ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1964)

Sur les équations algébriques trinômes

par H. Górecki et A. Turowicz (Kraków)

§ 1. Considérons l'équation

$$y = f(x) = x^n + ax + b = 0 \quad (a, b \text{ réels}, \ n \geqslant 3). \tag{1}$$

Pour déterminer le nombre des racines réelles nous emploierons la suite de Sturm, composée de quatre polynômes

$$x^n + ax + b, \quad nx^{n-1} + a, \quad -\frac{n-1}{n}ax - b, \quad -a - (-1)^{n-1}\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Les résultats de la discussion sont contenus dans le tableau suivant:

No	Degré de l'équation	Hypothèses	Nombre des racines réelles
1.	n impair	$a \geqslant 0$	1
2.	n impair	$a < 0$ $\lvert b\rvert < \sqrt[n-1]{-\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \cdot a^n}$	3
3.	n impair	$a < 0$ $\lvert b\rvert > \sqrt[n-1]{-\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \cdot a^n}$	1
4.	n pair	$b < \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} a^n}$	2
5.	n pair	$b > \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} a^n}$	0

Remarque. Le cas où $(n-1)^{n-1}a^n+n^n(-b)^{n-1}=0$, n'est pas compris dans le tableau; il y a alors une racine multiple.

Dans la suite de la présente note nous donnerons une formule pour calculer les racines dans les cas 2 et 4 du tableau.

Nous désignerons par α la racine réelle de l'équation

$$f'(x)=nx^{n-1}+a=0\,. \tag{2}$$

Dans le cas 2 l'équation (2) a deux racines réelles, et alors on prend pour α la valeur positive.

Nous envisagerons la fonction inverse de $f(x)$ dans le cas 2 dans l'intervalle $(-\alpha,\alpha)$ et dans le cas 4 dans l'intervalle $(\alpha,+\infty)$ si $a<0$, éventuellement dans l'intervalle $(-\infty,\alpha)$ si $a>0$. Ce sera donc toujours l'intervalle contenant le point $x=0$. L'intervalle en question sera désigné par I. La fonction inverse de $f(x)$ dans l'intervalle I sera notée

$$x=g(y)\,. \tag{3}$$

Prenons le développement de $g(y)$ en série de Taylor autour du point $y=b$; on a $g(b)=0$ et

$$g(y)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(y-b)^s}{s!}\,g^{(s)}(b)\,. \tag{4}$$

L'intervalle I contient une seule racine de l'équation (1), qu'on peut calculer en mettant $y=0$ dans la formule (4):

$$x_1=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-b)^s}{s!}\,g^{(s)}(b)\,. \tag{5}$$

La convergence de la série (5) sera démontrée dans la suite. La dérivée $g^{(s)}(b)$ de la fonction inverse est donnée par la formule (cf. [1]):

$$g^{(s)}(b)=\sum_{Z_s}\frac{(-1)^{s-1+i_1}(2s-2-i_1)!}{i_2!\,i_3!\dots i_s!\,(y_0')^{2s-1}}\left(\frac{y_0'}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{y_0''}{2!}\right)^{i_2}\dots\left(\frac{y^{(s)}}{s!}\right)^{i_s} \tag{6}$$

où $y_0^{(k)}=f^{(k)}(0)$ et Z_s est l'ensemble des suites finies de nombres entiers non négatifs $(i_1,i_2,\dots,i_s)$ satisfaisant aux conditions

$$\sum_{k=2}^{s}(k-1)i_k=s-1\,,\qquad i_1=s-1-\sum_{k=2}^{s}i_k\,. \tag{7}$$

Comme $y_0^{(k)}=0$ pour tout $k\geqslant 2$ excepté $k=n$, tous les termes de la somme (6) seront nuls à l'exception du cas où

$$i_2=i_3=\dots i_{n-1}=i_{n+1}=\dots=0\,. \tag{8}$$

En raison de (8) les conditions (7) prennent la forme

$$(n-1)i_n = s-1\,, \quad i_1 = s-1-i_n\,. \tag{9}$$

Le système d'équations (9) admet une solution pour des valeurs convenables de s. Soit $i_n = \nu$ la solution de (9); alors

$$s = (n-1)\nu+1\,, \quad i_1 = (n-2)\nu\,. \tag{10}$$

En vertu de (10) la formule (6) prend la forme simple

$$g^{(s)}(b) = g^{[(n-1)\nu+1]}(b) = \frac{(-1)^\nu (n\nu)!}{\nu!\,(y_0')^{n\nu+1}}\,. \tag{11}$$

En substituant (11) dans la formule (5)

$$x_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{n\nu+1} \frac{(n\nu)!}{\nu![(n-1)\nu+1]!} \cdot \frac{b^{(n-1)\nu+1}}{(y_0')^{n\nu+1}}\,. \tag{12}$$

Comme $y_0' = a$, on a

$$x_1 = -\frac{b}{a}\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{n\nu} \binom{n\nu}{\nu} \frac{1}{(n-1)\nu+1} \left(\frac{b^{n-1}}{a^n}\right)^\nu. \tag{13}$$

Nous désignerons

$$\frac{x_1 a}{b} = p_1\,, \tag{14}$$

$$\frac{b^{n-1}}{a^n} = q\,. \tag{15}$$

Alors

$$p_1 = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n\nu}{\nu} \frac{(-1)^{n\nu}}{(n-1)\nu+1} q^\nu\,. \tag{16}$$

§ 2. Nous démontrerons maintenant la convergence de (16). D'après la formule de Stirling

$$k! = \sqrt{2k\pi}\, k^k \cdot e^{-k}(1+a_k) \tag{17}$$

où $a_k \to 0$ pour $k \to \infty$, on trouve

$$\binom{n\nu}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\right)^\nu (1+\beta_\nu) \tag{18}$$

où $\beta_\nu \to 0$ pour $\nu \to \infty$. En vertu du critère logarithmique de convergence, la condition suffisante de convergence de la série (16) est

$$(19)\qquad \limsup_{\nu\to\infty} (\ln\nu)^{-1} \ln\left[\binom{n\nu}{\nu}|q|^\nu (n\nu-\nu+1)^{-1}\right] < -1 .$$

En raison de (18), cette condition prend la forme

$$(20)\qquad \limsup_{\nu\to\infty} \frac{1}{\ln\nu}\Big[-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\nu + \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(n-1) + n\nu\ln n -$$
$$-(n-1)\nu\ln(n-1) + \ln(1+\beta_\nu) + \nu\ln|q| - \ln\big((n-1)\nu+1\big)\Big]$$
$$= -\frac{3}{2} + \limsup_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{\ln\nu} \ln\frac{n^n|q|}{(n-1)^{n-1}} < -1 .$$

On satisfait à l'inégalité (20) en supposant que $n^n|q|/(n-1)^{n-1} \leqslant 1$ où

$$(21)\qquad |q| \leqslant \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} .$$

On voit que dans les cas 2 et 4 du tableau, la condition (21) est évidemment vérifiée.

La condition (21) n'étant pas nécessaire, il est possible que la série (16) soit convergente dans les cas 1 et 3 du tableau, mais elle diverge dans ces cas, si $|q|$ est suffisamment grand.

§ 3. Posons

$$(22)\qquad q_k = (-1)^n \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} .$$

Pour $q = q_k$ l'équation (1) a une racine multiple (cf. la remarque au bas du tableau). On tire des équations (1) et (2) la valeur de cette racine

$$x_{1k} = -\frac{n}{n-1}\cdot\frac{b}{a}$$

et par conséquent

$$(23)\qquad p_{1k} = -\frac{n}{n-1} .$$

En éliminant des relations (22) et (23) la valeur n, on trouve l'équation de „l'ensemble des points de frontière" dans le plan (p, q)

$$(24)\qquad q_k = (-1)^{(p_{1k}-1)/(p_{1k}+1)}(p_{1_k}+1)p_{1k}^{-p_{1k}/(p_{1k}+1)}$$

où les valeurs de p_{1k} sont données par (23) pour n entiers, $n \geqslant 2$. En vertu de (16), (22) et (23) on a une identité intéressante, valable pour tout n entier positif

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n\nu}{\nu} \left[\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\right]^{\nu} \frac{1}{(n-1)\nu+1} = \frac{n}{n-1}. \tag{25}$$

§ 4. Les résultats de cette note sont une généralisation du théorème I de notre travail [2]. Ils complètent les résultats de Mellin (cf. [3], p. 40, formule (13)). L'équation envisagée par Mellin était

$$z^n + tz^p - 1 = 0\,, \quad 1 \leqslant p < n\,. \tag{26}$$

La racine était donnée par un développement en série de puissances de t, convergente pour

$$|t| < \frac{n}{\sqrt[n]{p^n(n-p)^{n-p}}}\,. \tag{27}$$

Pour réduire l'équation (1) à la forme (26) il faut mettre

$$p = 1\,, \quad x = z\sqrt[n]{-b}\,.$$

On a

$$t = \frac{a}{(-b)^{(n-1)/n}}\,.$$

La condition (27) se réduit à

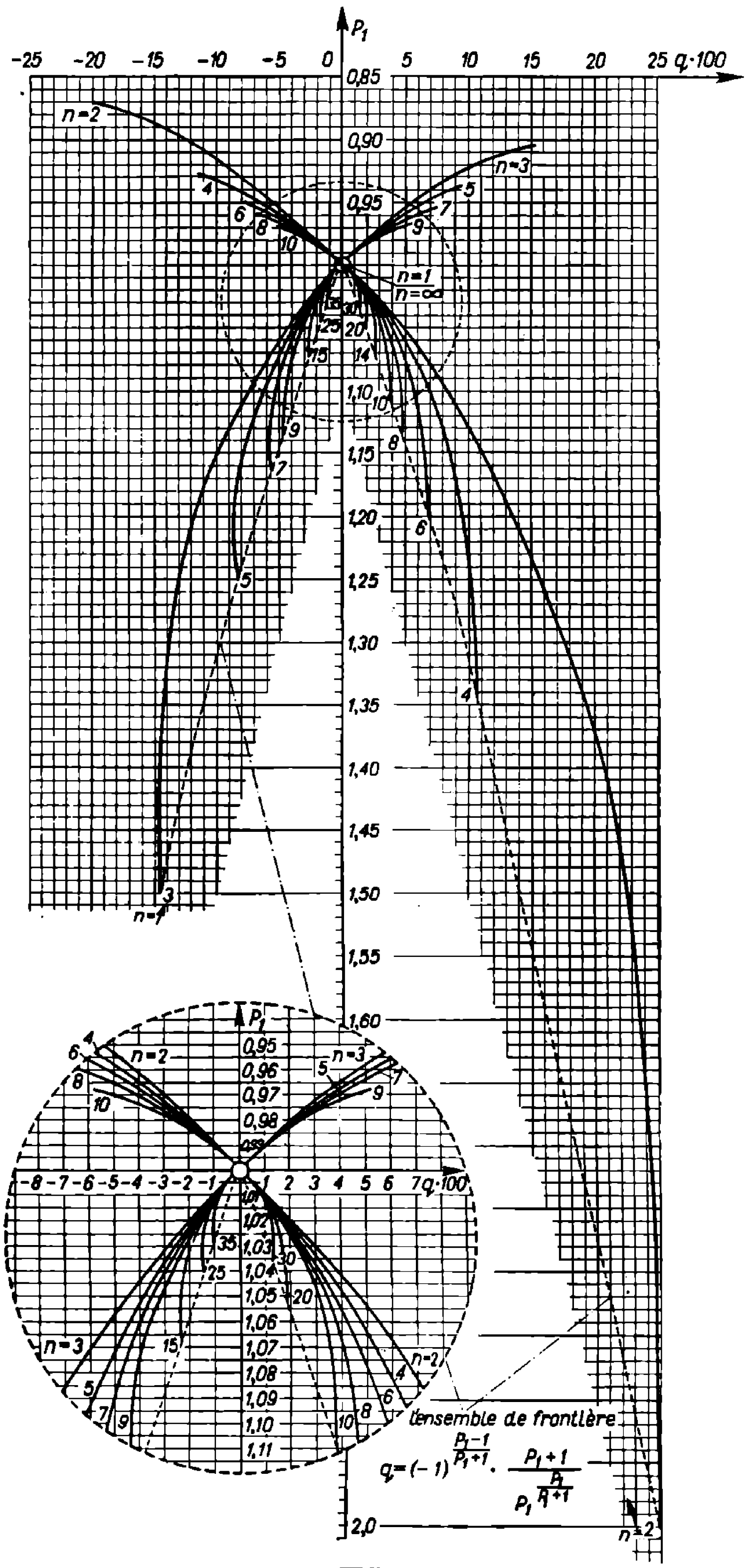
$$\left|\frac{a^n}{b^{n-1}}\right| < \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$$

c'est-à-dire

$$|q| > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\,. \tag{28}$$

En rapprochant cette inégalité de (21), on voit que les conditions de convergence de la série (16) et de la formule de Mellin sont incompatibles.

§ 5. Le nomogramme donne les graphes des courbes (16) pour les valeurs $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 20, 25, 30, 35$ (lignes continues), et „l'ensemble de frontière" (24) (ligne interrompue). La partie du nomogramme voisine du point d'intersection des courbes a été agrandie et placée au bas de la figure. Les graphes permettent de trouver la valeur d'une racine réelle de l'équation trinôme, pour les valeurs énumérées de n. En cotant sur l'ensemble de frontière les valeurs de n calculées moyennant (23), on pourrait facilement trouver la racine pour des autres valeurs de n.



l'ensemble des courbes $\boxed{P_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n\nu}{\nu} \frac{(-1)^{n\nu} \cdot q^{\nu}}{(n-1)\nu+1}}$

Les calculs nécessaires pour la construction du nomogramme ont été effectués au Centre du Calcul de Cracovie. Nous en remercions le Directeur, M. T. Kochmański. Notre reconnaissance va aussi à M. L. Staroń qui a bien voulu soigneusement tracer le nomogramme.

Travaux cités

[1] A. Turowicz, *Sur les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse* Colloq. Math. 7 (1959), pp. 83-87.

[2] H. Górecki et A. Turowicz, *Sur la résolution des équations algébriques par la méthode de Euler,* Ann Polon. Math. 12 (1962), pp. 185-190.

[3] G. Belardinelli, *Fonctions hypergéométriques de plusieur variables et résolution anatytiques des équations algébriques générales,* Mémorial Sc. Math., 145, Paris 1960.

Reçu par la Rédaction le 27. 12. 1961