ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Sur les coefficients des fonctions univalentes dans le cercle unité

par Z. J. Jakubowski (Łódź)

Introduction. Soit S_∞ la famille des fonctions univalentes et holomorphes dans le cercle $|z| < 1$, de la forme

$$F(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots \tag{1}$$

Dans ce travail nous obtenons les limitations exactes (inférieures ou supérieures) de quelques fonctionnelles dépendant des coefficients A_2, A_3 et A_4, et définies dans certaines sous-classes de la famille S_∞.

§ 1. Le minimum de la fonctionnelle $A_3 + aA_2$ dans la famille des fonctions univalentes à coefficients réels. Soient a et M des nombres quelconques fixés, satisfaisant aux conditions

$$a \geqslant 0, \quad M > 1, \tag{1.1}$$

R_∞ la famille des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$ de la forme (1), à coefficients réels, c'est-à-dire tels que $A_n = \mathrm{re}\, A_n$ pour $n = 2, 3, \ldots$, enfin R_M la sous-classe des fonctions bornées de la famille R_∞, c'est-à-dire satisfaisant à la condition $|F(z)| < M$ pour $|z| < 1$.

Considérons la fonctionnelle

$$H(F) = A_3 + aA_2, \tag{1.2}$$

définie dans la famille R_M. Celle-ci étant compacte et la fonctionnelle (1.2) continue, il existe des fonctions $F^*(z)$ et $\hat{F}(z)$ de la classe R_M, pour lesquelles elle atteint sa borne supérieure $H(F^*)$ et sa borne inférieure $H(\hat{F})$.

Dans un travail précédent [8] j'ai trouvé la borne supérieure $H(F^*)$ pour des valeurs quelconques a et M des intervalles (1.1), la limitation supérieure de la fonctionnelle (1.2) définie dans la classe R_∞ et certaines formules asymptotiques pour les valeurs de M proches de l'unité.

Nous allons maintenant déterminer $H(\hat{F})$ dans la famille R_M ainsi que dans R_∞, et nous établirons les formules asymptotiques correspondantes.

Dans ce but désignons par R_T la famille des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$ de la forme

$$(1.3) \qquad f(z) = a_{1f}z + a_{2f}z^2 + \ldots = a_{1f}(z + A_{2f}z^2 + \ldots)$$

satisfaisant aux conditions: 1° $\mathrm{re}\, a_{nf} = a_{nf}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, 2° $|f(z)| < 1$ pour $|z| < 1$, 3° $a_{1f} \geqslant T$, où T est un nombre quelconque fixé de l'intervalle $(0, 1)$. Considérons ensuite la fonctionnelle

$$(1.4) \qquad G(f) = A_{3f} + aA_{2f}\,.$$

Comme celle-ci est continue et la famille (1.3) compacte, il existe une fonction $\hat{f}(z) \in R_{T'}$ de la forme

$$(1.5) \qquad \hat{f}(z) = \hat{a}_1 z + \hat{a}_2 z^2 + \ldots = \hat{a}_1(z + \hat{A}_2 z^2 + \ldots)\,,$$

pour laquelle la fonctionnelle (1.4) atteint son minimum.

En vertu d'un théorème bien connu sur les fonctions extrémales de la famille R_T (v. [4]) chacune des fonctions (1.5) satisfait à l'équation fonctionnelle différentielle suivante:

$$(1.6) \qquad \left[\frac{\hat{f}'(z)}{\hat{f}(z)}\right]^2 M[\hat{f}(z)] = \frac{1}{z^2} N(z)\,, \qquad 0 < |z| < 1\,,$$

où

$$M(w) = 2\hat{a}_1^3(w^2 + w^{-2}) + 2\hat{a}_1^2(a + 2\hat{A}_2)(w + w^{-1}) - 2\hat{P}\,,$$

$$(1.7) \quad N(z) = 2\hat{a}_1(z^2 + z^{-2}) + 2\hat{a}_1(a + 2\hat{A}_2)(z + z^{-1}) + 2\hat{a}_1(2\hat{A}_3 + a\hat{A}_2) - 2\hat{P}\,,$$

$$\hat{P} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} [2\hat{a}_1^2(a + 2\hat{A}_2)\cos x + 2\hat{a}_1^3 \cos 2x]\,.$$

Les fonctions $M(w)$ et $N(z)$ admettent en outre sur les circonférences $|w| = 1$ et $|z| = 1$ des valeurs non positives et chacune d'elles a respectivement sur ces circonférences une racine double. On a de plus $\hat{a}_1 = T$.

Posons

$$(1.8) \qquad u = (a + 2\hat{A}_2)T^{-1}\,.$$

Alors on obtient des formules (1.7)

$$(1.9) \qquad \hat{P} = \begin{cases} 2T^3(1-u) & \text{si} \quad u < 0\,, \\ 2T^3 & \text{si} \quad u = 0\,, \\ 2T^3(1+u) & \text{si} \quad u > 0\,, \end{cases}$$

et

$$(1.10) \qquad M(w) = \begin{cases} 2T^3 w^{-2}(w+1)^2[w^2 + (u-2)w + 1] & \text{si} \quad u < 0\,, \\ 2T^3 w^{-2}(w+1)^2(w-1)^2 & \text{si} \quad u = 0\,, \\ 2T^3 w^2(w-1)^2[w^2 + (u+2)w + 1] & \text{si} \quad u > 0\,, \end{cases}$$

En tenant compte de la propriété mentionnée de la fonction $N(z)$, on peut la mettre sous la forme

(1.11) $$N(z) = 2Tz^{-2}(z-\varepsilon)^2(z-r)(z-r^{-1}),$$

où $$\varepsilon = \pm 1, \ -1 \leqslant r \leqslant 1, \ r \neq 0;$$

de la condition $N(z) \leqslant 0$ pour $|z| = 1$ il résulte de plus que

(1.12) $$\varepsilon = 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant r < 0 \qquad \text{ou bien} \qquad \varepsilon = -1 \quad \text{et} \quad 0 < r \leqslant 1.$$

Les formes (1.7) et (1.11) de la fonction $N(z)$ donnent encore

(1.13) $$2\varepsilon + r + r^{-1} = -uT,$$

(1.14) $$2 + 2\varepsilon(r + r^{-1}) = 2\hat{A}_3 + a\hat{A}_2 - \hat{P}T^{-1}.$$

Donc, si $u < 0$, les formules (1.12) et (1.13) entraînent $\varepsilon = -1$ et $r + r^{-1} = 2 - uT$; par conséquent, en vertu de (1.8), (1.9), (1.11) et (1.14), on a

$$N(z) = 2T(z+1)^2[z^2 + (Tu-1)z + 1]z^{-2},$$

$$2\hat{A}_3 + a\hat{A}_2 = -2 + 2Tu + 2T^2(1-u).$$

D'une façon analogue on arrive, dans le cas où $u = 0$, aux formules

$$N(z) = 2T(z+1)^2(z-1)^2z^{-2},$$

$$2\hat{A}_3 + a\hat{A}_2 = -2 + 2T^2$$

et, si $u > 0$,

$$N(z) = 2T(z-1)^2[z^2 + (Tu+2)z + 1]z^{-2},$$

$$2\hat{A}_3 + a\hat{A}_2 = -2 - 2Tu + 2T^2(1+u).$$

Nous avons donc obtenu toutes les formes possibles des fonctions $M(w)$ et $N(z)$ qui interviennent dans l'équation (1.6) des fonctions extrémales par rapport à la fonctionnelle $G(f)$. On a donc le

LEMME 1. *Toute fonction extrémale $w = \hat{f}(z)$, pour laquelle la fonctionnelle $G(f)$ atteint son minimum, satisfait à l'équation:*

A $$\left(\frac{Tw'}{w^2}\right)^2 (w-1)^2[w^2 + (u+2)w + 1] = z^{-4}(z-1)^2[z^2 + (Tu+2)z + 1] \qquad si \quad u > 0,$$

B $$\left(\frac{Tw'}{w^2}\right)^2 (w-1)^2(w+1)^2 = z^{-4}(z-1)^2(z+1)^2 \qquad si \quad u = 0,$$

C $$\left(\frac{Tw'}{w^2}\right)^2 (w+1)^2[w^2 + (u-2)w + 1] = z^{-4}(z+1)^2[z^2 + (Tu-2)z + 1] \qquad si \quad u < 0.$$

De plus on a

$$(1.15)\quad G(\hat{f}) = \begin{cases} -1-\frac{1}{4}a^2+T^2(1+u)+Tu(\frac{1}{4}a-1) & \textit{dans le cas de l'équation A,} \\ -1-\frac{1}{4}a^2+T^2 & \textit{dans le cas de l'équation B,} \\ -1-\frac{1}{4}a^2+T^2(1-u)+Tu(\frac{1}{4}a+1) & \textit{dans le cas de l'équation C.} \end{cases}$$

Nous étudierons maintenant chacune des équations A-C.

1. Équation A. Soient $A(w) = [w^2+(u+2)w+1]^{1/2}$ et $B(z) = [z^2+(Tu+2)z+1]^{1/2}$ les branches des radicaux qui admettent la valeur 1 respectivement aux points $w = 0$ et $z = 0$. Nous avons donc dans ce cas l'équation

$$Tw'w^{-2}(w-1)A(w) = z^{-2}(z-1)B(z)$$

d'où, en intégrant, nous obtenons l'équation suivante:

$$(1.16)\quad \begin{aligned} & T(1+w^{-1})A(w)+ \\ & \quad + \tfrac{1}{2}Tu\log\{w^{-1}[A(w)+w+1+\tfrac{1}{2}u]+[A(w)+1+(1+\tfrac{1}{2}u)w]\} \\ & = (1+z^{-1})B(z)+ \\ & \quad + \tfrac{1}{2}Tu\log\{z^{-1}[B(z)+z+1+\tfrac{1}{2}Tu][B(z)+1+(1+\tfrac{1}{2}Tu)z]\}+C\,, \end{aligned}$$

où C est une constante d'intégration.

Soit $z\to 0$ et respectivement $w = \hat{f}(z)\to 0$. Alors on déduit de (1.16) la relation

$$(1.17)\qquad 2(T-1)+\frac{1}{2}Tu\log\frac{u+4}{T(Tu+4)}-\hat{A}_2 = C\,,$$

d'où résulte immédiatement que

$$\operatorname{im} C = 0\,.$$

Remarquons ensuite que le point $z_0 = -1-\frac{1}{2}Tu+\frac{1}{2}\sqrt{T^2u^2+4Tu}$, racine de la fonction $N(z)$, est situé à l'intérieur du cercle $|z|<1$. De plus la fonction $w = \hat{f}(z)$ admet en ce point la valeur $w_0 = -1-\frac{1}{2}u+ +\frac{1}{2}\sqrt{u^2+4u}$. En passant donc dans l'équation (1.16) à la limite avec $z\to z_0$ et respectivement $w\to w_0$, nous aurons

$$(1.18)\qquad C = \operatorname{re} C = \frac{1}{2}Tu\log\frac{u+4}{T(Tu+4)}\,.$$

Les formules (1.17) et (1.18) donnent donc

$$(1.19)\qquad \hat{A}_2 = 2(T-1)\,,$$

d'où

$$u = T^{-1}(a+2\hat{A}_2) = T^{-1}(a+4T-4)\,.$$

Dans le cas de l'équation A, u est un nombre positif et $G(\hat{f})$ s'exprime par la première des formules (1.15), donc

$$a > 4(1-T)$$

et

$$G(\hat{f}) = 3-2a+2(a-4)T+5T^2 .$$

Nous avons ainsi démontré le

LEMME 2. *S'il existe une fonction extrémale $w = \hat{f}(z)$ par rapport à la fonctionnelle $G(f)$, pour laquelle $u > 0$, on a*

$$G(\hat{f}) = 3-2a+2(a-4)T+5T^2, \qquad a > 4(1-T); \tag{1.20}$$

cette fonction satisfait à l'équation (1.16), *où la constante C est définie par la formule* (1.18)

Remarque. Soit $w = f(z)$, $|f(z)| < 1$, une fonction définie dans le cercle $|z| < 1$ par l'équation

$$\frac{w}{(1+w)^2} = \frac{Tz}{(1+z)^2} . \tag{1.21}$$

On vérifie aisément: 1° que cette fonction représente le cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|w| < 1$ coupé suivant le segment $\langle w_1, 1)$, où $w_1 = (2-T-2\sqrt{1-T})T^{-1}$; 2° qu'elle appartient à la famille R_T; 3° qu'elle satisfait à l'équation (1.16) et à la condition (1.20), c'est-à-dire $G(f) = G(\hat{f})$.

2. Équation B. Dans le cas de l'équation B on a

$$Tw'w^{-2}(w^2-1) = z^{-2}(z^2-1) ,$$

d'où en intégrant on obtient l'équation

$$T(w+w^{-1}) = z+z^{-1}+C , \tag{1.22}$$

où C est une constante d'intégration. Comme $w = T(z+\hat{A}_2z^2+\hat{A}_3z^3+\ldots)$ on obtient, en développant les deux membres de l'équation (1.22) en série de Laurent dans un anneau de centre $z = 0$ et en égalant les coefficients des mêmes puissances de z,

$$C = -\hat{A}_2, \qquad -\hat{A}_3+\hat{A}_2^2+T^2 = 1 .$$

D'autre part, on a dans le cas considéré $u = T^{-1}(a+2\hat{A}_2) = 0$, donc $\hat{A}_2 = -\frac{1}{2}a$. Par conséquent

$$C = \tfrac{1}{2}a , \qquad \hat{A}_3+a\hat{A}_2 = T^2-1-\tfrac{1}{4}a^2 .$$

Nous étudierons maintenant l'équation (1.22) pour $C = \frac{1}{2}a$. On sait que la fonction $\omega = w+1/w$ représente le cercle $|w| < 1$ sur le plan (ω) muni d'une coupure suivant le segment $\langle -2, 2\rangle$. Ensuite, la fonction $\omega = \dfrac{1}{T}\left(z+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2}a\right)$ représente le cercle $|z| < 1$ sur le plan (ω) entaillé suivant le segment de l'axe réel $\langle T^{-1}(\frac{1}{2}a-2),\, T^{-1}(\frac{1}{2}a+2)\rangle$. Comme $T^{-1}(\frac{1}{2}a+2) > 2$ et $T^{-1}(\frac{1}{2}a-2) \leqslant -2$ lorsque $a \leqslant 4(1-T)$, l'équation

$$T(w+w^{-1}) = z+z^{-1}+\tfrac{1}{2}a \tag{1.23}$$

définit dans le cercle $|z| < 1$ une fonction de la classe R_T si

$$a \leqslant 4(1-T)\,.$$

Cette fonction représente le cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|w| < 1$ muni de deux coupures suivant les segments $(-1, w_2\rangle$, $\langle w_3, 1)$, où

$$w_2 = \tfrac{1}{2}\big[(2+\tfrac{1}{2}a)T^{-1} - \sqrt{(2+\tfrac{1}{2}a)^2T^{-2}-4}\,\big],$$
$$w_3 = \tfrac{1}{2}\big[(\tfrac{1}{2}a-2)T^{-1} + \sqrt{(\tfrac{1}{2}a-2)^2T^{-2}-4}\,\big].$$

Nous obtenons ainsi le

LEMME 3. *S'il existe une fonction extrémale $w = \hat{f}(z)$ par rapport à la fonctionnelle $G(f)$, pour laquelle $u = 0$, alors*

$$G(\hat{f}) = -1-\tfrac{1}{4}a^2+T^2\,, \qquad a \leqslant 4(1-T)$$

et cette fonction satisfait à l'équation (1.23).

3. Équation C. Nous démontrerons enfin qu'il n'existe pas de fonction extrémale par rapport à la fonctionnelle $G(f)$ pour laquelle u admette des valeurs négatives. En effet, dans le cas contraire chacune de ces fonctions satisferait à l'équation C (v. lemma 1). Mais alors, tout à fait comme dans le cas de l'équation A, on obtiendrait l'équation

$$T(1-w^{-1})C(w) + \tfrac{1}{2}Tu\log\frac{w[C(w)+w+\frac{1}{2}u-1]}{C(w)+1+(\frac{1}{2}u-1)w} \tag{1.24}$$
$$= (1-z^{-1})D(z) + \tfrac{1}{2}Tu\log\frac{z[D(z)+z+\frac{1}{2}Tu-1]}{D(z)+1+(\frac{1}{2}Tu-1)z} + K\,,$$

où $C(w) = [w^2+(u-2)w+1]^{1/2}$, $C(0) = 1$, $D(z) = [z^2+(Tu-2)z+1]^{1/2}$, $D(0) = 1$ et K est une constante d'intégration.

En passant ensuite dans l'équation (1.24) à la limite avec $z \to 0$ et respectivement $w \to 0$, on aurait la relation

$$\hat{A}_2 = 2(1-T)+K\,.$$

Posons $z_0 = 1-\frac{1}{2}Tu-\frac{1}{2}\sqrt{T^2u^2-4Tu}$, $w_0 = 1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\sqrt{u^2-4u}$. Alors $N(z_0) = 0$ et $M(w_0) = 0$. Comme $|z_0| < 1$ et $|w_0| < 1$, on aurait $w_0 = \hat{f}(z_0)$. Si $z \to z_0$, on a aussi $w \to w_0$ et de l'équation (1.24) on obtiendrait, après quelques simples calculs, $K = 0$. Cela est pourtant impossible, car en vertu de $\hat{A}_2 = 2(1-T) > 0$ on aurait

$$u = T^{-1}(a+2\hat{A}_2) > 0\,.$$

Désignons par D_A et D_B les ensembles du plan (T, a) définis comme il suit:

$$D_A = \{(T, a):\ 0 < T < 1,\ 4(1-T) < a\}\,,$$
$$D_B = \{(T, a):\ 0 < T < 1,\ 0 \leqslant a \leqslant 4(1-T)\}\,.$$

Nous avons considéré, dans ce qui précède, toutes les formes possibles de l'équation (1.6) des fonctions extrémales pour lesquelle la fonctionnelle $G(f) = A_{3f} + aA_{2f}$ atteint sa borne inférieure. Il résulte des lemmes que nous venons d'établir que si le point $(T, a) \in D_A$, on a l'équation A, d'autre part, si le point $(T, a) \in D_B$, c'est l'équation B qui a lieu. Comme les ensembles D_A et D_B sont disjoints, et pour tout couple possible de nombres (T, a) il existe une fonction extrémale, on a le

THÉORÈME 1. *Pour toute fonction $f(z)$ de la classe R_T on a la limitation exacte suivante*:

$$G(f) \geqslant \begin{cases} 3-2a+2(a-4)T+5T^2 & si \quad (T, a) \in D_A\,, \\ -1-\frac{1}{4}a^2+T^2 & si \quad (T, a) \in D_B\,. \end{cases}$$

Les fonctions extrémales vérifient respectivement les équations (1.21) *ou* (1.23).

Enfin, considérons les fonctions de la forme

$$h(z, T) = \frac{\hat{f}(z)-z}{T-1}\,, \qquad |z| < 1\,, \qquad 0 < T < 1\,,$$

où $\hat{f}(z)$ désigne la fonction pour laquelle la fonctionnelle $G(f)$ atteint son minimum (v. [8], § 4). Elles forment une famille normale. On peut donc extraire de toute suite $\{T_n\}$ convergente vers l'unité une suite partielle telle que la suite de fonctions $\{h, (z, T_{n_k})\}$ converge presque uniformément dans le cercle $|z| < 1$ vers une fonction $h(z)$, de la forme

$$h(z) = \lim_{T\to 1} h(z, T) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

La fonction $h(z)$ sera dite fonction limite. On a donc, pour T suffisamment proches de l'unité,

$$\hat{f}(z) \approx z + (T-1)h(z)\,.$$

Nous allons déterminer les fonctions limites pour la fonctionnelle considérée. Dans le cas où $a = 0$, la fonction $w = \hat{f}(z)$ vérifie l'équation (1.23), d'où résulte la relation:

$$Tz(1+w^2) = w(1+z^2)\,.$$

La fonction $h(z, T)$ satisfait donc à l'équation

$$Tz\big[1+\big(z+(T-1)h(z, T)\big)^2\big] = (1+z^2)[z+(T-1)h(z, T)]\,.$$

On obtient ainsi:

$$z(1+z^2) + 2Tz^2 h(z, T) + T(T-1)zh^2(z, T) = (1+z^2)h(z, T)\,.$$

Finalement

$$h(z) = z\frac{1+z^2}{1-z^2}.$$

Si $\alpha > 0$, on a l'équation (1.21). Pai conséquent les fonctions $h(z, T)$ vérifient la relation

$$[z+(T-1)h(z, T)](1+z)^2 = Tz[1+z+(T-1)h(z, T)]^2,$$

d'où il vient

$$-z(1+z)^2+(1+z)^2h(z, T) = 2Tz(1+z)h(z, T)+T(T-1)zh^2(z, T).$$

En passant à la limite pour $T\to 1$, on obtient donc

$$h(z) = z\frac{1+z}{1-z}. \tag{1.25}$$

Nous avons ainsi établi le

THÉORÈME 2. *Les fonctions extrémales limites par rapport à la fonctionnelle $G(f)$ dans la famille des fonctions proches de l'identité sont de la forme*

$$h(z) = \begin{cases} z\dfrac{1+z^2}{1-z^2} & si \quad \alpha = 0, \\ z\dfrac{1+z}{1-z} & si \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

Les fonctions limites peuvent être déterminées directement à partir des équations fonctionnelles différentielles correspondantes. Ainsi, par exemple, dans le cas $\alpha > 0$, on déduit de l'équation A l'équation différentielle linéaire

$$2z(z-1)[z^2+(\alpha+2)z+1]h'(z) = [\alpha z^2-(3\alpha+4)z-4]h(z)-z(z-1)[2z^2+(\alpha+4)z+2].$$

La solution générale $g(z)$ de l'équation homogène est de la forme

$$g(z) = \frac{Cz^2}{(z-1)\sqrt{z^2+(\alpha+2)z+1}}$$

et la solution générale de l'équation avec second membre s'exprime par la formule

$$h(z) = z\frac{1+z}{1-z}+C_1\frac{z^2}{(z-1)\sqrt{z^2+(\alpha+2)z+1}}.$$

De la condition (1.19) et de la définition des fonctions limites il résulte que $C_1 = 0$; la fonction limite a donc bien la forme (1.25).

Revenons maintenant aux fonctions des classes R_M et R_∞. Désignons par D_1 et D_2 les ensembles suivants:

$$D_1 = \{(M, a):\ 1 < M,\ 0 \leqslant a \leqslant 4(1-M^{-1})\},$$
$$D_2 = \{(M, a):\ 1 < M,\ 4(1-M^{-1}) < a\}.$$

Alors, en vertu des théorèmes 1-2 et des relations connues entre les fonctions des familles R_M et R_∞, on obtient le

Théorème 3. *Pour toute fonction $w = F(z)$ de la famille R_M on a la limitation exacte suivante*:

$$A_3 + aA_2 \geqslant \begin{cases} M^{-2}-1-\frac{1}{4}a^2 & si \quad (M, a) \in D_1, \\ 5M^{-2}+2(a-4)M^{-1}+3-2a & si \quad (M, a) \in D_2. \end{cases}$$

La fonction extrémale est définie, dans le premier cas, par l'équation

$$wM^{-2}+w^{-1} = z+z^{-1}+\tfrac{1}{2}a$$

et représente le cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|w| < M$ muni de coupures suivant les segments $\langle a_1, M), (-M, a_2\rangle$, où

$$a_1 = \tfrac{1}{2}M\left[(\tfrac{1}{2}a+2)M-\sqrt{(\tfrac{1}{2}a+2)^2M^2-4}\right],$$
$$a_2 = \tfrac{1}{2}M\left[(\tfrac{1}{2}a-2)M+\sqrt{(\tfrac{1}{2}a-2)^2M^2-4}\right];$$

dans le second cas, elle est définie par l'équation

$$\frac{w}{(1+M^{-1}w)^2} = \frac{z}{(1+z)^2}$$

et représente le cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|w| < M$, muni d'une coupure suivant le segment $\langle b, M)$, où $b = \left(2-M^{-1}-2\sqrt{1-M^{-1}}\right)M^2$.

Les fonctions limites ont la forme

$$h(z) = \begin{cases} z\dfrac{1+z^2}{1-z^2} & si \quad a = 0, \\[2ex] z\dfrac{1+z}{1-z} & si \quad a > 0. \end{cases}$$

Enfin, de même que dans le travail [8] on déduit du théorème 3 le théorème suivant concernant la classe R_∞:

Théorème 4. *Pour toute fonction de la famille R_∞ on a la limitation exacte suivante*:

$$A_3 + aA_2 \geqslant \begin{cases} -1-\frac{1}{4}a^2 & si \quad 0 \leqslant a < 4, \\ 3-2a & si \quad 4 \leqslant a. \end{cases}$$

Dans le cas $0 \leqslant a < 4$ la fonction extrémale est de la forme

$$w = \frac{z}{1+\frac{1}{2}az+z^2} = z-\tfrac{1}{2}az^2+(\tfrac{1}{4}a^2-1)z^3+\ldots$$

et représente le cercle $|z| < 1$ *sur le plan entaillé suivant les segments* $(-\infty, 2/(\alpha-4)\rangle$, $\langle 2/(\alpha+4), \infty)$; *si* $\alpha \geqslant 4$, *elle prend la forme*

$$w = \frac{z}{(1+z)^2} = z - 2z^2 + 3z^3 + \ldots$$

L'image du cercle $|z| < 1$ *est alors le plan entaillé suivant le segment* $\langle \frac{1}{4}, \infty)$.

Il est intéressant de noter que dans le cas de la limitation supérieure de la fonctionnelle $A_3 + \alpha A_2$ on a obtenu (v. [8]) dans la classe R_M un maximum défini par trois formules différentes, suivant la position du point (M, α), tandis que le minimum est donné par deux formules. Dans la classe R_∞, le maximum est fourni par une seule formule, alors que le minimum est fourni par une seule formule, alors que le minimum est également déterminé par deux formules. Le nombre $\alpha = 4$, qui intervient essentiellement dans les limitations inférieures et supérieures, joue dans ces considérations un rôle particulier.

§ 2. Le minimum de la fonctionnelle $\operatorname{re}(A_3 - A_2) + \operatorname{im}^2(A_2)$ **dans les familles** S_M **et** S_∞**.** Désignons par S_M la classe partielle des fonctions $F(z)$ de la famille S_∞ qui satisfont dans le cercle $|z| < 1$ à la condition $|F(z)| < M$, où M est un nombre quelconque fixé, supérieur à l'unité.

W. Janowski [12] a étudié la fonctionnelle

$$H_1(F) = \operatorname{re}(A_3 - A_2) + \operatorname{im}^2(A_2) \tag{2.1}$$

définie dans les classes S_M et S_∞ et il a déterminé sa borne supérieure dans ces familles et, par suite, le maximum de $\operatorname{re}(A_3 - A_2)$.

Nous allons trouver le minimum de la fonctionnelle (2.1) dans les familles S_M et S_∞. Dans ce but, considérons la classe $\mathcal{F}_T$ des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$, ayant la forme (1.3) et satisfaisant aux conditions $|f(z)| < 1$ pour $|z| < 1$; $a_{1f} \geqslant T$, où T est un nombre quelconque fixé de l'intervalle $(0, 1)$.

Il résulte d'un théorème connu (v. [1]) que chacune des fonctions $w = \hat{f}(z)$ de la famille $\mathcal{F}_T$, pour laquelle la fonctionnelle

$$G_1(f) = \operatorname{re}(A_{3f} - A_{2f}) + \operatorname{im}^2(A_{2f}) \tag{2.2}$$

atteint son minimum, satisfait à une équation fonctionnelle différentielle de la forme (1.6), où

$$M(w) = 2T^3 w^{-2}[w^4 + uw^3 - PT^{-3}w^2 + uw + 1],$$

$$N(z) = 2Tz^{-2}[z^4 + Tuz^3 + (2\operatorname{re}\hat{A}_3 - \operatorname{re}\hat{A}_2 + 2\operatorname{im}^2\hat{A}_2 - PT^{-1})z^2 + Tuz + 1],$$

$$P = 2T^3 \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} (u\cos x + \cos 2x),$$

$$u = (2\operatorname{re}\hat{A}_2 - 1)T^{-1}.$$

En procédant ensuite comme au § 1, on obtient des formules analogues pour P, $M(w)$ (v. (1.9) et (1.10)) et, par conséquent, les formes A, B et C (v. lemme 1) de l'équation des fonctions extrémales par rapport à la fonctionnelle (2.2). Aux formules (1.15) correspondent alors les formules suivantes:

$$G(\hat{f}) = \begin{cases} T^2 - \frac{5}{4} + Tu(T - \frac{5}{4}) & \text{si} \quad u > 0 \quad \text{(équation A),} \\ T^2 - \frac{5}{4} & \text{si} \quad u = 0 \quad \text{(équation B),} \\ T^2 - \frac{5}{4} + Tu(\frac{3}{4} - T) & \text{si} \quad u < 0 \quad \text{(équation C).} \end{cases}$$

Après avoir intégré les équations A-C et discuté les différentes cas on obtient le

THÉORÈME 5. *Pour toute fonction $f(z)$ de la classe $\mathcal{F}_T$ on a la limitation exacte suivante:*

$$G_1(f) \geqslant \begin{cases} T^2 - \frac{5}{4} & si \quad 0 < T \leqslant \frac{3}{4}, \\ 5T^2 - 6T + 1 & si \quad \frac{3}{4} < T < 1. \end{cases}$$

Si $0 < T \leqslant \frac{3}{4}$, la fonction extrémale $w = \hat{f}(z)$ est définie par l'équation

$$T(w + w^{-1}) = z + z^{-1} - \tfrac{1}{2}$$

et représente le cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|w| < 1$ muni de coupures suivant les segments $(-1, a_1\rangle$, $\langle a_2, 1)$, où

$$a_1 = (4T)^{-1}\left(\sqrt{25 - 16T^2} - 5\right), \qquad a_2 = (4T)^{-1}\left(3 - \sqrt{9 - 16T^2}\right);$$

si $\frac{3}{4} < T < 1$, la fonction extrémale satisfait à l'équation

$$w(1-w)^{-2} = Tz(1-z)^{-2}$$

et représente le cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|w| < 1$ coupé suivant le segment $(-1, a\rangle$, où

$$a = T^{-1}\left(T - 2 + 2\sqrt{1-T}\right).$$

La fonction extrémale limite ($T \to 1$) prend la forme

$$h(z) = z\frac{1-z}{1+z}.$$

Enfin, les relations connues entre les fonctions des classes $\mathcal{F}_T$ et S_M ($M = T^{-1}$), ainsi que S_M et S_∞, mènent aux théorèmes suivants:

THÉORÈME 6. *Si $F(z)$ appartient à la famille S_M, on a*

$$H_1(F) \geqslant \begin{cases} M^{-2} - \frac{5}{4} & si \quad M \geqslant \frac{4}{3}, \\ 5M^{-2} - 6M^{-1} + 1 & si \quad 1 < M < \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Dans le cas $M \geqslant \frac{4}{3}$ la fonction extrémale satisfait à l'équation

$$wM^{-2} + w^{-1} = z + z^{-1} - \tfrac{1}{2}$$

et représente le cercle $|z| < 1$ *sur le cercle* $|w| < M$ *coupé suivant les segments* $(-M, w_1\rangle$, $\langle w_2, M)$, *où*

$$w_1 = \tfrac{1}{4}M^2\left(-5+\sqrt{25-16M^{-2}}\right), \qquad w_2 = \tfrac{1}{4}M^2\left(3-\sqrt{9-16M^{-2}}\right);$$

si $1 < M < \frac{4}{3}$, *elle vérifie l'équation*

$$w\left(1-\frac{w}{M}\right)^{-2} = z(1-z)^{-2}$$

et représente le cercle $|z| < 1$ *sur le cercle* $|w| < M$ *coupé suivant le segment*

$$\left(-M, M^2(M^{-1}-2+2\sqrt{1-M^{-1}})\right\rangle .$$

La fonction limite admet alors la forme

$$h(z) = z\frac{1-z}{1+z}.$$

Théorème 7. *Si* $F(z)$ *est une fonction de la classe* S_∞, *on a*

$$H_1(F) \geqslant -\tfrac{5}{4};$$

la fonction extrémale est définie par la formule

$$F(z) = \frac{z}{1-\frac{1}{2}z+z^2} = z(1+\tfrac{1}{2}z-\tfrac{3}{4}z^2+\ldots)$$

et représente le cercle $|z| < 1$ *sur le plan entaillé suivant les segments de l'axe réel* $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, $\langle\frac{2}{3}, \infty)$.

§ 3. Le maximum de la fonctionnelle $|A_3-\alpha A_2^2|$ **dans la classe** S_∞**.** G. M. Golusin a établi ([6], p. 212) le

Théorème 8. *Si* $F(z)$ *est une fonction de la famille* S_∞, *on a, pour tout* α, $0 \leqslant \alpha < 1$, *la limitation exacte suivante*:

$$|A_3-\alpha A_2^2| \leqslant 2e^{-2\alpha/(1-\alpha)}+1 . \tag{3.1}$$

En particulier, en mettant dans l'inégalité (3.1) $\alpha = 0$, on obtient le résultat bien connu de Löwner, alors que en posant $\alpha = (p-1)/2p$ $(p = 2, 3, \ldots)$ on obtient une limitation du module du coefficient $A_{2p+1}^{(p)}$ des fonctions p-symétriques.

On a encore le théorème suivant:

Théorème 9. *Pour toute fonction de la classe* S_∞ *on a*

$$|A_3-\alpha A_2^2| \leqslant \begin{cases} 3-4\alpha & si \quad \alpha < 0 , \\ 4\alpha-3 & si \quad \alpha \geqslant 1 . \end{cases} \tag{3.2}$$

L'égalité a lieu respectivement pour les fonctions $F(z) = z/(1-\varepsilon z)^2$, $|\varepsilon| = 1$.

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent. La fonction $e^{ix}F(e^{-ix}z)$ (x réel quelconque) appartenant, avec la fonction $F(z)$, à la famille S_∞, le maximum de la fonctionnelle $|A_3-aA_2^2|$ se confond avec la borne supérieure de la fonctionnelle $\mathrm{re}(A_3-aA_2^2)$.

Désignons par S_∞^* la sous-classe des fonctions $F(z)$ de la famille S_∞ qui admettent la forme

$$F(z)=\lim_{t\to\infty}e^t f(z,t)\,,$$

où $f(z,t)$ est une fonction holomorphe de la variable z dans le cercle $|z|<1$ telle que $|f(z,t)|<1$ pour $|z|<1$, $f(0,t)=0$ et $f'_z(0,t)>0$. La fonction $f=f(z,t)$ est une solution de l'équation de Löwner [13]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-f\frac{1+kf}{1-kf} \tag{3.3}$$

satisfaisant à la condition $f(z,0)=z$. La fonction $k=k(t)$, $|k(t)|=1$, est une fonction quelconque continue dans l'intervalle $0\leqslant t<\infty$ à l'exception d'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce.

De plus, les coefficients A_2 et A_3 de la fonction $F(z)\in S_\infty^*$ s'expriment par les formules:

$$\begin{aligned} A_2&=-2\int_0^\infty e^{-\tau}k(\tau)\,d\tau\,,\\ A_3&=-2\int_0^\infty e^{-2\tau}k^2(\tau)\,d\tau+4\Big(\int_0^\infty e^{-\tau}k(\tau)\,d\tau\Big)^2\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Comme la famille S_∞^* constitue une sous-classe dense de la classe S_∞, il suffit de déterminer le maximum de $\mathrm{re}(A_3-aA_2^2)$ dans la famille S_∞^*. D'après (3.4) on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{re}(A_3-aA_2^2)\\ &=4(1-a)\Big[\Big(\int_0^\infty e^{-\tau}\cos\theta(\tau)\,d\tau\Big)^2-\Big(\int_0^\infty e^{-\tau}\sin\theta(\tau)\,d\tau\Big)^2\Big]-2\int_0^\infty e^{-2\tau}\cos2\theta(\tau)\,d\tau\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $\theta(\tau)=\arg k(\tau)$.

Considérons deux cas. Si $a\geqslant1$, on déduit de la relation (3.5)

$$\mathrm{re}(A_3-aA_2^2)\leqslant4(a-1)\Big(\int_0^\infty e^{-\tau}\sin\theta(\tau)\,d\tau\Big)^2+4\int_0^\infty e^{-2\tau}\sin^2\theta(\tau)\,d\tau-1\,. \tag{3.6}$$

Si v désigne la solution de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-2\tau}\sin^2\theta(\tau)\,d\tau=(v+\tfrac12)e^{-2v}\,,\qquad v\geqslant0\,, \tag{3.7}$$

alors (v. [6], p. 211), comme on le sait,

$$\left|\int_0^\infty e^{-\tau}\sin\theta(\tau)\,d\tau\right| \leqslant (v+1)e^{-v}. \tag{3.8}$$

Des formules (3.6), (3.7) et (3.8) on obtient donc l'inégalité

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant u_1(v)\,, \tag{3.9}$$

où

$$u_1(v) = 4e^{-2v}[(a-1)v^2+(2a-1)v+a-\tfrac{1}{2}]-1, \qquad v \geqslant 0\,.$$

Comme $u_1'(v) < 0$, la fonction $u_1(v)$ atteint son maximum au point $v = 0$ et on a $u_{\max} = u_1(0) = 4a-3$. L'inégalité (3.9) fournit donc la limitation (3.2) pour $a \geqslant 1$.

Si $a < 0$, la relation (3.5) donne

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant 4(1-a)\left(\int_0^\infty e^{-\tau}\cos\theta(\tau)\,d\tau\right)^2 - 4\int_0^\infty e^{-2\tau}\cos^2\theta(\tau)\,d\tau + 1\,.$$

En procédant ensuite comme auparavant on obtient l'inégalité

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant u_2(v)\,,$$

où

$$u_2(v) = 4e^{-2v}[(1-a)v^2+(1-2a)v+\tfrac{1}{2}-a]+1, \qquad v \geqslant 0,$$

d'où on déduit pour $a < 0$ la limitation

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant \max_{0\leqslant v<\infty} u_2(v) = 3-4a\,.$$

Remarquons encore que pour la fonction de Koebe

$$F(z) = \frac{z}{(1-\varepsilon z)^2} = z + 2\varepsilon z^2 + 3\varepsilon^2 z^3 + \ldots$$

on a $|A_3 - aA_2^2| = |3-4a|$, la limitation (3.2) est donc exacte.

§ 4. Le maximum de la fonctionnelle $|A_3 - aA_2^2|$ dans la classe S_M. Le résultat de Golusin relatif à la limitation de la fonctionnelle $|A_3 - aA_2^2|$, $0 \leqslant a < 1$, dans la famille S_∞ a été généralisé par moi-même à la classe des fonctions S_M (v. [9] et [10]). R. Zawadzki [16] a ensuite déterminé la borne supérieure de cette fonctionnelle pour $a = 1$ et R. Guzek [7] a résolu un problème équivalent, mais pour a réel quelconque. Tous ces résultats ont été obtenus à l'aide de l'équation fonctionnelle différentielle des fonctions extrémales dans la famille $\mathcal{F}_T$ [1].

Il se trouve pourtant que ces résultats peuvent être établis de la même façon que les résultats des théorèmes 8 et 9, c'est-à-dire à l'aide de l'équation de Löwner pour les fonctions univalentes bornées (v. [13]).

Nous établirons d'abord les lemmes suivants (v. [6], p. 211):

LEMME 4. *Si*: 1° $\lambda(\tau)$ *est une fonction réelle quelconque de la variable réelle* τ, *définie et continue dans l'intervalle* $\langle 0, m\rangle$ *à l'exception d'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce*; 2° $|\lambda(\tau)| \leqslant e^{-\tau}$ *pour* $\tau \geqslant 0$, *et* 3°, *si*

$$\int_0^m \lambda^2(\tau)\,d\tau \leqslant me^{-2m}, \tag{4.1}$$

alors

$$\Big(\int_0^m \lambda(\tau)\,d\tau\Big)^2 \leqslant (me^{-2m} - ve^{-2v})\,m, \tag{4.2}$$

où v, $0 \leqslant v \leqslant m$, *est racine de l'équation*

$$\int_0^m \lambda^2(\tau)\,d\tau = me^{-2m} - ve^{-2v}. \tag{4.3}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que la solution de l'équation (4.3) existe. En effet, considérons la fonction

$$g(v) = me^{-2m} - ve^{-2v}, \qquad 0 \leqslant v \leqslant m.$$

Comme $g(0) = me^{-2m}$, $g(m) = 0$, $g'(v) = (2v-1)e^{-2v}$, la fonction $g(v)$ décroît dans l'intervalle $\langle 0, m\rangle$ de la valeur me^{-2m} à zéro (si $m \leqslant \frac{1}{2}$), ou bien décroît de la valeur me^{-2m} à une valeur négative, et ensuite croît à zéro (si $m > \frac{1}{2}$). Il résulte donc de (4.1) que l'équation (4.3) admet une racine dans l'intervalle $\langle 0, m\rangle$.

En appliquant ensuite l'inégalité de Schwarz à l'intégrale (4.2), on obtient

$$\Big(\int_0^m \lambda(\tau)\,d\tau\Big)^2 \leqslant \Big(\int_0^m \lambda^2(\tau)\,d\tau\Big)\Big(\int_0^m d\tau\Big),$$

d'où, en vertu de (4.3), résulte la limitation (4.2).

LEMME 5. *Si la fonction* $\lambda(\tau)$ *satisfait aux hypothèses* 1° *et* 2° *du lemme* 4 *et à la condition*

$$\int_0^m \lambda^2(\tau)\,d\tau \geqslant me^{-2m}, \tag{4.4}$$

on a

$$\Big|\int_0^m \lambda(\tau)\,d\tau\Big| \leqslant (v+1)e^{-v} - e^{-m}, \tag{4.5}$$

où v, $0 \leqslant v \leqslant m$, *est une racine de l'équation*

$$\int_0^m \lambda^2(\tau)\,d\tau = (v+\tfrac{1}{2})e^{-2v} - \tfrac{1}{2}e^{-2m}. \tag{4.6}$$

La limitation (4.5) *est exacte pour tout* v *et l'égalité n'a lieu que si* $\lambda(\tau) = \pm\mu(\tau)$, *où*

$$\mu(\tau) = \begin{cases} e^{-v} & \textit{pour} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant v\,, \\ e^{-\tau} & \textit{pour} \quad v \leqslant \tau \leqslant m\,. \end{cases}$$

Démonstration. Posons

$$u(v) = (v+\tfrac{1}{2})e^{-2v} - \tfrac{1}{2}e^{-2m}, \qquad 0 \leqslant v \leqslant m\,.$$

Alors $u(0) = \frac{1}{2}(1-e^{-2m})$, $u(m) = me^{-2m}$, $u'(v) = -2ve^{-2v} < 0$ donc la fonction $u(v)$ décroît de la valeur $u(0)$ à $u(m)$. Mais, d'autre part, en vertu de l'hypothèse 2 et de (4.4), on a

$$u(m) \leqslant \int_0^m \lambda^2(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^m e^{-2\tau}d\tau = u(0)\,,$$

ce qui prouve qu'il existe exactement une solution v de l'équation (4.6), satisfaisant à la condition $0 \leqslant v \leqslant m$.

Remarquons ensuite que

$$\int_0^m \mu^2(\tau)\,d\tau = \int_0^v e^{-2v}d\tau + \int_v^m e^{-2\tau}d\tau = ve^{-2v} - \tfrac{1}{2}(e^{-2m} - e^{-2v}) = \int_0^m \lambda^2(\tau)\,d\tau\,.$$

On a aussi l'inégalité

$$2e^{-v}\big(\mu(\tau) - |\lambda(\tau)|\big) \geqslant \mu^2(\tau) - \lambda^2(\tau)\,,$$

d'où

$$\int_0^m \big(\mu(\tau) - |\lambda(\tau)|\big)\,d\tau \geqslant 0\,.$$

Donc

$$\Big|\int_0^m \lambda(\tau)\,d\tau\Big| \leqslant \int_0^m |\lambda(\tau)|\,d\tau \leqslant \int_0^m \mu(\tau)\,d\tau = \int_0^v e^{-v}d\tau + \int_v^m e^{-\tau}d\tau = (v+1)e^{-v} - e^{-m},$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Pour déterminer le maximum de la fonctionnelle $|A_3 - aA_2^2|$ dans la famille S_M, il suffit de trouver la borne supérieure de l'expression $\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2)$ dans la sous-classe S_M^* de la classe S_M des fonctions de la forme (v. § 3)

$$F(z) = \lim_{t\to m} e^t f(z,t), \qquad m = \log M\,,$$

où $f(z,t)$ est une fonction holomorphe de la variable z dans le cercle $|z| < 1$ telle que $|f(z,t)| < 1$ pour $|z| < 1$, $f(0;t) = 0$ et $f_z'(0,t) > 0$. Pour $0 \leqslant t \leqslant m$ $f(z,t)$ est une solution de l'équation (3.3) satisfaisant à la condition initiale $f(z,0) = z$. La fonction $k = k(t)$, $|k(t)| = 1$, est une fonction quelconque continue dans l'intervalle $\langle 0, m\rangle$ sauf en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce.

Comme les coefficients A_2 et A_3 de la fonction $F(z)$ de la classe S_M^* s'expriment par les formules

$$A_2 = -2\int_0^m e^{-\tau}k(\tau)\,d\tau\,, \qquad m = \log M\,,$$

$$A_3 = -2\int_0^m e^{-2\tau}k^2(\tau)\,d\tau + 4\Big(\int_0^m e^{-\tau}k(\tau)\,d\tau\Big)^2\,,$$

il s'agit donc de déterminer le maximum de l'expression

$$(4.7) \qquad \operatorname{re}(A_3 - aA_2^2) = 4(1-a)\Big(\int_0^m e^{-\tau}\cos\theta(\tau)\,d\tau\Big)^2 + \\ + 4(a-1)\Big(\int_0^m e^{-\tau}\sin\theta(\tau)\,d\tau\Big)^2 - 2\int_0^m e^{-2\tau}\cos 2\theta(\tau)\,d\tau\,,$$

où $m > 0$ et a sont des nombres réels quelconques fixés et $\theta(\tau) = \arg k(\tau)$.

Nous établirons les théorèmes suivants:

THÉORÈME 10. *Si $M > 1$ et $a \geqslant 1$, toute fonction de la famille S_M admet la limitation exacte*:

$$(4.8) \qquad |A_3 - aA_2^2| \leqslant (4a-5)M^{-2} - 8(a-1)M^{-1} + 4a - 3\,.$$

Démonstration. Si $a \geqslant 1$ on tire de la formule (4.7)

$$(4.9) \qquad \operatorname{re}(A_3 - aA_2^2) \\ \leqslant 4(a-1)\Big(\int_0^m e^{-\tau}\sin\theta(\tau)\,d\tau\Big)^2 - 4\int_0^m e^{-2\tau}\sin^2\theta(\tau)\,d\tau + e^{-2m} - 1\,.$$

Posons

$$\lambda(\tau) = e^{-\tau}\sin\theta(\tau)\,.$$

Des propriétés de la fonction $k(\tau)$ et de la définition des fonctions $\theta(\tau)$ et $\lambda(\tau)$ il résulte que $\lambda(\tau)$ vérifie les hypothèses 1-2 des lemmes 4 et 5 et, de plus, l'une des deux conditions (4.1) ou (4.4).

Si la condition (4.4) est vérifiée, on déduit de l'inégalité (4.9), en vertu de (4.5) et (4.6),

$$(4.10) \qquad \operatorname{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant u_1(v)\,,$$

où

$$(4.11) \qquad u_1(v) = 4[(a-1)v^2 + (2a-1)v + a - \tfrac{1}{2}]e^{-2v} - \\ - 8(a-1)(v+1)e^{-m-v} + (4a-5)e^{-2m} - 1\,.$$

Mais comme on a dans l'intervalle $0 < v \leqslant m$, pour $a \geqslant 1$ et $m > 0$ fixés,

$$u_1'(v) = -8(a-1)ve^{-2v}\Big[v + \frac{a}{a-1} - e^{v-m}\Big] < 0\,,$$

la fonction (4.11) est décroissante dans l'intervalle $\langle 0, m\rangle$, d'où

$$u_1(m) \leqslant u_1(v) \leqslant u_1(0) . \tag{4.12}$$

Des relations (4.10), (4.11) et (4.12) on tire

$$\operatorname{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant (4a-5)e^{-2m} - 8(a-1)e^{-m} + 4a - 3 . \tag{4.13}$$

Il reste à considérer le cas des fonctions $\lambda(\tau)$ pour lesquelles est vérifiée l'inégalité (4.1). On déduit alors des relations (4.2), (4.3) et (4.9)

$$\operatorname{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant u_2(v) ,$$

où

$$u_2(v) = 4ve^{-2v}[1-m(a-1)] + e^{-2m}[4(a-1)m^2 - 4m + 1] - 1 . \tag{4.14}$$

Par un calcul direct on constate que

$$\max_{0\leqslant v\leqslant m} u_2(v) = \begin{cases} u_2(0) & \text{si} \quad a > 1+m^{-1}, \\ u_2(m) & \text{si} \quad 0 < m \leqslant \frac{1}{2},\ 1 \leqslant a \leqslant 1+m^{-1}, \\ u_2(\frac{1}{2}) & \text{si} \quad m > \frac{1}{2},\ 1 \leqslant a \leqslant 1+m^{-1}. \end{cases}$$

Remarquons encore que la forme des fonctions (4.11) et (4.12) entraîne les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} u_1(m) - u_2(0) &= 8me^{-2m} > 0 , \\ u_1(m) - u_2(m) &= 4m[(a-1)m+1]e^{-2m} > 0 , \\ u_1(m) - u_2(\tfrac{1}{2}) &= 8me^{-2m} + 2e^{-1}[m(a-1)-1] > 0 . \end{aligned}$$

donc

$$u_1(m) > \max_{0\leqslant v\leqslant m} u_2(v) .$$

Par conséquent la condition (4.13) est vérifiée pour toutes les fonctions $F(z)$ de la famille S_M^*, d'où, avec $m = \log M$, on obtient (4.8).

La fonction $w = F(z)$, $|F(z)| < M$, définie par l'équation

$$\frac{M^2 w}{(M+w)^2} = \frac{z}{(1+z)^2} \tag{4.15}$$

appartient à la famille S_M et, comme $\frac{1}{2}F''(0) = 2(M^{-1}-1)$, $\frac{1}{6}F'''(0) = 3 - 8M^{-1} + 5M^{-2}$, la limitation (4.8) est exacte, ce qui achève la démonstration du théorème 10.

Théorème 11. *Si $M > 1$ et $a < 1$, toute fonction de la famille S_M admet la limitation exacte suivante*:

$$|A_3 - aA_2^2| \tag{4.16}$$

$$\leqslant \begin{cases} (5-4a)M^{-2} - 8(1-a)M^{-1} + 3 - 4a & si \quad a \leqslant (1-M)^{-1}, \\ 2M^{-2}(\beta-1)^2 + 1 - M^{-2} & si \quad (1-M)^{-1} < a < 1 - \log^{-1} M , \\ 1 - M^{-2} & si \quad 1 - \log^{-1} M \leqslant a < 1 , \end{cases}$$

où β, $1 < \beta < M$, est racine de l'équation

$$\log \beta M^{-1} + a(1-a)^{-1} + \beta^{-1} = 0 . \tag{4.17}$$

Démonstration. En procédant le même que dans la démonstration du théorème 10 nous allons déterminer le maximum de la fonctionnelle $\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2)$ dans la classe S_M^*. Dans ce but, remarquons que si $a < 1$, la formule (4.7) entraîne l'inégalité

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant 4(1-a)\Big(\int_0^m \lambda(\tau)\,d\tau\Big)^2 - 4\int_0^m \lambda^2(\tau)\,d\tau + 1 - e^{-2m}, \tag{4.18}$$

où

$$m = \log M, \qquad \lambda(\tau) = e^{-\tau}\cos\theta(\tau), \qquad \theta(\tau) = \arg k(\tau) .$$

La fonction $\lambda(\tau)$ vérifie les hypothèses 1-2 des lemmes 4 et 5 et, de plus, l'une des deux conditions (4.1) ou (4.4). Il faudra donc distinguer deux cas:

1° Si la fonction $\lambda(\tau)$ vérifie la condition (4.4), les relations (4.5), (4.6) et (4.18) donnent

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant u_3(v) , \tag{4.19}$$

où

$$u_3(v) = 4[(1-a)v^2 + (1-2a)v + \tfrac{1}{2} - a]e^{-2v} - \\ - 8(1-a)(1+v)e^{-v-m} + (5-4a)e^{-2m} + 1 . \tag{4.20}$$

De plus

$$u_3'(v) = -8v(1-a)e^{-2v}h(v) ,$$

où

$$h(v) = v + \frac{a}{a-1} - e^{v-m}, \qquad 0 \leqslant v \leqslant m .$$

Comme $h'(v) = 1 - e^{v-m} \geqslant 0$, $h(v)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $\langle 0, m\rangle$ et on a $h(0) = \dfrac{a}{a-1} - e^{-m}$, $h(m) = m - (1-a)^{-1}$.

Donc: a) si $a \leqslant a_1(M)$, où $a_1(M) = (1-M)^{-1}$, on a $h(0) \geqslant 0$, et par suite $h(v) > 0$ pour $0 < v \leqslant m$;

b) si $a_1(M) < a < a_2(M)$, où $a_2(M) = 1 - \log^{-1} M$, on a $h(0) < 0$ et $h(m) > 0$, donc $h(v) < 0$ lorsque $0 \leqslant v < v_0$ et $h(v) > 0$ lorsque $v_0 < v \leqslant m$, où v_0 est racine de l'équation $h(v) = 0$;

c) si $a_2(M) \leqslant a < 1$, on a $h(m) \leqslant 0$ et par suite $h(v) < 0$ dans l'intervalle $\langle 0, m)$.

Ces propriétés des fonctions $h(v)$ et $u_3'(v)$ entraînent:

$$\max_{0\leqslant v\leqslant m} u_3(v) = \begin{cases} u_3(0) & \text{si} \quad a \leqslant a_1(M) , \\ u_3(v_0) & \text{si} \quad a_1(M) < a < a_2(M) , \\ u_3(m) & \text{si} \quad a_2(M) \leqslant a < 1 , \end{cases}$$

où $0 < v_0 < m$ est racine de l'équation

$$v_0 + \frac{a}{a-1} = e^{v_0 - m}. \tag{4.21}$$

En tenant compte de (4.19) et (4.20) on déduit de là, dans le cas considéré, les inégalités suivantes:

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant \begin{cases} u_3(0) & \text{si} \quad a \leqslant a_1(M) , \\ u_3(v_0) & \text{si} \quad a_1(M) < a < a_2(M) , \\ u_3(m) & \text{si} \quad a_2(M) \leqslant a < 1 . \end{cases} \tag{4.22}$$

2° Si la fonction $\lambda(\tau)$ vérifie la condition (4.1), on tire des relations (4.2), (4.3) et (4.18) l'inégalité

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant u_4(v) ,$$

où

$$u_4(v) = 4ve^{-2v}[1 - m(1-a)] + e^{-2m}[4(1-a)m^2 - 4m - 1] + 1 . \tag{4.23}$$

Comme

$$0 \leqslant ve^{-2v} \leqslant me^{-2m},$$

(v. (4.1) et (4.3)) et $1 - m(1-a) < 0$ lorsque $a \leqslant a_2(M)$, et $1 - m(1-a) \geqslant 0$ lorsque $a_2(M) < a < 1$, on a dans le second cas

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant \begin{cases} u_4(0) & \text{si} \quad a \leqslant a_2(M) , \\ u_4(m) & \text{si} \quad a_2(M) < a < 1 . \end{cases}$$

Comme $u_4(0) = u_3(m)$ et $u_3(m) \leqslant u_4(m)$, on obtient finalement, en vertu de (4.22) et (4.23):

$$\mathrm{re}(A_3 - aA_2^2) \leqslant \begin{cases} u_3(0) & \text{si} \quad a \leqslant (1-M)^{-1} , \\ u_3(v_0) & \text{si} \quad (1-M)^{-1} < a < 1 - \log^{-1} M , \\ u_4(m) & \text{si} \quad 1 - \log^{-1} M \leqslant a < 1 . \end{cases} \tag{4.24}$$

Pour $m = \log M$ et $v_0 = \log M\beta^{-1}$ l'inégalité (4.24) prendra la forme (4.16), et l'équation (4.12) se réduira à (4.17).

Il reste encore à prouver que la limitation (4.16) est exacte. En effet, l'égalité dans (4.16) avec $a \leqslant (1-M)^{-1}$ a lieu pour la fonction définie par (4.15), tandis que si $1 - \log^{-1} M \leqslant a < 1$, on voit aisément qu'elle a lieu pour la fonction $w = F(z)$, $|F(z)| < M$, définie par l'équation

$$M^{-1}w + Mw^{-1} = M(z + z^{-1})$$

(alors $A_2 = 0$, $A_3 = M^{-2} - 1$).

Pour démontrer que la limitation (4.16) est exacte dans le cas restant, il suffit de prouver, en tenant compte des relations (4.7) et (4.18) et du lemme 5, qu'il existe une fonction $\theta_*(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant m$, telle que

$$\int_0^m e^{-\tau} \sin \theta_*(\tau)\, d\tau = 0 \qquad \text{et} \qquad |\lambda(t)| = \mu(\tau) , \tag{4.25}$$

puisque la fonction $F_*(z)$, associée à la fonction $k_*(\tau) = e^{i\theta_*(\tau)}$ en vertu du théorème de Löwner, est extrémale par rapport à la fonctionnelle étudiée.

Soit v_0, $0 < v_0 < m$, une solution de l'équation (4.21) et $\theta_*(\tau)$ une fonction définie par les formules

$$\cos\theta_*(\tau) = \begin{cases} e^{\tau - v_0} & \text{pour} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant v_0\,, \\ 1 & \text{pour} \quad v_0 \leqslant \tau \leqslant m\,. \end{cases}$$

Alors

$$\sin\theta_*(\tau) = \begin{cases} \pm\sqrt{1 - e^{2(\tau - v_0)}} & \text{pour} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant v_0\,, \\ 0 & \text{pour} \quad v_0 \leqslant \tau \leqslant m\,, \end{cases}$$

d'où on obtient facilement les formules pour la fonction $k_*(\tau) = e^{i\theta_*(\tau)}$. Elle vérifie toutes les conditions exigées par le théorème de Löwner. De plus, $\lambda_*(\tau) = e^{-\tau}\cos\theta_*(\tau) = \mu(\tau)$. En choisissant convenablement différents signes dans les parties de l'intervalle $\langle 0, m\rangle$, on peut aussi satisfaire à la première des conditions (4.25). En effet, considérons par exemple la fonction

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{-\tau}\sqrt{1 - e^{2(\tau - v_0)}}\,d\tau - \int_x^{v_0} e^{-\tau}\sqrt{1 - e^{2(\tau - v_0)}}\,d\tau\,.$$

Elle est continue dans l'intervalle $\langle 0, v_0\rangle$, $\varphi(0) < 0$, $\varphi(v_0) > 0$, il existe donc un point x_0 tel que $\varphi(x_0) = 0$. En posant alors

$$\sin\theta_*(\tau) = \begin{cases} \sqrt{1 - e^{2(\tau - v_0)}}\,, & 0 \leqslant \tau \leqslant x_0\,, \\ -\sqrt{1 - e^{2(\tau - v_0)}}\,, & x_0 < \tau \leqslant v_0\,, \\ 0\,, & v_0 \leqslant \tau \leqslant m \end{cases}$$

on obtient finalement

$$\int_0^m e^{-\tau}\sin\theta_*(\tau)\,d\tau = 0\,,$$

ce qui achève la démonstration.

§ 5. La borne supérieure de la fonctionnelle $A_4 - 3A_3A_2 + \alpha A_2$ dans la famille des fonctions à coefficients réels. Nous avons obtenu aux §§ 1-4 les limitations exactes de certaines fonctionnelles dépendant du second et du troisième coefficient du développement en série de Taylor des fonctions appartenant aux classes étudiées. Les questions analogues relatives aux fonctionnelles qui dépendent des coefficients A_2, A_3 et A_4 constituent un problème beaucoup plus difficile. Il a été étudié jusqu'à présent par de nombreux mathématiciens. P. Garabedian et M. Schiffer [5] et, ensuite, par une méthode plus simple, Z. Charzyński et M. Schiffer [2] ont obtenu une limitation exacte du module du coefficient A_4 dans la famille S_∞. En vertu d'un théorème de Dieudonné [3], cette limitation s'applique aussi à la famille R_∞. Le problème consistant à déterminer la borne supérieure du coefficient A_4 dans la classe R_M a été étudié, entre autres, par V. Singh [15] et M. Schiffer, O. Tamni [14]. J'ai moi-même aussi entrepris quelques tentatives dans cet ordre d'idées [11].

Soit $H(x_2, x_3, x_4)$ une fonction réelle donnée de trois variables réelles, définie dans un domaine suffisamment grand, admettant des dérivées partielles du 1er ordre continues et ne s'annulant simultanément en aucun point de ce domaine. Considérons la famille R_T (v. (1.3)) et faisons correspondre à chaque fonction $f(z)$ de cette famille le nombre

$$H_f = H(A_{2f}, A_{3f}, A_{4f}) . \tag{5.1}$$

Soit

$$w = g^*(z) = a_1^*(z+A_2^*z^2+ \dots)$$

une fonction pour laquelle la fonctionnelle (5.1) atteint son maximum. La fonction $w = g^*(z)$ satisfait à l'équation fonctionnelle différentielle suivante:

$$\left(\frac{w'}{w}\right)^2 M(w) = \frac{1}{z^2}N(z) , \qquad 0 < |z| < 1 , \tag{5.2}$$

où

$$\begin{gathered}
M(w) = D_3(w^3+w^{-3})+D_2(w^2+w^{-2})+D_1(w+w^{-1})-2P , \\
N(z) = E_3(z^3+z^{-3})+E_2(z^2+z^{-2})+E_1(z+z^{-1})+2E_0-2P , \\
H_n = H'_{x_n}(A_2^*, A_3^*, A_4^*) , \qquad n = 2, 3, 4 , \\
D_3 = 2T^4H_4 , \qquad D_2 = 2T^3[H_3+3A_2^*H_4] , \\
D_1 = 2T^2[H_2+2A_2^*H_3+(A_2^{*2}+2A_3^*)H_4] , \\
E_3 = 2TH_4 , \qquad E_2 = 2T[H_3+2A_2^*H_4] , \\
E_1 = 2T[H_2+2A_2^*H_3+3A_3^*H_4] , \qquad E_0 = T[A_2^*H_2+2A_3^*H_3+3A_4^*H_4] , \\
a_1^* = T , \qquad P = \min_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} [D_1\cos x+D_2\cos 2x+D_3\cos 3x] ,
\end{gathered} \tag{5.3}$$

(v. [4]).

Nous étudierons maintenant l'équation (5.2) des fonctions extrémales par rapport aux fonctionnelles de la forme (5.1), pour lesquelles le coefficient D_2 de la fonction $M(w)$ est nul.

Cette dernière condition est vérifiée lorsque la fonction $H(x_2, x_3, x_4)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial H}{\partial x_3}+3x_2\frac{\partial H}{\partial x_4} = 0 ,$$

c'est-à-dire si

$$H(x_2, x_3, x_4) = G_1(x_4-3x_2x_3)+G_2(x_2) .$$

où $G_1(u)$ et $G_2(v)$ sont des fonctions quelconques différentiables. Posons $G_1(u) = u$. Alors

$$H(x_2, x_3, x_4) = x_4 - 3x_3x_2 + G_2(x_2)\,, \tag{5.4}$$

d'où

$$H_2 = -3A_3^* + G_2'(A_2^*)\,, \qquad H_3 = -3A_2^*, \qquad H_4 = 1\,.$$

On déduit donc des formules (5.3)

$$\begin{gathered} D_3 = 2T^4, \quad D_2 = 0 \quad D_1 = 2T^2[-A_3^* - 5A_2^{*2} + G_2'(A_2^*)]\,, \\ E_3 = 2T\,, \quad E_2 = -2TA_2^*, \quad E_1 = 2T[-6A_2^{*2} + G_2'(A_2^*)]\,, \\ 2E_0 = 2T[3A_4^* - 9A_2^*A_3^* + A_2^*G_2'(A_2^*)]\,, \\ P = 2T^4 \min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} u(x)\,, \end{gathered} \tag{5.5}$$

où

$$u(x) = \cos 3x + u\cos x\,, \tag{5.6}$$

$$u = T^{-2}[-A_3^* - 5A_2^{*2} + G_2'(A_2^*)]\,. \tag{5.7}$$

Nous allons déterminer les minima de la fonction $u(x)$. Comme $u'(x) = \sin x[12\sin^2 x - u - 9]$, la fonction (5.6) peut admettre des extrèmes seulement aux points où $\sin x = 0$ ou bien $\sin^2 x = \frac{1}{12}(u+9)$. Mais $u''(x) = \cos x[-36\cos^2 x + 27 - u]$, $u'''(x) = \sin x[-108\sin^2 x + 81 + u]$, $u^{(4)}(x) = \cos x[324\cos^2 x - 243 + u]$, donc $u(x)$ admet un minimum au point $x_1 = \pi$ si $u''(\pi) = u + 9 > 0$, c'est-à-dire si $u > -9$, tandis qu'elle l'admet au point $x_2 = 0$ si $u \leqslant -9$. Si $\sin^2 x_i = \frac{1}{12}(u+9)$, $i = 3, 4$, on a nécessairement $-9 \leqslant u \leqslant 3$. Mais alors $u''(x_i) = 2(u+9)\cos x_i$, donc la fonction (5.6) admet un minimum au point x_3, $\cos x_3 = \sqrt{(3-u)/12}$ si $-9 \leqslant u < 3$.

Nous avons donc

$$u_{\min} = \begin{cases} u(0) = u + 1 & \text{si} \quad u \leqslant -9\,, \\ u(x_3) = -\frac{1}{3}\sqrt{(3-u)/3}\,(3-u) & \\ \qquad\qquad \text{si} \quad -9 \leqslant u < 3\,, \text{ où } \cos x_3 = \sqrt{(3-u)/12}\,, & \\ u(\pi) = -u - 1 & \text{si} \quad u > -9\,. \end{cases} \tag{5.8}$$

Pour déterminer la valeur de P il faudra trouver les minima absolus de la fonction $u(x)$. Pour $u \leqslant -9$ et $u \geqslant 3$ la fonction $u(x)$ atteint son minimum respectivement aux points $x = 0$ et $x = \pi$. Pour $-9 < u < 3$ il existe deux minima locaux aux points $x = \pi$ et $x = x_3$. Comme $u(\pi) \leqslant u(x_3)$ pour $u \geqslant 0$, on a, en tenant compte de (5.5) et (5.8),

$$P = \begin{cases} 2T^4(u+1) & \text{si} \quad u < -9\,, \\ -2T^4\big((3-u)/3\big)^{3/2} & \text{si} \quad -9 \leqslant u \leqslant 0\,, \\ -2T^4(u+1) & \text{si} \quad 0 < u\,. \end{cases} \tag{5.9}$$

Admettons maintenant que la fonction $G_2(v)$, qui intervient dans (5.4), satisfait à la condition $u > 0$ pour toute fonction extrémale par rapport à la fonctionnelle définie à partir de (5.4). Une telle fonction $G_2(v)$ existe, puisque pour toute fonction de la famille R_T on a la limitation

$$A_3+5A_2^2 \leqslant 13-18T+5T^2 < 13\,, \qquad 0 < T < 1\,,$$

(v. [8], théorème 1). Il suffit donc, en tenant compte de (5.7), de prendre pour $G_2(v)$ une fonction quelconque différentiable et admettant une dérivée aupérieure à 13 dans l'intervalle $(-2, 2)$.

Alors on tire de (5.9) $P = -2T^4(u+1)$ et les formules (5.3) prennent, d'après (5.5) et (5.7), la forme suivante:

$$M(w) = 2T^4w^{-3}[w^6+uw^4+2(u+1)w^3+uw^2+1]\,, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} N(z) = 2Tz^{-3}\big[z^6-A_2^*z^5+\big(G_2'(A_2^*)-6A_2^{*2}\big)z^4+ \\ +\big(3A_4^*-9A_2^*A_3^*+A_2^*G_2'(A_2^*)+2T^3u+2T^3\big)z^3+ \\ +\big(G_2'(A_2^*)-6A_2^{*2}\big)z^2-A_2^*z+1\big]\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

La fonction (5.10) peut être mise sous la forme

$$M(w) = 2T^4w^{-3}(w+1)^2[w^2-(1-i\sqrt{u})w+1][w^2-(1+i\sqrt{u})w+1]\,, \tag{5.12}$$

donc $M(w)$ admet dans le cercle $|w| < 1$ exactement duex racines complexes conjuguées.

En vertu des propriétés générales de la fonction $N(z)$ (v. [4]), celle-ci a sur la circonférence $|z| = 1$ au moins une racine double, elle est non négative sur cette circonférence et si z_1 en est une racine, les nombres $\bar{z}_1, 1/z_1, 1/\bar{z}_1$ le sont aussi.

Dans notre cas, la fonction $M(w)$ admet dans le cercle $|w| < 1$ deux racines complexes (conjuguées) distinctes, donc la fonction $N(z)$ a toutes ses racines sur la circonférence $|z| = 1$ ou bien une racine réelle double sur le cercle unité et 4 racines complexes, dont deux dans le cercle $|z| < 1$. Ces racines sont conjuguées. Par conséquent

$$N(z) = 2Tz^{-3}(z-\varepsilon)^2(z-pe^{ix})\left(z-\frac{1}{p}e^{-ix}\right)(z-pe^{-ix})\left(z-\frac{1}{p}e^{ix}\right), \tag{5.13}$$

où

$$\varepsilon = \mp 1\,, \quad p = 1\,, \quad x \text{ réel quelconque}\,,$$

ou bien

$$\varepsilon = \mp 1\,, \quad 0 < p < 1\,, \quad x \neq k\pi \;\; (k = 0, 1, \ldots)\,.$$

Comme $N(e^{iy}) \geqslant 0$ lorsque $\operatorname{im} y = 0$, on a, en vertu de (5.13)

$$N(e^{iy}) = 4T(\cos y-\varepsilon)\big[\big(2\cos y-(p+p^{-1})\cos x\big)^2+(p-p^{-1})^2\sin^2 x\big] \geqslant 0\,,$$

d'où $\varepsilon = -1$. En égalant ensuite les coefficients des mêmes puissances de z dans (5.11) et (5.13) on obtient

$$\begin{aligned} & 2-2(p+p^{-1})\cos x = -A_2^*, \\ (5.14)\qquad & 3+p^2+p^{-2}+2\cos 2x-4(p+p^{-1})\cos x = G_2'(A_2^*)-6A_2^{*2}, \\ & 2[2+p^2+p^{-2}+2\cos 2x-2(p+p^{-1})\cos x] \\ & \qquad = 3A_4^*-9A_2^*A_3^*+A_2^*G_2'(A_2^*)+2T^3(u+1)\,. \end{aligned}$$

Éliminant de ce système p et $\cos x$, on trouve

$$(5.15)\qquad A_4^*-3A_3^*A_2^*+G_2(A_2^*) = \tfrac{1}{3}[(2-2T-A_2^*)G_2'(A_2^*)+ \\ +3G_2(A_2^*)+2TA_3^*+10TA_2^{*2}-12A_2^{*2}+2A_2^*+2-2T^3]\,.$$

Nous imposerons maintenant à la fonction $G_2(v)$ la restriction suivante: admettons que dans l'intervalle $(-2, 2)$ on a

$$G_2'(v) > 27\,.$$

Comme $-2 < A_2 < 2$, l'expression

$$\Delta = G_2'(A_2^*)-\tfrac{25}{4}A_2^{*2}+A_2^*$$

est positive. Éliminant x dans les deux premières équations du système (5.14) et tenant compte de la condition $\Delta > 0$, on constate que $p \neq 1$. De plus, $N(z)$ prendra la forme

$$(5.16)\qquad N(z) \\ = 2Tz^{-3}(z+1)^2[z^2-(1+\tfrac{1}{2}A_2^*-i\sqrt{\Delta})z+1][z^2-(1+\tfrac{1}{2}A_2^*+i\sqrt{\Delta})z+1]\,.$$

Des relations (5.2), (5.12), (5.15) et (5.16) on obtient donc finalement le

LEMME 6. *Soit $G_2(v)$ une fonctions quelconque différentiable dans l'intervalle $(-2, 2)$, satisfaisant en tout point de cet intervalle à la condition*

$$(5.17)\qquad G_2'(v) > 27\,.$$

Alors toute fonction $w = f^*(z)$ de la famille R_T, pour laquelle la fonctionnelle

$$H_f = A_{4f}-3A_{3f}A_{2f}+G_2(A_{2f})$$

atteint son maximum, satisfait à l'équation

$$(5.18)\qquad T^3w'^2w^{-5}(w+1)^2[w^2-(1-i\sqrt{u})w+1][w^2-(1+i\sqrt{u})w+1] \\ = z^{-5}(z+1)^2[z^2-(1+\tfrac{1}{2}A_2^*-i\sqrt{\Delta})z+1][z^2-(1+\tfrac{1}{2}A_2^*+i\sqrt{\Delta})z+1]$$

où

$$u = [-A_3^*-5A_2^{*2}+G_2'(A_2^*)]T^{-2}, \qquad \Delta = G_2'(A_2^*)-\tfrac{25}{4}A_2^{*2}+A_2^*\,.$$

De plus, on a

$$(5.19)\qquad H_{f^*} = \tfrac{1}{3}[(2-2T-A_2^*)G_2'(A_2^*)+3G_2(A_2^*)+2TA_3^*+ \\ +10TA_2^{*2}-12A_2^{*2}+2A_2^*+2-2T^3]\,.$$

Nous établirons maintenant le

THÉORÈME 12. *Si a est un nombre quelconque fixé supérieur à 27, alors toute fonction de la famille R_T admet la limitation exacte:*

(5.20) $$A_4 - 3A_2A_3 + aA_2 \leqslant 16T^3 - 48T^2 + 46T - 14 + 2a(1-T).$$

La fonction extrémale $w = f^*(z)$ satisfait à l'équation

(5.21) $$\frac{w}{(1-w)^2} = \frac{Tz}{(1-z)^2}.$$

Démonstration. Remarquons que la fonction $G_2(v) = av$ satisfait pour $a > 27$ à la condition (5.17), donc, en vertu du lemme 6, on tire de la formule (5.19) l'inégalité

(5.22) $$\begin{aligned} A_4 - 3A_2A_3 + aA_2 & \\ &\leqslant \tfrac{1}{3}[(2-2T-A_2^*)a + 3aA_2^* + 2TA_3^* + 10TA_2^{*2} - 12A_2^{*2} + 2A_2^* + 2 - 2T^3] \\ &= \tfrac{2}{3}[T(A_3^* + aA_2^*) + (5T-6)A_2^{*2} + (1+a-Ta)A_2^* + a + 1 - Ta - T^3]. \end{aligned}$$

Dans un travail précédent [8] j'ai démontré que dans la famille R_T on a la limitation

(5.23) $$A_3 + aA_2 \leqslant 5T^{-2} - 2(4+a)T + 3 + 2a \qquad \text{pour} \qquad a \geqslant 4,$$

et que la fonction extrémale est la fonction de Koebe définie par la formule (5.21).

Nous allons prouver que la fonctionnelle

$$(5T-6)A_2^2 + (1+a-Ta)A_2$$

atteint son maximum aussi pour la fonction de Koebe, c'est-à-dire lorsque $A_2 = 2(1-T)$. En effet, soit

$$v(x) = (5T-6)x^2 + (1+a-Ta)x, \qquad -2(1-T) \leqslant x \leqslant 2(1-T).$$

Alors $v'(x_0) = 0$ lorsque $x_0 = -\dfrac{1+a(1-T)}{2(5T-6)}$. Comme pour tout $a > 27$ et $0 < T < 1$ on a $x_0 > 2(1-T)$, $v(x)$ est une fonction croissante, donc

$$v_{\max} = v[2(1-T)].$$

On a donc

(5.24) $$\begin{aligned} (5T-6)A_2^2 + (1+a-Ta)A_2 & \\ &\leqslant 4(5T-6)(1-T)^2 + 2(1+a-Ta)(1-T). \end{aligned}$$

La limitation (5.20) résulte directement des inégalités (5.22)-(5.24). L'égalité est réalisée pour la fonction (5.21), car on a pour elle $A_2 = 2(1-T)$, $A_3 = 3 - 8T + 5T^2$, $A_4 = 4 - 20T + 30T^2 - 14T^3$. On vérifie sans peine que la fonction (5.21) satisfait à l'équation (5.18).

Du théorème 12 résulte immédiatement le

THÉORÈME 13. *Toute fonction de la famille R_M admet pour $a > 27$ la limitation exacte suivante:*

$$A_4 - 3A_2A_3 + aA_2 \leqslant 2a - 14 + (46-2a)M^{-1} - 48M^{-2} + 16M^{-3}.$$

Si la fonction $F(z) \in R_\infty$, on a

$$A_4 - 3A_2A_3 + aA_2 \leqslant 2(a-7) .$$

Il semble intéressant de noter que dans tous les cas des fonctionnelles dépendant d'un paramètre réel a que nous avons étudiés ici la fonction extrémale est la fonction de Koebe, si a est un nombre suffisamment grand.

Travaux cités

[1] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne 2, Warszawa 1953.

[2] — and M. Schiffer, *A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficients*, Arch. Ration. Mech. Anal., California 5 (3) (1960), p. 187-193.

[3] J. Dieudonné, *Sur les fonctions univalentes*, C. R. 192 (1931), p. 1148-1150.

[4] I. Dziubiński, *L'équation des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes symétriques et bornées*, ŁTN, Societas Scientiarum Lodziensis, Wydz. III, 65 (1960).

[5] P. R. Garabedian and M. Schiffer, *A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, J. Rational Mech. Anal. 4 (1955), p. 427-465.

[6] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва 1952.

[7] R. Guzek, *O współczynnikach funkcji jednolistnych k-symetrycznych*, Zeszyty Naukowe UŁ, Seria II, 20 (1966), p. 147-160.

[8] Z. J. Jakubowski, *Maksimum funkcjonału $A_3 + aA_2$ w rodzinie funkcji jednolistnych o współczynnikach rzeczywistych*, Zeszyty Naukowe UŁ, Seria II, 20 (1966), p. 43-61.

[9] — *Le maximum d'une fonctionnelle dans la famille des fonctions univalentes bornées*, Colloq. Math. 7 (1959), p. 127-128.

[10] — *Sur le maximum de la fonctionnele $|A_3 - aA_2^2|$ $(0 \leqslant a < 1)$ dans la famille des fonctions F_M*, Bull. Soc. Sci. Lett. 13 (1) (1962), p. 1-19.

[11] — *O oszacowaniu współczynnika B_4 w rodzinie funkcji jednolistnych, ograniczonych o współczynnikach rzeczywistych*, Zeszyty Naukowe PŁ, Chemia 9 (1961) p. 55-71.

[12] W. Janowski, *Sur la borne supérieure d'une fonctionnelle dans la famille des fonctions univalentes bornées*, Bull. Soc. Sci. Lett. 13 (6) (1962), p. 1-10.

[13] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitzkreises*, Math. Ann. 89 (1923), p. 103-121.

[44] M. Schiffer and O. Tamni, *The fourth coefficient of a bounded real univalent function*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 354 (1965).

[15] V. Singh, *Grunsky inequalities and coefficients of bounded schlicht functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, 310 (1962).

[16] R. Zawadzki, *Sur le module des coefficients B_0 et B_1 des fonctions holomorphes univalentes, bornées inférieurement*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź 12 (5) (1961), p. 1-9.

Reçu par la Rédaction le 12. 7. 1966