point $[\chi_1(t), \chi_2(t), \ldots, \chi_n(t)]$ du même ensemble, pourvu que $m_\chi \leqslant R$ et $k_\chi \leqslant \varkappa$, donc si le module du paramètre λ satisfait aux inégalités

$$(33)\qquad \begin{aligned} |\lambda| &\leqslant \frac{R - [A_1 M_1 + A_2 + (A_5 M_1 + A_6 M_2)(2nk_\varphi R + C_1 m_\varphi) + A_7 M_P]}{(M_1 + A_4)(2nk_F R + C m_F) + A_3 k_F (C' + 2n\varkappa)}\,, \\ |\lambda| &\leqslant \frac{\varkappa - [A'_1 M_1 + A'_2 + (A'_5 M_1 + A'_6 M_2)(2nk_\varphi R + C_1 m_\varphi) + A'_7 M_P + A'_8 k_P]}{(M_1 + A'_4)(2nk_F R + C m_F) + A'_3 k_F (C' + 2n\varkappa)}\,. \end{aligned}$$

Les constantes R et $\varkappa$ qui figurent dans la formule (20) sont des nombres positifs admis arbitrairement. On peut donc les choisir de manière que l'intervalle de variation de $|\lambda|$ soit le plus grand. Supposons donc R et $\varkappa$ suffisamment grands pour que les deux numérateurs des fractions qui interviennent dans (33) soient positifs. Si $\varkappa$ croît infiniment à partir de la valeur $A'_1 M_1 + A'_2 + (A'_5 M_1 + A'_6 M_2)(2nk_\varphi R + C_1 m_\varphi) + A'_7 M_P + A'_8 k_P$, tandis que R reste constant, le second membre de la première inégalité de (33) décroît jusqu'à zéro et le second membre de la seconde inégalité de (33) croît de zéro jusqu'à la valeur limite $1/2nA'_3 k_F$. Si l'on pose $|\lambda| < 1/2nA'_3 k_F$, on peut choisir R et $\varkappa$ suffisamment grands pour que les conditions $m_\chi \leqslant R$ et $k_\chi \leqslant \varkappa$ soient vérifiées et l'ensemble E', obtenu de E par la transformation (21), sera un sousensemble de E.

LEMME 2. *L'opération* (21) *est continue dans l'espace* Λ.

Démonstration. Conformément à la définition de la continuité d'une transformation, il faut est nécessaire et suffisant de prouver que si une suite arbitraire de points $\{U_m\} = \{[\psi_1^{(m)}(t), \psi_2^{(m)}(t), \ldots, \psi_n^{(m)}(t)]\}$ de l'ensemble E converge vers le point $U = [\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)]$, la suite des points $\{U'_m\} = \{[\chi_1^{(m)}(t), \chi_2^{(m)}(t), \ldots, \chi_n^{(m)}(t)]\}$ transformés par (21) converge vers le point transformé $U' = [\chi_1(t), \chi_2(t), \ldots, \chi_n(t)]$ la convergence étant entendue au sens de la norme (19).

Soit

$$(34)\quad \lim_{m\to\infty}\delta(U_m, U) = \lim_{m\to\infty}\max_{\nu=1,2,\dots,n}\sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|\psi_\nu^{(m)}(t)-\psi_\nu(t)|\Big] = 0\,.$$

Prenons la différence

$$(35)\quad \chi_\nu^{(m)}(t)-\chi_\nu(t)$$
$$= \frac{\lambda}{2}Z_\nu(t,t)\{\widetilde{F}_\nu[t,\psi_1^{(m)}(t),\dots,\psi_n^{(m)}(t)]-\widetilde{F}_\nu[t,\psi_1(t),\dots,\psi_n(t)]\}+$$
$$+\frac{\lambda}{2\pi i}[I_\nu^{1,(m)}(t)-I_\nu^1(t)]+\frac{1}{2}Z_\nu(t,t)[I_\nu^{2,(m)}(t)-I_\nu^2(t)]+\frac{1}{2\pi i}[I_\nu^{3,(m)}(t)-I_\nu^3(t)]\,,$$

où

$$(36)\quad \begin{cases} I_\nu^{1,(m)}(t) = \displaystyle\int_L \frac{Z_\nu(t,\tau)\widetilde{F}_\nu[\tau,\psi_1^{(m)}(\tau),\dots,\psi_n^{(m)}(\tau)]\,d\tau}{\tau-t}\,, \\ I_\nu^1(t) = \displaystyle\int_L \frac{Z_\nu(t,\tau)\widetilde{F}_\nu[\tau,\psi_1(\tau),\dots,\psi_n(\tau)]\,d\tau}{\tau-t}\,; \end{cases}$$

$$(37)\quad \begin{cases} I_\nu^{2,(m)}(t) = \displaystyle\int_L \frac{\widetilde{\varphi}_\nu[t,\psi_1^{(m)}(\vartheta),\dots,\psi_n^{(m)}(\vartheta)]\,d\vartheta}{|\vartheta-t|^\delta}\,, \\ I_\nu^2(t) = \displaystyle\int_L \frac{\widetilde{\varphi}_\nu[t,\psi_1(\vartheta),\dots,\psi_n(\vartheta)]\,d\vartheta}{|\vartheta-t|^\delta}\,; \end{cases}$$

$$(38)\quad \begin{cases} I_\nu^{3,(m)}(t) = \displaystyle\int_L Z_\nu(t,\tau)\left\{\int_L \frac{\widetilde{\varphi}_\nu[\tau,\psi_1^{(m)}(\vartheta),\dots,\psi_n^{(m)}(\vartheta)]\,d\vartheta}{|\vartheta-\tau|^\delta}\right\}\frac{d\tau}{\tau-t}\,, \\ I_\nu^3(t) = \displaystyle\int_L Z_\nu(t,\tau)\left\{\int_L \frac{\widetilde{\varphi}_\nu[\tau,\psi_1(\vartheta),\dots,\psi_n(\vartheta)]\,d\vartheta}{|\vartheta-\tau|^\delta}\right\}\frac{d\tau}{\tau-t}\,. \end{cases}$$

Trouvons la valeur de la distance

$$(39)\quad \delta(U'_m, U')$$
$$= \max_{\nu=1,2,\dots,n}\sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|\chi_\nu^{(m)}(t)-\chi_\nu(t)|\Big]$$
$$\leqslant \frac{|\lambda|}{2}\overset{*}{Z}\max_{\nu=1,2,\dots,n}\sup_{t\in L'}\Big\{\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|F_\nu[t,\psi_1^{(m)}(t),\dots,\psi_n^{(m)}(t)]-$$
$$-\widetilde{F}_\nu[t,\psi_1(t),\dots,\psi_n(t)]|\Big\}+$$
$$+\frac{|\lambda|}{2\pi}\max_{\nu=1,2,\dots,n}\sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|I_\nu^{1,(m)}(t)-I_\nu^1(t)|\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}\overset{*}{Z}\max_{\nu=1,2,\dots,n}\sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|I_\nu^{2,(m)}(t)-I_\nu^{2}(t)|\Big]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\max_{\nu=1,2,\dots,n}\sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|I_\nu^{3,(m)}(t)-I_\nu^{3}(t)|\Big];$$

$$\overset{*}{Z}=\max_{\nu=1,2,\dots,n}\sup_{t\in L'}|Z_\nu(t,t)|\,.$$

Parmi les quatre termes de la somme qui figure dans la formule (39), le premier se laisse limiter directement. On a en effet, en vertu de l'hypothèse (4) et des relations (11), (25), (34):

$$\text{(40)}\quad \lim_{m\to\infty}\max_{\nu=1,2,\dots,n}\sup_{t\in L'}\Big\{\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|\widetilde{F}_\nu[t,\varphi_1^{(m)}(t),\dots,\varphi_n^{(m)}(t)]-$$
$$-\widetilde{F}_\nu[t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)]|\Big\}=0\,.$$

Afin d'étudier le second terme de la somme qui intervient dans la formule (39), considérons un des arcs $\widehat{c_jc}_{j+1}$ ($j=1,2,\dots,p$; $c_{p+1}=c_1$) de la circonférence L. Soit l_j une portion de l'arc $\widehat{c_jc}_{j+1}$. Une des extrémités l_j' ou l_j'' de l'arc l_j et une des extrémités c_j ou c_{j+1} de l'arc $\widehat{c_jc}_{j+1}$ peuvent respectivement coïncider. Supposons deux cas: ou bien l'arc l_j se trouve avec ses extrémités à l'intérieur de l'arc $\widehat{c_jc}_{j+1}$, ou bien l_j' et c_j coïncident; t étant situé à l'intérieur de l'arc l_j, faisons dans le second cas l'hypothèse supplémentaire $|\widehat{l_j't}|\leqslant|\widehat{tl_j''}|$. On peut alors décomposer, comme il suit, les intégrales qui figurent dans les formules (36)

$$\text{(41)}\quad \begin{aligned} I_\nu^{1,(m)}(t)&=\sum_{j=1}^{p}[I_\nu^{1,(m),l_j}(t)+I_\nu^{1,(m),(\widehat{c_jc}_{j+1}-l_j)}(t)]\,,\\ I_\nu^{1}(t)&=\sum_{j=1}^{p}[I_\nu^{1,l_j}(t)+I_\nu^{1,(\widehat{c_jc}_{j+1}-l_j)}(t)]\,,\end{aligned}$$

où les premiers termes des sommes désignent des intégrales prises le long des arcs l_j, tandis que les intégrales des seconds termes sont prises le long des arcs $\widehat{c_jc}_{j+1}-l_j$.

Les intégrales prises le long des arcs l_j peuvent à leur tour être décomposées de la manière suivante

$$\text{(42)}\quad \begin{aligned} I_\nu^{1,(m),l_j}(t)&=J_{\nu,1}^{1,(m)}(t)+J_{\nu,2}^{1,(m)}(t)\,,\\ I_\nu^{1,l_j}(t)&=J_{\nu,1}^{1}(t)+J_{\nu,2}^{1}(t)\,,\end{aligned}$$

où

$$J_{\nu,1}^{1,(m)}(t)$$
$$=\int_{l_j}\{\widetilde{F}_\nu[\tau,\varphi_1^{(m)}(\tau),\dots,\varphi_n^{(m)}(\tau)]Z_\nu(t,\tau)-\widetilde{F}_\nu[t,\varphi_1^{(m)}(t),\dots,\varphi_n^{(m)}(t)]Z_\nu(t,t)\}\frac{d\tau}{\tau-t}\,,$$

$$J_{\nu,2}^{1,(m)}(t) = Z_\nu(t,t)\widetilde{F}_\nu[t, \psi_1^{(m)}(t), \dots, \psi_n^{(m)}(t)] \int\limits_{l_j} \frac{d\tau}{\tau - t},$$

$$J_{\nu,1}^{1}(t) = \int\limits_{l_j} \{\widetilde{F}_\nu[\tau, \psi_1(\tau), \dots, \psi_n(\tau)] Z_\nu(t,\tau) - \widetilde{F}_\nu[t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)] Z_\nu(t,t)\} \frac{d\tau}{\tau - t},$$

$$J_{\nu,2}^{1}(t) = Z_\nu(t,t)\widetilde{F}_\nu[t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)] \int\limits_{l_j} \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

On voit bien que la différence $|I_\nu^{1,(m)}(t) - I_\nu^1(t)|$ vérifie l'inégalité:

$$(43) \qquad |I_\nu^{1,(m)}(t) - I_\nu^1(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{p} [|J_{\nu,1}^{1,(m)}(t)| + |J_{\nu,1}^{1}(t)| + |J_{\nu,2}^{1,(m)}(t)| + |J_{\nu,2}^{1}(t)| + \\ + |I_\nu^{1,(m),(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t) - I_\nu^{1,(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)|].$$

On cherchera maintenant des limitations pour les intégrales intervenant dans la formule (43).

D'après (26), on a

$$|J_{\nu,1}^{1,(m)}(t)| < \text{const}\left[\int\limits_{\widehat{l_j't}} \frac{|\tau - t|^{\mu-1} dl_\tau}{W_1(\tau, t)} + \int\limits_{\widehat{tl_j''}} \frac{|\tau - t|^{\mu-1} dl_\tau}{W_1(t, \tau)}\right].$$

A tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre positif η_ε tel que pour tout arc l_j de longueur η_ε et tout m

$$(44) \qquad \max_{\nu=1,2,\dots,n} \sup_{t \in L'} \left[\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho + \mu} |J_{\nu,1}^{1,(m)}(t)|\right] < \frac{\varepsilon}{5p}.$$

La relation (23) entraîne la limitation suivante de $J_{\nu,2}^{1,(m)}(t)$:

$$|J_{\nu,2}^{1,(m)}(t)| < \frac{\text{const}}{\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho}} \left|\log \frac{l_j'' - t}{l_j' - t}\right|.$$

A tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre positif η_ε' tel que pour tout arc l_j de longueur η_ε' et pour tout m

$$(45) \qquad \max_{\nu=1,2,\dots,n} \sup_{t \in L'} \left[\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho + \mu} |J_{\nu,2}^{1,(m)}(t)|\right] < \frac{\varepsilon}{5p}.$$

On obtient de même pour $J_{\nu,1}^{1}(t)$ et $J_{\nu,2}^{1}(t)$

$$(46) \qquad \max_{\nu=1,2,\dots,n} \sup_{t \in L'} \left[\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho + \mu} |J_{\nu,1}^{1}(t)|\right] < \frac{\varepsilon}{5p},$$

$$(47) \qquad \max_{\nu=1,2,\dots,n} \sup_{t \in L'} \left[\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho + \mu} |J_{\nu,2}^{1}(t)|\right] < \frac{\varepsilon}{5p}.$$

La différence $|I_\nu^{1,(m),(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)-I_\nu^{1,(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)|$, où les intégrales qui y interviennent sont régulières sur les arcs $\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j$ (vu que $t\in l_j$), vérifie, en vertu de l'hypothèse (4) et de l'inégalité (25), la limitation

$$|I_\nu^{1,(m),(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)-I_\nu^{1,(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)|<\text{const}\int\limits_{\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\psi_\nu^{(m)}(\tau)-\psi_\nu(\tau)|dl_\tau}{|\tau-t|}\,.$$

Comme $t\in l_j$ et $\tau\in\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j$, l'expression $|\tau-t|$ a une borne inférieure positive. Si l'on pose $|l_j|<\min(\eta_\varepsilon,\eta'_\varepsilon)$, à tout nombre $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un nombre N_ε tel que pour $m>N_\varepsilon$, on ait, tout en tenant compte de (34)

$$\max_{\nu=1,2,\ldots,n}\sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu}|I_\nu^{1,(m),(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)-I_\nu^{1,(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)|\Big]<\frac{\varepsilon}{5p}\,. \tag{48}$$

Si l'on tient compte de (43), (44), (46), (45), (47) et (48), on trouve

$$\max_{\nu=1,2,\ldots,n}\sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu}|I_\nu^{1,(m)}(t)-I_\nu^{1}(t)|\Big]<\varepsilon$$

ou bien

$$\lim_{m\to\infty}\max_{\nu=1,2,\ldots,n}\sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu}|I_\nu^{1,(m)}(t)-I_\nu^{1}(t)|\Big]=0\,. \tag{49}$$

L'étude du troisième terme de la somme figurant dans la formule (39) sera pareille à celle du second.

Considérons un des arcs $\widehat{c_jc_{j+1}}$ ($j=1,2,\ldots,p$; $c_{p+1}=c_1$) de la circonférence L. Désignons par l_j une portion de cet arc. Admettons ou bien que l_j se trouve avec ses extrémités à l'intérieur de l'arc $\widehat{c_jc_{j+1}}$ ou bien que l'origine de l'arc l_j et l'origine c_j de l'arc $\widehat{c_jc_{j+1}}$ coïncident; t étant situé à l'intérieur de l'arc l_j, faisons dans le second cas l'hypothèse supplémentaire $|\widehat{l'_jt}|\leqslant|\widehat{tl''_j}|$. Décomposons maintenant les intégrales (37) de la manière suivante:

$$\begin{aligned}I_\nu^{2,(m)}(t)&=\sum_{j=1}^{p}[I_\nu^{2,(m),l_j}(t)+I_\nu^{2,(m),(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)]\,,\\ I_\nu^{2}(t)&=\sum_{j=1}^{p}[I_\nu^{2,l_j}(t)+I_\nu^{2,(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)]\,,\end{aligned} \tag{50}$$

où les premiers termes des sommes désignent des intégrales prises le long des arcs l_j, tandis que les seconds sont des intégrales prises le long des arcs $\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j$. Les intégrales prises le long des arcs l_j se décomposent à leur tour comme il suit:

$$I_\nu^{2,(m),l_j}(t) = J_{\nu,1}^{2,(m)}(t) + J_{\nu,2}^{2,(m)}(t)\,,$$
(51)
$$I_\nu^{2,l_j}(t) = J_{\nu,1}^{2}(t) + J_{\nu,2}^{2}(t)\,,$$

où

$$J_{\nu,1}^{2,(m)}(t) = \int\limits_{l_j} \{\widetilde{\varphi}_\nu[t, \psi_1^{(m)}(\vartheta), \ldots, \psi_n^{(m)}(\vartheta)] - \widetilde{\varphi}_\nu[t, \psi_1^{(m)}(t), \ldots, \psi_n^{(m)}(t)]\} \frac{d\vartheta}{|\vartheta - t|^\delta}\,,$$

$$J_{\nu,2}^{2,(m)}(t) = \widetilde{\varphi}_\nu[t, \psi_1^{(m)}(t), \ldots, \psi_n^{(m)}(t)] \int\limits_{l_j} \frac{d\vartheta}{|\vartheta - t|^\delta}\,,$$

$$J_{\nu,1}^{2}(t) = \int\limits_{l_j} \{\widetilde{\varphi}_\nu[t, \psi_1(\vartheta), \ldots, \psi_n(\vartheta)] - \widetilde{\varphi}_\nu[t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)]\} \frac{\backslash\, d\vartheta}{|\vartheta - t|^\delta}\,,$$

$$J_{\nu,2}^{2}(t) = \widetilde{\varphi}_\nu[t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)] \int\limits_{l_j} \frac{d\vartheta}{|\vartheta - t|^\delta}\,.$$

La différence $|I_\nu^{2,(m)}(t) - I_\nu^2(t)|$ vérifie alors la relation

$$(52)\qquad |I_\nu^{2,(m)}(t) - I_\nu^2(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{p} [|J_{\nu,1}^{2,(m)}(t)| + |J_{\nu,1}^{2}(t)| + |J_{\nu,2}^{2,(m)}(t)| + \\ + |J_{\nu,2}^{2}(t)| + |I_\nu^{2,(m),(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t) - I_\nu^{2,(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)|]\,.$$

Cherchons des limitations pour les intégrales qui interviennent dans (52). En vertu de (30), on a pour $J_{\nu,1}^{2,(m)}(t)$

$$|J_{\nu,1}^{2,(m)}(t)| < \mathrm{const}\left[\int\limits_{\widehat{l_j't}} \frac{|\vartheta - t|^{\mu-\delta} dl_\vartheta}{W_1(\vartheta, t)} + \int\limits_{\widehat{tl_j''}} \frac{|\vartheta - t|^{\mu-\delta} dl_\vartheta}{W_1(t, \vartheta)}\right].$$

A tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre η_ε tel que pour tout arc l_j de longueur η_ε et tout m arbitraire

$$(53)\qquad \max_{\nu=1,2,\ldots,n} \sup_{t\in L'} \left[\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu} |J_{\nu,1}^{2,(m)}(t)|\right] < \frac{\varepsilon}{5p}\,.$$

La relation (28) permet de limiter $J_{\nu,2}^{2,(m)}(t)$. On a

$$|J_{\nu,2}^{2,(m)}(t)| < \frac{\mathrm{const}}{\prod\limits_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j\varrho}} [|l_j'' - t|^{1-\delta} - |l_j' - t|^{1-\delta}]\,.$$

A tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre η_ε' tel que pour tout arc l_j de longueur η_ε et pour tout m on ait

$$(54)\qquad \max_{\nu=1,2,\ldots,n} \sup_{t\in L'} \left[\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j\varrho+\mu} |J_{\nu,2}^{2,(m)}(t)|\right] < \frac{\varepsilon}{5p}\,.$$

D'une façon analogue on trouve pour $J^2_{\nu,1}(t)$ et $J^2_{\nu,2}(t)$

$$\max_{\nu=1,2,\dots,n}\ \sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|J^2_{\nu,1}(t)|\Big]<\frac{\varepsilon}{5p},\tag{55}$$

$$\max_{\nu=1,2,\dots,n}\ \sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|J^2_{\nu,2}(t)|\Big]<\frac{\varepsilon}{5p}.\tag{56}$$

En vertu de l'hypothèse (6) et des inégalités (25), on trouve la limitation suivante pour la différence $|I_\nu^{2,(m),(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)-I_\nu^{2,(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)|$ où les intégrales prises le long des arcs $\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j$ sont régulières, étant donné $t\in l_j$

$$|I_\nu^{2,(m),(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)-I_\nu^{2,(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)|<\text{const}\int\limits_{\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\psi_\nu^{(m)}(\vartheta)-\psi_\nu(\vartheta)|\,dl_\vartheta}{|\vartheta-t|^{\delta}}.$$

Vu que $t\in l_j$ et $\vartheta\in\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j$, la différence $|\vartheta-t|$ a une borne inférieure positive. Si l'on prend $|l_j|<\min(\eta_\varepsilon,\eta'_\varepsilon)$ à tout $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un nombre N_ε tel que pour $m>N_\varepsilon$ on aura, compte tenu de (34)

$$\max_{\nu=1,2,\dots,n}\ \sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|I_\nu^{2,(m),(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)-I_\nu^{2,(\widehat{c_jc_{j+1}}-l_j)}(t)|\Big]<\frac{\varepsilon}{5p}.\tag{57}$$

Si l'on rapproche les formules (52), (53), (55), (54), (56), (57) on obtient

$$\max_{\nu=1,2,\dots,n}\ \sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|I_\nu^{2,(m)}(t)-I_\nu^2(t)|\Big]<\varepsilon$$

ou bien

$$\lim_{m\to\infty}\ \max_{\nu=1,2,\dots,n}\ \sup_{t\in L'}\Big[\prod_{j=1}^{p}|t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu}|I_\nu^{2,(m)}(t)-I_\nu^2(t)|\Big]=0.\tag{58}$$

Afin d'étudier le quatrième terme de la somme qui figure dans la formule (39), on écrit les intégrales (38) de la manière suivante

$$I_\nu^{3,(m)}(t)=\int\limits_{L}Z_\nu(t,\tau)I_\nu^{2,(m)}(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t},$$

$$I_\nu^{3}(t)=\int\limits_{L}Z_\nu(t,\tau)I_\nu^{2}(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t},$$

où $I_\nu^{2,(m)}(\tau)$ et $I_\nu^2(\tau)$ sont les intégrales définies par (37). Nous obtenons donc

$$I_\nu^{3,(m)}(t)-I_\nu^{3}(t)=\int\limits_{L}Z_\nu(t,\tau)[I_\nu^{2,(m)}(\tau)-I_\nu^2(\tau)]\frac{d\tau}{\tau-t}.$$

Si l'on répète pour la différence $I_\nu^{2,(m)}(\tau) - I_\nu^2(\tau)$ le raisonnement employé plus haut, on trouve, en vertu du théorème 3, [3],

$$\lim_{m\to\infty} \max_{\nu=1,2,\ldots,n} \sup_{t\in L'} \Big[\prod_{j=1}^{p} |t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu} |I_\nu^{3,(m)}(t) - I_\nu^3(t)|\Big] = 0 . \tag{59}$$

En passant à la limite dans la formule (39) lorsque $m\to\infty$ et en utilisant les formules (40), (49), (58), (59), on obtient finalement $\lim\limits_{m\to\infty} \delta(U'_m, U') = 0$, ce qui prouve que l'opération (21) est continue dans l'espace Λ.

Lemme 3. *L'ensemble E' de tous les points obtenus de l'ensemble E à l'aide de la transformation* (21) *est un ensemble compact.*

Démonstration. On sait que l'ensemble E' est dit compact si l'on peut extraire de toute suite $\{V_m\}$ de points $V_m = [\chi_1^{(m)}(t), \chi_2^{(m)}(t), \ldots, \chi_n^{(m)}(t)]$ appartenant à l'ensemble E' une suite partielle $\{V_{k_m}\}$ convergente au sens de la norme (19).

Choisissons sur chaque arc $\widehat{c_jc_{j+1}}$ deux arcs $\widehat{c_jt_j}$ et $\widehat{t_{j+1}c_{j+1}}$ de longueur suffisamment petite pour que l'inégalité

$$\max_{\nu=1,2,\ldots,n} \sup_{t\in L_0} \Big[\prod_{j=1}^{p} |t-c_j|^{\theta_j\varrho+\mu} |\chi_\nu^{(m)}(t)|\Big] < \frac{\varepsilon}{2} \tag{60}$$

soit satisfaite pour toutes les composantes des points arbitrairement choisis de l'ensemble E' pour la suite $\{V_m\}$, où $L_0 = \sum\limits_{j=1}^{p} (\widehat{c_jt_j} + \widehat{t_{j+1}c_{j+1}})$. Cela est possible en égard à la première des inégalités (32) qui a lieu pour toutes les composantes des points de l'ensemble E'.

En vertu de (32), les fonctions $\chi_\nu^{(m)}(t)$ sont bornées dans leur ensemble sur l'ensemble $\sum\limits_{j=1}^{p} \widehat{t_jt_{j+1}}$, pour tout m

$$|\chi_\nu^{(m)}(t)| < m_\chi$$

et elles y satisfont à la condition de Hölder

$$|\chi_\nu^{(m)}(t) - \chi_\nu^{(m)}(t_1)| < k'_\chi |t-t_1|^\mu ,$$

où k'_χ est le même coefficient pour tous les m. Par conséquent les composantes des points de la suite $\{V_m\}$ sont bornées dans leur ensemble et également continues. Il en résulte d'après le théorème connu d'Arzela qu'on peut extraire de la suite

$$\{V_m\} = \{[\chi_1^{(m)}(t), \chi_2^{(m)}(t), \ldots, \chi_n^{(m)}(t)]\}$$

une suite

$$\{V_{k_m}\} = \{[\chi_1^{(k_m)}(t), \chi_2^{(k_m)}(t), \ldots, \chi_n^{(k_m)}(t)]\}$$

uniformément convergente dans l'ensemble $\sum_{j=1}^{p} \widehat{t_j t_{j+1}}$. A tout $\varepsilon > 0$ on peut donc faire correspondre un nombre N_ε tel que pour $q, s > N_\varepsilon$ l'inégalité

$$\max_{\nu=1,2,\ldots,n} \sup_{t \in L - L_0} \Big[\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho + \mu} |\chi_\nu^{(k_q)}(t) - \chi_\nu^{(k_s)}(t)|\Big] < \varepsilon \tag{61}$$

soit satisfaite pour $t \in \sum_{j=1}^{p} \widehat{t_j t_{j+1}}$. Si maintenant on rapproche les formules (60) et (61), on voit bien que la suite

$$\{V_{k_m}\} = \{[\chi_1^{(k_m)}(t), \chi_2^{(k_m)}(t), \ldots, \chi_n^{(k_m)}(t)]\}$$

vérifie la condition de Cauchy

$$\delta(V_{k_q}, V_{k_s}) = \|V_{k_q} - V_{k_s}\| = \max_{\nu=1,2,\ldots,n} \sup_{t \in L'} \Big[\prod_{j=1}^{p} |t - c_j|^{\Theta_j \varrho + \mu} |\chi_\nu^{(k_q)}(t) - \chi_\nu^{(k_s)}(t)|\Big] < \varepsilon$$

pour $q, s > N_\varepsilon$; par conséquent cette suite converge au sens de la norme (19). Il a été ainsi démontré que l'ensemble E' des points transformés de E moyennant la transformation (21), est un ensemble compact.

Nous avons donc prouvé que toutes les conditions du théorème de Schauder [5] sont satisfaites. En effet, ce théorème s'énonce comme il suit: *Toute transformation continue d'un ensemble fermé et convexe de l'espace de Banach en un sous-ensemble compact, admet au moins un point invariable.* D'après ce théorème il existe un point $[\psi_1^*, \psi_2^*, \ldots, \psi_n^*]$ de l'ensemble E invariable par rapport à la transformation (21). L'ensemble des fonctions $\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \ldots, \psi_n^*(t)$ constitue donc une solution du système d'équations intégrales (15). Les fonctions $\psi_\nu^*(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, ainsi trouvées, satisfont aux conditions de Hölder (32). On en déduit que les valeurs limites des fonctions $\Phi_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, définies par les formules (14) et holomorphes dans le cercle S^+, satisfont en tout point $t \in L' = L - \sum_{j=1}^{p} c_j$ au système d'équations (3), attendu qu'elles vérifient le système d'équations (3). En vertu de [3] (théorème 4, p. 210), les fonctions $\Phi_\nu(z)$ sont bornées au voisinage des extrémités distinguées $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q}$ et sont faiblement non bornées au voisinage de tout autre point de discontinuité (singulier ou non); ces fonctions satisfont donc au voisinage des points $c_1, c_2, \ldots, c_p$ aux conditions (2).

Dans le cas où les indices $\varkappa_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ du problème aux limites en question ne sont pas tous non négatifs, la solution du problème s'exprime par la formule (14), pourvu que $|\lambda|$ soit suffisamment petit, $P_\nu(z) = 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) et qu'en outre les conditions

$$\int_L \frac{\tau^k \tilde{f}_\nu(\tau)\,d\tau}{X_\nu^+(\tau)[a_\nu(\tau)+ib_\nu(\tau)]} = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa_\nu - 2 \ (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

(analogues à [1], p. 110) soient satisfaites.

Qu'il me soit permis, pour terminer, d'exprimer ma vive reconnaissance au professeur W. Pogorzelski pour l'aide accordée à ce travail rédigé sous sa direction.

Travaux cités

[1] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва-Ленинград 1946.

[2] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (6) (1959), pp. 311-317.

[3] — *Problème généralisé d'Hilbert pour les arcs non fermés*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Paris, 75 (1958), pp. 201-222.

[4] — *Równania całkowe i ich zastosowania III*, Warszawa 1960.

[5] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), pp. 171-180.

Reçu par la Rédaction le 12. 7. 1961