ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Об одном вопросе П. Эрдеша

С. А. Теляковский (Москва)

Пусть

$$f_n(\vartheta) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta)$$

тригонометрический полином с вещественными коэффициентами и

$$M = \max_{\vartheta} |f_n(\vartheta)|.$$

Равенство Парсеваля дает оценку

$$M \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \Big)^{1/2}.$$

В недавно вышедшей статье [1] П. Эрдеш высказал предположение о существовании абсолютной постоянной $c > 0$ такой, что

$$M \geqslant \frac{1+c}{\sqrt{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \Big)^{1/2}. \tag{1}$$

Мы покажем, что *наилучшее значение константы в неравенстве* (1) *равно* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и, таким образом, эта гипотеза не оправдывается.

Пусть $c > 0$ — некоторая постоянная. Рассмотрим периодическую функцию $F(\vartheta)$, определяемую равенствами

$$F(\vartheta) = \begin{cases} 1 & \text{при } a \leqslant \vartheta \leqslant \pi - a, \\ -1 & \text{при } -\pi + a \leqslant \vartheta \leqslant -a, \\ \text{линейна в оставшихся интервалах,} & \end{cases}$$

где $0 < a < \pi/2$ — некоторая величина, которую мы выберем позднее.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\vartheta$ — ряд Фурье функции $F(\vartheta)$. Тогда, согласно равенству Парсеваля,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^2(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} F^2(\vartheta)\, d\vartheta > \frac{2}{\pi} (\pi - 2a) = 2\Big(1 - \frac{2a}{\pi}\Big). \tag{2}$$

Выберем a настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$1-\frac{2a}{\pi} > \frac{1}{1+c}. \tag{3}$$

Выберем теперь n настолько большим, чтобы выполнялись оценки

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^{1/2} > \frac{1}{\sqrt{1+c}} \tag{4}$$

и

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\vartheta\Big| < \sqrt{1+c}. \tag{5}$$

Такой выбор возможен, так как согласно (2) и (3),

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 > \frac{2}{1+c},$$

и функция $F(\vartheta)$ удовлетворяег условию Липшица, значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\vartheta$ равномерно сходится к $F(\vartheta)$.

Для полинома $\sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\vartheta$ неравенство (1) не выполняется. Действительно, в силу (5) и (4)

$$M = \max_{\vartheta}\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\vartheta\Big| < \sqrt{1+c} = \frac{1+c}{\sqrt{1+c}} < \frac{1+c}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^{1/2}.$$

Цитированная литература

[1] P. Erdös, *An inequality for the maximum of trigonometric polynomials*, Ann. Polon. Math. 12 (1962), pp. 151-154.

Reçu par la Rédaction le 2. 2. 1963