ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIV (1984)

L'existence d'une solution périodique d'une équation différentielle dans le cas où le second membre de l'équation n'est pas monotone par rapport à x

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. La méthode de variation de la constante généralisée[1] permet d'obtenir une condition suffisante pour l'existence d'une solution périodique de l'équation $y' = f(t, y) + r(t)$ et, par suite, de l'équation $x'(t) = f(t, x(t)) + F(t, x_t)$. C'est l'idée-mère de la présente note.

Dans la présente note nous allons démontrer l'existence d'une solution périodique de l'équation

$$y' = f(t, y) + r(t).$$

Le théorème obtenue sera appliqué à la démonstration de l'existence d'une solution périodique de l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)) + F(t, x_t),$$

où $x_t(s) = x(t+s)$ pour $-h \leqslant s \leqslant 0$.

1. Envisageons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{1.1}$$

où la fonction $f(t, x)$ satisfait à l'hypothèse suivante:

Hypothèse A. 1° $f(t, x) \in C^1(R^2, R)$, c'est-à-dire $f(t, x)$ est de classe C^1 dans R^2 et $f\colon R^2 \to R$.

2° f est périodique par rapport à t de période $\omega > 0$. C'est-à-dire

$$f(t+\omega, x) = f(t, x) \quad \text{pour } -\infty < t < +\infty. \tag{1.2}$$

3° Désignons par $\varphi(t, t_0, \xi)$ la solution de l'équation (1.1) avec la condition initiale

$$\varphi(t_0, t_0, \xi) = \xi$$

[1] Z. Mikołajska, *Remarque sur la méthode de la variation de la constante généralisée*, Ann. Polon. Math. 37 (1980), 199–209.

et supposons que

(1.3) $$\int_0^\omega f_x(s, \varphi(s, \omega, \xi))ds \geqslant \alpha > 1$$

et qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

(1.4) $$|[\varphi_\xi(t, 0, \xi)]^{-1} - [\varphi_\xi(t, 0, \bar{\xi})]^{-1}| \leqslant k|\xi - \bar{\xi}| \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \omega.$$

Remarque 0. L'hypothèse A est, par exemple, satisfaite dans le cas où $f(t, x) = a(t)x$, $a(t)$ est périodique et $\int_0^\omega a(s)ds = \alpha > 1$.

LEMME 1. *Sous les hypothèses* A

1° *il existe une constante* L, $0 < L < 1$ *telle que*

(1.5) $$|\varphi(0, \omega, \xi) - \varphi(0, \omega, \bar{\xi})| \leqslant L|\xi - \bar{\xi}|,$$

2° *il existe une fonction de classe* C^1 *telle que*

(1.6) $$\varphi(0, \omega, \psi(z)) - \psi(z) \equiv z \quad \text{pour } -\infty < z < +\infty$$

et

(1.7) $$|\psi(z_1) - \psi(z_2)| \leqslant \frac{1}{1-L}|z_1 - z_2|.$$

Démonstration. De l'hypothèse (1.3) il vient

(1.8) $$\varphi_\xi(0, \omega, \xi) = \exp\left[\int_\omega^0 f_x(s, \varphi(s, \omega, \xi))ds\right] \leqslant e^{-\alpha} < 1$$

d'où, en posant $L = e^{-\alpha}$, on obtient (1.5).

Pour obtenir 2° remarquons que pour la fonction

$$F(\xi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi(0, \omega, \xi) - \xi$$

on a $F'(\xi) = \varphi_\xi(0, \omega, \xi) - 1 \leqslant e^{-\alpha} - 1 < 0$ et par suite pour chaque $u \in (-\infty, +\infty)$ il existe un $\xi_u \in (-\infty, +\infty)$ tel que $F(\xi_u) = u$. $F(\xi)$ est décroissante (au sens strict). $F(\xi)$ admet donc une fonction inverse, définie dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Désignons – la par $\psi(z)$. On a $F(\psi(z)) \equiv z$, c'est-à-dire que l'on a (1.6). De plus, on a

$$F(\psi(z_1)) - F(\psi(z_2)) = z_1 - z_2,$$

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |\varphi(0, \omega, \psi(z_1)) - \varphi(0, \omega, \psi(z_2)) - (\psi(z_1) - \psi(z_2))| \\ &\geqslant |\psi(z_1) - \psi(z_2)| - |\varphi(0, \omega, \psi(z_1)) - \varphi(0, \omega, \psi(z_2))| \end{aligned}$$

d'où

$$|\psi(z_1)-\psi(z_2)| \leqslant |z_1-z_2|+|\varphi(0, \omega, \psi(z_1))-\varphi(0, \omega, \psi(z_2))|$$
$$\leqslant |z_1-z_2|+L|\psi(z_1)-\psi(z_2)|$$

et, par suite, (1.7) est satisfaite. Le Lemme 1 est ainsi démontré.

Envisageons l'équation perturbée

$$y' = f(t, y)+r(t) \tag{1.9}$$

et admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSE B. 1° $r(t)$ est continue pour $t\in(-\infty, \infty)$.

2° $r(t)$ est périodique de période ω, c'est-à-dire

$$r(t+\omega) = r(t) \tag{1.10}$$

et supposons que

$$\int_0^{\omega} |r(t)|\, dt < \frac{1}{k}\ln(2-L) \tag{1.11}$$

(où ω, k, L sont les constantes intervenant dans l'hypothèse A du lemme 1).

3° Supposons qu'il existe une solution $\xi_0(t)$ de l'équation

$$\xi'(t) = r(t)\cdot[\varphi_\xi(t, 0, \xi(t))]^{-1} \tag{1.12}$$

définie dans l'intervalle $[0, \omega]$.

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* A *et* B *il existe une solution périodique unique de période* ω *de l'équation* (1.9).

Démonstration. Nous démontrons qu'une solution périodique de l'équation (1.9) est la limite d'une suite d'approximations successives.

Posons par définition

$$c_0 = \xi_1(0) \tag{1.13}$$

où $\xi_1(t)$ est une solution de l'équation (1.12) définie dans l'intervalle $[0, \omega]$.

Pour $n \geqslant 1$ posons par définition

$$c_n = \psi\Big[\int_0^{\omega} r(s)[\varphi_\xi(s, 0, \xi_n(s))]^{-1} ds\Big], \tag{1.14}$$

$$\xi_n'(t) = r(t)[\varphi_\xi(t, 0, \xi_n(t))]^{-1}, \quad \xi_n(0) = c_{n-1} \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots \tag{1.15}$$

Nous démontrons que les fonctions $\xi_n(t)$ ainsi définies sont définies dans tout l'intervalle $[0, \omega]$, la suite $\{c_n\}$ est convergente et la suite $\{\xi_n(t)\}$ est uniformément convergente dans l'intervalle $[0, \omega]$: $c_n \to c^*$, $\xi_n(t) \underset{[0,\omega]}{\rightrightarrows} \xi^*(t)$, enfin la fonction

$$y(t) = \varphi(t, 0, \xi^*(t)) \tag{1.16}$$

est une solution unique périodique de l'équation (1.9).

Evaluons la différence entre les éléments consécutifs des suites $\{c_n\}$ et $\{\xi_n(t)\}$. Par définition (1.15) de la fonction $\xi_n(t)$ nous avons

$$\begin{aligned}|\xi_n'(s)-\xi_{n-1}'(s)| &\leqslant |r(t)|\,\big|[\varphi_\xi(s, 0, \xi_n(s))]^{-1}-[\varphi_\xi(s, 0, \xi_{n-1}(s))]^{-1}\big|\\ &\leqslant |r(t)|\, k\,|\xi_n(s)-\xi_{n-1}(s)|\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}|\xi_n(s)-\xi_{n-1}(s)| &\leqslant |\xi_n(0)-\xi_{n-1}(0)| \exp\Big[k\int_0^s |r(\tau)|\,d\tau\Big]\\ &= |c_{n-1}-c_{n-2}| \exp k\int_0^s |r(\tau)|\,d\tau,\end{aligned} \tag{1.17}$$

$\xi_1(t)$ étant définie dans tout l'intervalle $[0, \omega]$, $\xi_n(t)$ sont aussi définies dans tout l'intervalle $[0, \omega]$ pour $n \geqslant 1$.

Evaluons $|c_n-c_{n-1}|$. Pour $n = 1$ nous avons

$$|c_1-c_0| = \Big|\psi\Big[\int_0^\omega r(s)[\varphi_\xi(s, 0, \xi_1(s))]^{-1}ds\Big]-c_0\Big| \stackrel{\mathrm{df}}{=} P_0, \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}|c_n-c_{n-1}| &= \Big|\psi\Big\{\int_0^\omega r(s)[\varphi_\xi(s, 0, \xi_n(s))]^{-1}ds\Big\}-\psi\Big\{\int_0^\omega r(s)[\varphi_\xi(s, 0, \xi_{n-1}(s))]^{-1}ds\Big\}\Big|\\ &\leqslant \frac{1}{1-L}\int_0^\omega |r(s)|\,\big|[\varphi_\xi(s, 0, \xi_n(s))]^{-1}-[\varphi_\xi(s, 0, \xi_{n-1}(s))]^{-1}\big|\,ds\\ &\leqslant \frac{k}{1-L}\int_0^\omega |r(s)|\,|\xi_n(s)-\xi_{n-1}(s)|\,ds\end{aligned}$$

d'où, en vertu de (1.17), on obtient

$$\begin{aligned}|c_n-c_{n-1}| &\leqslant \frac{1}{1-L}\int_0^\omega k|r(s)|\,|c_{n-1}-c_{n-2}| \exp k\int_0^s |r(\tau)|\,d\tau ds\\ &= \frac{|c_{n-1}-c_{n-2}|}{1-L}\Big\{\exp k\int_0^\omega |r(\tau)|\,d\tau-1\Big\} = \gamma|c_{n-1}-c_{n-2}|\\ &\leqslant \gamma^{n-1}P_0 \quad \text{pour } n \geqslant 1,\end{aligned} \tag{1.19}$$

où

$$\gamma \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{1-L}\Big\{\exp k\int_0^\omega |r(\tau)|\,d\tau-1\Big\}.$$

En vertu de (1.11) nous avons

$$k\int_0^{\omega}|r(t)|\,dt < \ln(2-L)$$

d'où

$$\frac{\exp\left[k\int_0^{\omega}|r(s)|\,ds\right]-1}{1-L} = \gamma < \frac{e^{\ln(2-L)}-1}{1-L} = 1$$

donc la suite $\{c_n\}$ est convergente. Désignons par c^* la limite de la suite $\{c_n\}$, soit $c_n \to c^*$.

En vertu de (1.17) on a donc

$$|\xi_n(s)-\xi_{n-1}(s)| \leqslant \gamma^{n-2}P_0 \qquad \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant \omega,$$

d'où il vient

$$\xi_n(s) \underset{[0,\omega]}{\rightrightarrows} \xi^*(s).$$

En passant à la limite dans (1.14) et (1.15) nous obtenons

$$c^* = \psi\left[\int_0^{\omega} r(s)\left[\varphi_\xi(s,\,0,\,\xi^*(s))\right]^{-1}ds\right], \tag{1.20}$$

$$\xi^{*\prime}(t) = r(t)\left[\varphi_\xi(t,\,0,\,\xi^*(t))\right]^{-1}, \qquad \xi^*(0) = c^*. \tag{1.21}$$

Définissons $y(t)$ par la relation (1.16);

$$\begin{aligned} y'(t) &\equiv \varphi_t'(t,\,0,\,\xi^*(t))+\varphi_\xi'(t,\,0,\,\xi^*(t))\xi^{*\prime}(t)\\ &\equiv f(t,\,\varphi(t,\,0,\,\xi^*(t)))+\varphi_\xi(t,\,0,\,\xi^*(t))r(t)\left[\varphi_\xi(t,\,0,\,\xi^*(t))\right]^{-1}\\ &\equiv f(t,\,y(t))+r(t). \end{aligned}$$

La fonction $f(t,\,y)$ et $r(t)$ étant périodique par rapport à t de période ω, il suffit de démontrer que $y(\omega) = y(0)$. On a

$$y(\omega) = \varphi(\omega,\,0,\,\xi^*(\omega)).$$

En vertu de (1.21)

$$\xi^*(t) = \xi^*(0)+\int_0^{t} r(s)\left[\varphi_\xi(s,\,0,\,\xi^*(s))\right]^{-1}ds$$

et par suite, en vertu de (1.16),

$$y(\omega) = \varphi\left(\omega,\,0,\,\xi^*(0)+\int_0^{\omega} r(s)\left[\varphi_\xi(s,\,0,\,\xi^*(s))\right]^{-1}ds\right).$$

De la relation (1.14) et (1.15) on obtient à la limite

$$\xi^*(0) = c^* = \psi\left\{\int_0^\omega r(s)\left[\varphi_\xi(s, 0, \xi^*(s))\right]^{-1} ds\right\}$$

et par suite

$$y(\omega) = \varphi\left(\omega, 0, \psi\left\{\int_0^\omega r(s)\left[\varphi_\xi(s, 0, \xi^*(s))\right]^{-1} ds\right\} + \int_0^\omega r(s)\left[\varphi_\xi(s, 0, \xi^*(s))\right]^{-1} ds\right).$$

De la définition de la fonction $\psi(z)$ on tire

$$\varphi(0, \omega, \psi(z)) - \psi(z) \equiv z,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(0, \omega, \psi(z)) \equiv \psi(z) + z.$$

Posons

$$z = \int_0^\omega r(s)\left[\varphi_\xi(s, 0, \xi^*(s))\right]^{-1} ds,$$

$$\begin{aligned} y(\omega) &= \varphi(\omega, 0, \psi(z)+z) = \varphi\left(\omega, 0, \varphi(0, \omega, \psi(z))\right) = \psi(z) \\ &= \psi\left\{\int_0^\omega r(s)\left[\varphi_\xi(s, 0, \xi^*(s))\right]^{-1} ds\right\} = c^*, \\ y(0) &= \varphi(0, 0, \xi^*(0)) = \xi^*(0) = c^*. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons démontré que $y(t)$, définie par la relation (1.16) dans l'intervalle $[0, \omega]$, peut être prolongée sur l'intérvalle $(-\infty, \infty)$ de manière qu'elle est périodique de période ω et qu'elle satisfait à l'équation (1.9), c'est-à-dire qu'elle est une solution périodique de l'équation (1.9).

Nous allons démontrer l'unicité de la solution périodique de l'équation (1.9). Supposons qu'il existe deux solutions périodiques de l'équation (1.9) de période ω, $y(t)$ et $\bar{y}(t)$. Chaque solution $\bar{y}(t)$ de l'équation (1.9) peut être écrite sous la forme

$$\bar{y}(t) = \varphi(t, 0, \bar{\xi}(t)), \tag{1.22}$$

où $\bar{\xi}(t)$ est la solution de l'équation (1.12) avec la condition initiale (([1]) p. 81)

$$\bar{\xi}(0) = \bar{y}(0) = \bar{y}_0.$$

On a donc

$$|y(t) - \bar{y}(t)| = |\varphi(t, 0, \xi(t)) - \varphi(t, 0, \bar{\xi}(t))| \leqslant L|\xi(t) - \bar{\xi}(t)|. \tag{1.23}$$

Les fonctions $\xi(t)$ et $\bar{\xi}(t)$ étant des solutions de l'équation (1.12), on a en vertu de (1.4)

$$|\xi'(t)-\bar{\xi}'(t)| \leqslant |r(t)| \, |[\varphi_\xi(t, 0, \xi(t))]^{-1} - [\varphi_\xi(t, 0, \bar{\xi}(t))]^{-1}|$$
$$\leqslant |r(t)| \, k \, |\xi(t)-\bar{\xi}(t)|$$

d'où

$$|\xi(t)-\bar{\xi}(t)| \leqslant |\xi(0)-\bar{\xi}(0)| \exp[k \int_0^t |r(s)| \, ds]$$

et, en vertu de (1.23), on a

$$|y(t)-\bar{y}(t)| \leqslant L|y(0)-\bar{y}(0)| \exp[k \int_0^t |r(s)| \, ds]$$

d'où, les fonctions $y(t)$ et $\bar{y}(t)$ étant périodiques, on obtient pour $t=\omega$

$$|y(0)-\bar{y}(0)| = |y(\omega)-\bar{y}(\omega)| \leqslant L|y(0)-\bar{y}(0)| \exp[k \int_0^\omega |r(s)| \, ds]$$

et, en vertu de (1.11), dans le cas où $y(0) \neq \bar{y}(0)$,

$$|y(0)-\bar{y}(0)| < L|y(0)-\bar{y}(0)| \, e^{\ln(2-L)} = L(2-L) \, |y(0)-\bar{y}(0)|;$$

mais

$$-L^2+2L-1 = -(L-1)^2 < 0,$$

d'où

$$-L^2+2L < 1$$

et par suite

$$|y(0)-\bar{y}(0)| < |y(0)-\bar{y}(0)|.$$

Ainsi la démonstration du théorème 1 est achevée.

2. Remarque 1. L'hypothèse (1.4) est satisfaite, par exemple, dans le cas où:

1° $|f_x(t, x)| \leqslant \mu < \infty$,

2° $|f_x(t, x)-f_x(t, \bar{x})| \leqslant L_1 |x-\bar{x}|$,

3° (1.3) est satisfaite.

On a

$$[\varphi_\xi(t, 0, \xi)]^{-1} = \exp[-\int_0^t f_x(s, \varphi(s, 0, \xi)) \, ds]$$

posons

$$u = -\int_0^t f_x(s, \varphi(s, 0, \xi))ds, \qquad \bar{u} = -\int_0^t f_x(s, \varphi(s, 0, \bar{\xi}))ds.$$

D'autre part

$$|e^u - e^{\bar{u}}| = e^{\min(u,\bar{u})}(e^{|u-\bar{u}|} - 1) \leqslant e^{\min(u,\bar{u})} \cdot e^{|u-\bar{u}|}\,|u-\bar{u}| = e^{\max(u,\bar{u})}\,|u-\bar{u}|$$

et par suite on a pour $0 \leqslant t \leqslant \omega$

$$\begin{aligned} &\left|e^{-\int_0^t f_x(s,\varphi(s,0,\xi))ds} - e^{-\int_0^t f_x(s,\varphi(s,0,\bar{\xi}))ds}\right| \\ &\leqslant e^{\mu\omega}\left|\int_0^t \{f_x(s, \varphi(s, 0, \xi)) - f_x(s, \varphi(s, 0, \bar{\xi}))\}\,ds\right| \\ &\leqslant e^{\mu\omega}L_1 \int_0^t |\varphi(s, 0, \xi) - \varphi(s, 0, \bar{\xi})|\,ds \leqslant e^{\mu\omega}L_1 \int_0^t L|\xi - \bar{\xi}|\,ds \\ &\leqslant L_1 L e^{\mu\omega}\omega\,|\xi - \bar{\xi}| \qquad\qquad (\text{où } L = e^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Remarque 2. L'hypothèse 3B est satisfaite, par exemple, dans le cas où

$$|[\varphi_\xi(t, 0, 0)]^{-1}| \leqslant c \qquad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \omega$$

et où la condition (1.4) est satisfaite. Dans le cas envisagé chaque solution de l'équation (1.12) est définie dans l'intervalle $[0, \omega]$. On a

$$\begin{aligned} |\xi'(t)| &= |r(t)|\,\left|[\varphi_\xi(t, 0, \xi(t))]^{-1} - [\varphi_\xi(t, 0, 0)]^{-1} + [\varphi_\xi(t, 0, 0)]^{-1}\right| \\ &\leqslant \{k|\xi(t)| + c\}\,|r(t)| \end{aligned}$$

et par suite

$$|\xi(t)| \leqslant u(t)$$

où $u(t)$ est une solution de l'équation $u'(t) = (ku(t)+c)|r(t)|$, $u(0) = |\xi(0)|$, définie dans $[0, \omega]$.

3. Envisageons l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)) + F(t, x_t), \tag{3.1}$$

où $x_t(s) = x(t+s)$ pour $-h \leqslant s \leqslant 0$, $F(t, \sigma)\colon R \times C([-h, 0]) \to R$, $R = (-\infty, +\infty)$, $C([-h, 0])$ est l'espace des fonctions continues dans l'intervalle $[-h, 0]$, $f(t, x)\colon R^2 \to R$.

Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES C. 1° $f(t, x)$ satisfait à l'hypothèse A.

2° $F(t, \sigma)$ est continue dans $R \times C([-h, 0])$, périodique par rapport à t de période ω.

3° Pour chaque $\sigma \in C(R)$, périodique de période ω, la fonction $F(t, \sigma_t)$ satisfait à l'hypothèse B.

4° Supposons que

$$|[\varphi_\xi(t, 0, 0)]^{-1}| \leqslant a \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \omega. \tag{3.2}$$

Remarque 3. Sous les hypothèses C pour chaque fonction continue $\eta(t)$, périodique de période ω, l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)) + r_\eta(t), \tag{3.3}$$

où

$$r_\eta(t) = F(t, \eta_t), \tag{3.4}$$

admet une solution périodique unique de période ω (cf. le théorème 1).

Lemme 2. *Sous les hypothèses* C, *dans le cas où*

$$\int_0^\omega |r_\eta(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{k} \ln[1 + \tilde{\gamma}(1 - L)] \tag{3.5}$$

et $0 < \tilde{\gamma} < 1$, *il existe une constante* $M^* > 0$ *telle que pour chaque* η *continue et périodique de période* ω *on a*

$$|x(t, \eta)| \leqslant M^* \quad \textit{pour } -\infty < t < +\infty \tag{3.6}$$

où $x(t, \eta)$ *est la solution périodique unique de l'équation* (3.3).

Démonstration. Pour $x(t, \eta)$ il existe $\xi^*(t, \eta)$ satisfaisant à la condition

$$\xi^{*\prime}(t, \eta) = r_\eta(t)\left[\varphi_\xi(t, 0, \xi^*(t, \eta))\right]^{-1}, \tag{3.7}$$

$$\xi^*(0, \eta) = \psi\left[\int_0^\omega r_\eta(s)\left[\varphi_\xi(t, 0, \xi^*(s, \eta))\right]^{-1} ds\right] \tag{3.8}$$

tel que

$$x(t, \eta) = \varphi(t, 0, \xi^*(t, \eta)). \tag{3.9}$$

En vertu de (3.9), pour établir (3.6) il suffit de démontrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour chaque fonction η continue et périodique de période ω on a

$$|\xi^*(t, \eta)| \leqslant M \quad \text{pour } 0 \leqslant \mathrm{t} \leqslant \omega. \tag{3.10}$$

En vertu de (3.7), (3.8), (1.4) et (3.2) on a

$$\begin{aligned} |\xi^{*\prime}(t, \eta)| &\leqslant |r_\eta(t)| \left\{\left|[\varphi_\xi(t, 0, \xi^*(t, \eta))]^{-1} - [\varphi_\xi(t, 0, 0)]^{-1}\right| + a\right\} \\ &\leqslant |r_\eta(t)| \left\{k|\xi^*(t, \eta)| + a\right\}. \end{aligned}$$

De la théorie des inégalités différentielles on a donc

$$|\xi^*(t,\eta)| \leqslant \exp\Big[k\int_0^t |r_\eta(s)|\,ds\Big]\Big\{|\xi^*(0,\eta)| + \int_0^t a|r_\eta(s)|\exp\Big\{-k\int_0^s |r_\eta(\tau)|\,d\tau\Big\}ds\Big\}$$

d'où, en vertu de (3.5), on tire

$$|\xi^*(t,\eta)| \leqslant [1+\tilde{\gamma}(1-L)]\Big\{|\xi^*(0,\eta)| + \frac{a}{k}\Big\{1-\exp\Big[-k\int_0^t |r_\eta(s)|\,ds\Big]\Big\}\Big\}$$
$$\leqslant [1+\tilde{\gamma}(1-L)]\Big\{|\xi^*(0,\eta)| + \frac{a}{k}[1+\tilde{\gamma}(1-L)]^{-1}\Big\}.$$

Posons par définition $p = 1+\tilde{\gamma}(1-L)$. On a donc

$$(3.11)\qquad |\xi^*(t,\eta)| \leqslant p\Big\{|\xi^*(0,\eta)| + \frac{a}{k}(1-p^{-1})\Big\} \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \omega.$$

Evaluons $|\xi^*(0,\eta)|$. Dans la démonstration du théorème 1 nous avons démontré que $\xi^*(t,\eta)$ est la limite de la suite $\{\xi_n(t,\eta)\}$ définie par les équations

$$\xi_n'(t,\eta) = r_\eta(t)\big[\varphi_\xi(t,0,\xi_{n-1}(t,\eta))\big]^{-1},$$
$$\xi_n(0,\eta) = c_{n-1}(\eta),$$
$$c_n(\eta) = \psi\Big[\int_0^\omega r(s)\big[\varphi_\xi(s,0,\xi_n(s,\eta))\big]^{-1}ds\Big], \qquad n = 1, 2, \ldots$$

où c_0 peut être choisi quelconque. Posons $c_0 = 0$. On a donc

$$(3.12)\qquad \xi_1'(t,\eta) = r_\eta(t)\big[\varphi_\xi(t,0,\xi_1(t,\eta))\big]^{-1}, \qquad \xi_1(0,\eta) = c_0(\eta) = 0.$$

Nous avons

$$|\xi^*(0,\eta)| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} |\xi_n(0,\eta)-\xi_{n-1}(0,\eta)| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\eta)-c_{n-1}(\eta)|,$$

En vertu de l'évaluation (1.18) et (1.19) on a donc

$$|\xi^*(0,\eta)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{n-1}(\eta)P_0$$

où

$$\gamma(\eta) = \frac{\exp k\int_0^\omega |r_\eta(s)|\,ds - 1}{1-L} \leqslant \frac{1}{1-L}\{1+\tilde{\gamma}(1-L)-1\} = \tilde{\gamma} < 1$$

et par suite

$$(3.13)\qquad |\xi^*(0,\eta)| \leqslant P_0(\eta)\frac{1}{1-\tilde{\gamma}},$$

$$(3.14)\qquad P_0(\eta) = \left|\psi\left[\int_0^\omega r_\eta(s)\left[\varphi_\xi(s,0,\xi_1(s,\eta))\right]^{-1}ds\right]\right|.$$

Pour évaluer $P_0(\eta)$ envisageons $\xi_1(s,\eta)$. En vertu de (3.12), en procédant de même que pour l'évaluation de ξ^* on obtient

$$|\xi_1'(s,\eta)| \leqslant |r_\eta(s)|\,\{k|\xi_1(s,\eta)|+a\},\qquad \xi_1(0,\eta)=0$$

et par suite

$$(3.15)\qquad |\xi_1(t,\eta)| \leqslant a\int_0^t |r_\eta(s)|\exp\left[k\int_s^t |r_\eta(\tau)|\,d\tau\right]ds$$

$$\leqslant \frac{a}{k}[1+\tilde{\gamma}(1-L)]\int_0^t k|r_\eta(s)|\exp\left[-k\int_0^s |r_\eta(\tau)|\,d\tau\right]ds$$

$$=\frac{a}{k}p(1-p^{-1}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} m \qquad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant\omega.$$

De la continuité de $[\varphi_\xi(t,0,\xi)]^{-1}$ dans l'ensemble borné et fermé $0\leqslant t\leqslant\omega$, $|\xi|\leqslant m$ il résulte qu'il existe une constante N telle que

$$|[\varphi_\xi(t,0,\xi)]^{-1}| \leqslant N \qquad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant\omega,\ |\xi|\leqslant m$$

et par suite, en vertu de (3.15),

$$\left|\left[\varphi_\xi(s,0,\xi_1(s,\eta))\right]^{-1}\right| \leqslant N \qquad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant\omega$$

d'où

$$(3.16)\qquad \left|\int_0^\omega r_\eta(s)\left[\varphi_\xi(s,0,\xi_1(s,\eta))\right]^{-1}ds\right| \leqslant N\int_0^\omega |r_\eta(s)|\,ds \leqslant N\frac{1}{k}\ln p,$$

$\psi(u)$ est continue et par suite

$$|\psi(u)| \leqslant \tilde{N} \qquad \text{pour } |u|\leqslant\frac{N}{k}\ln p$$

où $\tilde{N}=\max|\psi(u)|$ pour $|u|\leqslant\frac{N}{k}\ln p$, et par suite, en vertu de (3.14) et (3.16),

$$P_0(\eta)\leqslant\tilde{N} \qquad \text{pour chaque } \eta \text{ continue et périodique.}$$

En vertu de (3.13) on a donc

$$|\xi^*(0,\eta)| \leqslant \tilde{N}/(1-\tilde{\gamma})$$

d'où, en vert de (3.11),

$$|\xi^*(t,\eta)| \leqslant p\left\{\frac{\tilde{N}}{1-\bar{\gamma}}+\frac{a}{k}(1-p^{-1})\right\} = M \qquad \text{pour } t\in(-\infty,\infty).$$

Le lemme 2 est ainsi démontré.

HYPOTHÈSES $\bar{C}$. 1° Admetton que les hypothèses C sont satisfaites et que

2° pour chaque $M > 0$ il existe une constante $P > 0$ telle que pour chaque fonction continue et périodique $\eta(t)$ telle que $|\eta(t)| \leqslant M$ on a

$$|f(t,x)+F(t,\eta_t)| \leqslant P \qquad \text{pour } |x| \leqslant M. \tag{3.17}$$

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses $\bar{C}$ il existe une solution périodique de période ω de l'équation* (3.1).

Démonstration. Désignons par M^* la constante avec laquelle on a l'inégalité (3.6) pour chaque η continue et périodique de période ω. Par P^* désignons la constante telle que (3.17) vont pour $|x| \leqslant M^*$ et pour η périodique et continue telle que $|\eta(t)| \leqslant M^*$ pour $t\in(-\infty, +\infty)$. Désignons par Ω l'ensemble des fonctions périodiques η de période ω, continues telles que

$$|\eta(t)| \leqslant M^*, \qquad |\eta(t)-\eta(\bar{t})| \leqslant P^*|t-\bar{t}|, \tag{3.18}$$

$$\Omega = \{\eta\in C(R,R)\colon \text{périodique de période } \omega, \text{ et satisfaisant à (3.18)}\}.$$

L'ensemble Ω est fermé, convexe et compact. Envisageons la transformation $T(\eta) = x(\cdot,\eta)$, où $x(t,\eta)$ est une solution périodique de période ω de l'équation (3.4). La transformation $\sigma = T(\eta)$ est définie dans Ω et $T(\Omega)\subset\Omega$, car en vertu de lemme 2, $\sigma(t) = x(t,\eta)$ est périodique de période ω et satisfait à (3.6). En vertu de (3.17) avec $P = P^*$ on obtient

$$|\sigma'(t)| = |x'(t,\eta)| = \big|f\big(t, x(t,\eta)\big)+F(t,\eta_t)\big| \leqslant P^*$$

d'où il résulte que $\sigma(t)$ satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante P^*. Nous démontrons que $T(\eta)$ est continue dans Ω. Envisageons la suite $\eta_v\in\Omega$ uniformément convergente vers la fonction $\eta_0\in\Omega$. Envisageons la suite $\sigma_v = T(\eta_v)$, $\sigma_v\in\Omega$, Ω est compact, donc de chaque suite partielle on peut extraire une suite convergente. Il suffit de démontrer que la limite de chaque suite partielle convergent est la même,

$$x'(t,\eta_v) = f\big(t, x(t,\eta_v)\big)+r_{\eta_v}(t), \qquad r_{\eta_v}(t) = F\big(t,(\eta_v)_t\big).$$

De la continuité de $F(t,\sigma)$ il résulte que la convergence uniforme de η_v, $\eta_v\Rightarrow\eta_0$ entraine la convergence de $r_{\eta_v}(t)\Rightarrow r_{\eta_0}$. La convergence uniforme de $\sigma_{\alpha_v}(t) = x(t,\eta_{\alpha_v})$ vers la fonction $y(t)$ entraine la convergence uniforme

$$f\big(t, x(t,\eta_{\alpha_v})\big)+r_{\eta_{\alpha_v}} \Rightarrow f\big(t, y(t)\big)+r_{\eta_0}$$

donc on a

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big) + r_{\eta_0}(t). \tag{3.19}$$

La fonction $y(t)$, étant la limite de fonctions périodiques de période ω, est aussi périodique de même période. Mais l'équation (3.19) admet dans nos hypothèses une seule solution périodique de période ω, $x(t, \eta_0)$ et par conséquent

$$y(t) = x(t, \eta_0) = T(\eta_0).$$

Ainsi nous avons démontré que la transformation $T(\eta)$ est continue dans Ω. On peut alors appliquer le théorème du point fixe de Schauder à la transformation $T(\eta)$ dans Ω. Il existe donc au moins une fonction $\eta^* \in \Omega$ telle que $T(\eta^*) = \eta^*$, c'est-à-dire que η^* est une solution périodique de l'équation

$$y' = f(t, y) + r_{\eta^*}(t)$$

d'où il s'ensuit que l'on a

$$\eta^{*\prime}(t) = f\big(t, \eta^*(t)\big) + r_{\eta^*}(t) = f\big(t, \eta^*(t)\big) + F(t, \eta_t^*).$$

La démonstration du théorème 2 est ainsi achevée.

Reçu par la Rédaction le 26.06.1980