

Sur la dépendance continue des solutions des équations différentielles ordinaires de leurs seconds membres et des conditions aux limites

par A. LASOTA et Z. OPIAL (Kraków)

Introduction

0.1. Le problème de Cauchy pour le système d'équations différentielles ordinaires

$$(0.1) \quad x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (a \leq t \leq d; i = 1, \dots, n)$$

c'est-à-dire le problème qui consiste à chercher des solutions $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ du système (0.1) satisfaisant aux conditions initiales

$$(0.2) \quad x_i(t_0) = r_i \quad (a \leq t_0 \leq d; i = 1, \dots, n)$$

jouit, dans l'hypothèse que les fonctions $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ sont suffisamment régulières, de trois propriétés suivantes: 1° la solution cherchée existe, 2° elle est unique, 3° elle dépend de façon continue des fonctions f_i et des constantes t_0, r_i intervenant dans les conditions (0.2). Par l'analogie à la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles on peut donc dire que pour le système (0.1) le problème de Cauchy est bien posé.

Pour les problèmes aux limites généraux la question de l'existence et de l'unicité des solutions du système (0.1) est beaucoup plus difficile — les recherches systématiques sur ce sujet n'ont commencé que dans les temps assez récents. Avant tout il faut mentionner ici les travaux de R. Conti ([2], [3], [4]) à qui on doit l'exhibition de la structure générale des problèmes linéaires aux limites et une série de théorèmes sur l'existence des solutions pour les systèmes dont les seconds membres satisfont aux conditions de Carathéodory.

Dans la présente note nous admettons que les seconds membres du système (0.1) sont continus et continûment différentiables jusqu'à un certain ordre $k-1$. On rétrécit évidemment de cette façon l'ensemble de systèmes admissibles, mais en même temps on enrichit l'ensemble de conditions aux limites parce que l'on peut les poser non seulement pour les solutions, mais aussi pour leurs dérivées jusqu'à l'ordre k . Il se trouve

que de tels problèmes peuvent être aussi bien posés, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ l'équation différentielle

$$(0.3) \quad x' = 2x + b(t)$$

et la condition aux limites

$$(0.4) \quad x^{(p)}(0) - x(1)/e^2 = 0,$$

e étant la base des logarithmes népériens. On vérifie facilement que pour tout entier positif p il existe (dans l'hypothèse que la fonction $b(t)$ est suffisamment régulière) une et une seule solution $x(t)$ du problème (0.3), (0.4) donnée par la formule

$$x(t) = \frac{e^{2t}}{2^p - 1} \left(\int_0^1 e^{-2s} b(s) ds - \sum_{i=1}^p 2^{p-i} b^{(i-1)}(0) \right) + \int_0^t e^{2(t-s)} b(s) ds.$$

Il en vient que cette solution dépend de façon continue de la fonction $b(t)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$. Cependant, dans le cas le plus simple, pour $p=0$, le problème envisagé n'a pas en général de solution et s'il en admet une, il en a une infinité. Ceci a lieu si et seulement si l'on a

$$\int_0^1 e^{2(1-s)} b(s) ds = 0$$

et alors toutes les solutions de l'équation (0.3) qui sont de la forme

$$x(t) = Ce^{2t} + \int_0^t e^{2(t-s)} b(s) ds$$

satisfont, quelle que soit la constante C , à la condition (0.4).

0.2. Si les fonctions $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) sont de classe C^{k-1} , la solution générale du système (0.1) est donnée par une famille à n paramètres réels de suites

$$(x_1(t), \dots, x_n(t)) = (x_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, x_n(t, c_1, \dots, c_n))$$

de fonctions de classe C^k . Il est donc naturel de se borner à de telles conditions aux limites qui se ramènent à un système de n équations implicites par rapport aux variables c_1, \dots, c_n . Ces conditions peuvent alors s'écrire dans la forme

$$L_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) = r_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

où les L_i sont des fonctionnelles définies dans l'espace de suites $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ de fonctions de classe C^k dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$.

0.3. Nous allons commencer notre étude sur l'existence, l'unicité et la dépendance continue des solutions des problèmes aux limites par un rappel succinct de quelques propriétés bien simples des solutions des problèmes linéaires. Puis, en passant aux problèmes non-linéaires généraux, nous allons établir un théorème fondamental de l'existence, de l'unicité et de la dépendance continue des solutions des seconds membres et des conditions aux limites. Une troisième partie du présent travail sera consacrée à l'extension de ces résultats aux équations d'ordres supérieurs et à l'exposé d'une suite de leurs diverses applications, entre autres à la théorie des solutions périodiques et à celle des solutions du problème d'interpolation. Enfin, dans une quatrième partie nous essayerons d'étendre les résultats obtenus aux systèmes d'équations aux seconds membres moins réguliers (systèmes d'équations aux sens de Carathéodory).

Problèmes linéaires

1.1. Considérons le système de n équations différentielles linéaires

$$(1.1) \quad x' = A(t)x + b(t)$$

où la matrice carrée $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ et le vecteur $b(t) = \{b_i(t)\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) sont définis et continûment différentiables jusqu'à l'ordre $k-1$ dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$. Dans ces hypothèses toute solution $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ du système (1.1) est continûment différentiable jusqu'à l'ordre k , c'est-à-dire l'élément de l'espace $(C^k)^n$ de toutes les suites $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ de fonctions de classe C^k dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$. Nous munissons l'espace $(C^k)^n$ de la norme

$$\|x(t)\|_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \|x^{(j)}(t)\|_0$$

où

$$\|x(t)\|_0 = \sum_{i=1}^n \max_{\langle a, d \rangle} |x_i(t)|.$$

De même, pour une matrice carrée $X(t)$ dont les lignes appartiennent toutes à $(C^k)^n$ on pose $\|X(t)\|_k$ pour désigner la somme de normes de ses lignes. On vérifie facilement que

$$\|x(t)\|_k \leq \|x(t)\|_0 + \|x'(t)\|_{k-1}$$

et

$$\|x(t)y(t)\|_k \leq \|x(t)\|_k \|y(t)\|_k, \quad \|X(t)x(t)\|_k \leq \|X(t)\|_k \|x(t)\|_k$$

ce qui signifie que la norme considérée munit l'espace $(C^k)^n$ de la structure de l'algèbre de Banach.

Pour le système (1.1) on envisage le problème aux limites

$$(1.2) \quad Lx = r$$

où L désigne une application linéaire continue de l'espace $(C^k)^n$ dans l'espace cartésien R^n et r est un vecteur arbitraire de R^n . Le problème linéaire homogène associé au problème (1.1), (1.2) a la forme

$$(1.3) \quad x' = A(t)x,$$

$$(1.4) \quad Lx = 0.$$

1.2. THÉOREME 1. *Pour que le problème (1.1), (1.2) admette, quels que soient $b(t) \in (C^{k-1})^n$ et $r \in R^n$, une et une solution seule, il faut et il suffit que le problème linéaire homogène associé (1.3), (1.4) n'admette que la solution identiquement nulle.*

La démonstration est bien simple. La solution générale du système (1.1) s'écrit dans la forme

$$(1.5) \quad x(t) = V(t)c + (Qb)(t)$$

où

$$(Qb)(t) = \int_a^t V(t)V^{-1}(s)b(s)ds,$$

$V(t) = (v^1(t), \dots, v^n(t))$ est la matrice fondamentale des solutions du système (1.3) et c est un élément arbitraire de l'espace R^n . Comme la matrice $V(t)$ est de classe C^k , il est clair que l'opération linéaire Q applique l'espace $(C^{k-1})^n$ dans l'espace $(C^k)^n$ et est continue.

En introduisant (1.5) dans (1.2) on en obtient la condition

$$(1.6) \quad (LV)c = r - L(Qb) \quad (LV = (Lv^1, \dots, Lv^n))$$

c'est-à-dire un système de n équations algébriques linéaires à n inconnus $c = (c_1, \dots, c_n)$. Donc, si la matrice LV est non-singulière, le problème (1.1), (1.2) a une solution et une seule, donnée par la formule

$$(1.7) \quad x(t) = V(t)(LV)^{-1}(r - L(Qb)) + (Qb)(t),$$

et, en particulier, le problème (1.3), (1.4) n'admet que la solution identiquement nulle. Si, au contraire, la matrice LV est singulière, pour $r = 0$ et $b(t) \equiv 0$ le système (1.6) admet une solution non nulle c_0 qui fournit à son tour une solution non identiquement nulle du problème (1.3), (1.4); dans ce cas pour tout $b(t) \in (C^{k-1})^n$ il existe un vecteur $r \in R^n$ tel que les conditions (1.6) ne puissent pas être satisfaites et, par conséquent, le problème (1.1), (1.2) correspondant ne puisse admettre aucune solution.

1.3. La formule

$$(\Gamma b)(t) = (Qb)(t) - V(t)(LV)^{-1}L(Qb)$$

définit une application linéaire Γ de l'espace $(C^{k-1})^n$ dans l'espace $(C^k)^n$. Il est clair que l'application Γ est continue, en tant que la différence de l'application linéaire continue Q et du produit $V(t)LQ$ de Q par l'application linéaire continue L et par la matrice $V(t)$ de classe C^k . De même, la formule

$$H(t) = V(t)(LV)^{-1}$$

introduit une matrice $H(t)$ qui, en tant que le produit d'une matrice constante $(LV)^{-1}$ et de la matrice $V(t)$ de classe C^k , est elle aussi de classe C^k . Ceci permet d'écrire (1.7) sous une forme équivalente

$$(1.8) \quad x = \Gamma b + Hr$$

et d'énoncer le suivant

THÉORÈME 2. *Pour toute matrice $A(t)$ et toute application L telles que le problème (1.3), (1.4) n'admet que la solution identiquement nulle la résolution complète du problème (1.1), (1.2) est donnée par l'application (1.8) qui à chaque élément (r, b) du produit cartésien $R^n \times (C^{k-1})^n$ fait correspondre la solution $x \in (C^k)^n$ de ce problème.*

2. Problèmes non-linéaires

2.1. Soit

$$(2.1) \quad x' = f(t, x, \varepsilon) \quad (a \leq t \leq d)$$

un système d'équations différentielles où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ et $f(t, x, \varepsilon) = (f^1(t, x, \varepsilon), \dots, f^n(t, x, \varepsilon))$. Pour ce système on va considérer les conditions aux limites suivantes

$$(2.2) \quad L_\varepsilon x = r_\varepsilon$$

dépendant elles aussi du paramètre $\varepsilon \in R^m$.

Supposons que $\hat{x}(t) \in (C^k)^n$ soit une solution du problème (2.1), (2.2) correspondant à $\varepsilon = 0$. Nous nous proposons d'établir une condition suffisante pour que pour tout ε suffisamment petit il existe une solution du problème (2.1), (2.2) suffisamment proche de $\hat{x}(t)$.

A cet effet on suppose que les fonctions $f^i(t, \xi, \varepsilon)$ ($i = 1, \dots, n$) de $n + m + 1$ variables $t, \xi_1, \dots, \xi_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ sont toutes définies dans l'ensemble

$$\Omega: a \leq t \leq d, |\xi - \hat{x}(t)| \leq \delta, |\varepsilon| \leq \gamma \quad (|\xi| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|, |\varepsilon| = \sum_{i=1}^m |\varepsilon_i|)$$

et que leurs dérivées jusqu'à l'ordre k par rapport aux variables t, ξ existent et sont continues par rapport aux variables t, ξ, ε . On suppose de plus que pour tout $|\varepsilon| \leq \gamma$ l'application L_ε de l'espace $(C^k)^n$ dans R^n

est linéaire, continue et dépend de façon continue (suivant la norme habituelle dans l'espace d'applications linéaires continues de $(C^k)^n$ dans R^n) du paramètre ε , ce qui signifie que $\varepsilon_\nu \rightarrow \varepsilon_0$ ($|\varepsilon_\nu| \leq \gamma$, $\nu = 0, 1, \dots$) entraîne $L_{\varepsilon_\nu} x \rightarrow L_{\varepsilon_0} x$ uniformément dans la boule $\|x\|_k \leq 1$. Enfin on suppose que pour $|\varepsilon| \leq \gamma$ le vecteur r_ε dépend de façon continue du paramètre ε .

Au problème (2.1), (2.2) on associe le problème linéaire (problème aux variations) suivant

$$(2.3) \quad x' = f_\varepsilon(t, \hat{x}(t), 0)x \quad (a \leq t \leq d),$$

$$(2.4) \quad L_0 x = 0$$

où $f_\varepsilon = \{f_{\varepsilon j}^i\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) est la matrice jacobienne de l'application f .

THÉOREME 3. *Si \hat{x} est la solution du problème (2.1), (2.2) et si le problème aux variations (2.3), (2.4) n'admet que la solution identiquement nulle, il existe des nombres positifs δ_0, γ_0 tels que pour tout $|\varepsilon| \leq \gamma_0$ le problème (2.1), (2.2) admet une solution et une seule $x(t, \varepsilon)$ satisfaisant à l'inégalité*

$$\|x(t, \varepsilon) - \hat{x}(t)\|_0 \leq \delta_0.$$

En plus, la solution $x(t, \varepsilon)$ dépend de façon continue (suivant la norme dans l'espace $(C^k)^n$) du paramètre ε , c'est-à-dire de $\varepsilon_\nu \rightarrow \varepsilon_0$ ($|\varepsilon_\nu| \leq \gamma_0$, $\nu = 0, 1, \dots$) il résulte que

$$\|x(t, \varepsilon_\nu) - x(t, \varepsilon_0)\|_k \rightarrow 0.$$

La démonstration du théorème 3 va être précédée par trois lemmes concernant des propriétés de l'application F de l'ensemble

$$D_{\delta\gamma} = \{(x(t), \varepsilon) \in (C^k)^n \times R^m : \|x(t) - \hat{x}(t)\|_0 \leq \delta, |\varepsilon| \leq \gamma\}$$

de l'espace $(C^k)^n \times R^m$ dans l'espace $(C^k)^n$ définie par la formule

$$F: (x(t), \varepsilon) \rightarrow y(t) = f(t, x(t), \varepsilon).$$

Pour abréger on écrira souvent $y = F(x, \varepsilon)$.

2.2. LEMME 1. *L'application $F: (C^k)^n \times R^m \rightarrow (C^k)^n$ est continue.*

Pour $k = 0$ la démonstration résulte immédiatement de la continuité de f et de la compacité de l'intervalle $\langle a, d \rangle$. Supposons que notre lemme soit valable pour un $k \geq 0$; pour $k+1$ on a alors

$$\begin{aligned} & \|f(t, x(t) + u(t), \varepsilon + \eta) - f(t, x(t), \varepsilon)\|_{k+1} \\ & \leq \|f(t, x + u, \varepsilon + \eta) - f(t, x, \varepsilon)\|_0 + \|f_t(t, x + u, \varepsilon + \eta) - f_t(t, x, \varepsilon)\|_k + \\ & + \|(f_\varepsilon(t, x + u, \varepsilon + \eta) - f_\varepsilon(t, x, \varepsilon))x'(t)\|_k + \|f_\varepsilon(t, x + u, \varepsilon + \eta)u'(t)\|_k \\ & \leq \|f(t, x + u, \varepsilon + \eta) - f(t, x, \varepsilon)\|_0 + \|f_t(t, x + u, \varepsilon + \eta) - f_t(t, x, \varepsilon)\|_k + \\ & + \|f_\varepsilon(t, x + u, \varepsilon + \eta) - f_\varepsilon(t, x, \varepsilon)\|_k \|x'(t)\|_k + \|f_\varepsilon(t, x + u, \varepsilon + \eta)\|_k \|u'(t)\|_k \end{aligned}$$

ce qui fait évident de quelle manière l'hypothèse de récurrence doit être appliquée.

Il est clair que le lemme 1 reste valable aussi dans la cas où $\delta = +\infty$. Pour tout ε fixé F est alors une application continue de l'espace $(C^k)^n$ dans lui même.

2.3. Soit $\mathcal{L}_k^n = \mathcal{L}((C^k)^n, (C^{k-1})^n)$ l'espace de toutes les applications linéaires et continues de $(C^k)^n$ dans $(C^{k-1})^n$, muni de la norme habituelle. A tout point $(x(t), \varepsilon)$ de l'ensemble D_{δ} , associons l'application linéaire de $(C^k)^n$ dans $(C^{k-1})^n$

$$F_x(x, \varepsilon): u(t) \rightarrow v(t) = f_\varepsilon(t, x(t), \varepsilon) u(t)$$

que l'on écrira, pour abréger, sous une forme simplifiée $v = F_x(x, \varepsilon)u$.

LEMME 2. En tout point $(x(t), \varepsilon)$ de l'ensemble D_{δ} , l'application $F_x(x, \varepsilon)$ est la différentielle (au sens de Fréchet) par rapport à x de l'application $F: (C^k)^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow (C^{k-1})^n$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} & \|f(t, x(t) + u(t), \varepsilon) - f(t, x(t), \varepsilon) - f_\varepsilon(t, x(t), \varepsilon) u(t)\|_{k-1} \\ &= \left\| \int_0^1 (f_\varepsilon(t, x(t) + su(t), \varepsilon) - f_\varepsilon(t, x(t), \varepsilon)) u(t) ds \right\|_{k-1} \\ &\leq \|u(t)\|_k \int_0^1 \|f_\varepsilon(t, x(t) + su(t), \varepsilon) - f_\varepsilon(t, x(t), \varepsilon)\|_{k-1} ds \end{aligned}$$

et la démonstration du lemme s'obtient par une simple application du lemme précédent à la fonction matricielle figurant sous le signe de l'intégration.

2.4. LEMME 3. L'application $(x, \varepsilon) \rightarrow F_x(x, \varepsilon)$ de D_{δ} dans \mathcal{L}_k^n est continue.

La démonstration résulte immédiatement de l'inégalité

$$\begin{aligned} & \|(f_\varepsilon(t, x(t) + w(t), \varepsilon + \eta) - f_\varepsilon(t, x(t), \varepsilon)) u(t)\|_{k-1} \\ &\leq \|f_\varepsilon(t, x(t) + w(t), \varepsilon + \eta) - f_\varepsilon(t, x(t), \varepsilon)\|_{k-1} \|u(t)\|_k \end{aligned}$$

et du lemme 1.

2.5. Passons à la démonstration du théorème 3. Ecrivons le système (2.1) et les conditions (2.2) dans la forme

$$x' = f_\varepsilon(t, \hat{x}(t), 0)x + f(t, x, \varepsilon) - f_\varepsilon(t, \hat{x}(t), 0)x,$$

$$L_0 x = (L_0 - L_\varepsilon)x + r_\varepsilon.$$

Comme le système aux variations (2.3), (2.4) n'admet que la solution identiquement nulle, par une application du théorème 2 on en obtient l'équation

$$(2.5) \quad x = \Gamma(F(x, \varepsilon) - F_x(\tilde{x}, 0)x) + H((L_0 - L_\varepsilon)x + r_\varepsilon)$$

où Γ et H sont des applications linéaires continues de $(C^{k-1})^n$ dans $(C^k)^n$ et de R^n dans $(C^k)^n$ respectivement.

Considérons l'application $T: D_{\delta\gamma} \rightarrow (C^k)^n$ définie par la formule

$$T(x, \varepsilon) = x - \Gamma(F(x, \varepsilon) - F_x(\tilde{x}, 0)x) - H((L_0 - L_\varepsilon)x + r_\varepsilon).$$

Du lemme 1 il vient que l'application

$$(x, \varepsilon) \rightarrow \Gamma(F(x, \varepsilon) - F_x(\tilde{x}, 0)x)$$

de $D_{\delta\gamma}$ dans $(C^k)^n$ est continue. De même, de l'inégalité

$$\|L_{\varepsilon+\eta}(x+u) - L_\varepsilon x\| \leq \|L_{\varepsilon+\eta} - L_\varepsilon\| \|x+u\|_k + \|L_\varepsilon\| \|u\|_k$$

il résulte que l'application $(x, \varepsilon) \rightarrow L_\varepsilon x$ de $D_{\delta\gamma}$ dans R^n est continue. Enfin, L_0 étant par hypothèse une application linéaire continue de $(C^k)^n$ dans R^n et $\varepsilon \rightarrow r_\varepsilon$ étant une application continue de l'ensemble $|\varepsilon| \leq \gamma$ dans R^n , l'application

$$(x, \varepsilon) \rightarrow H((L_0 - L_\varepsilon)x + r_\varepsilon)$$

de $D_{\delta\gamma}$ dans $(C^k)^n$ est elle aussi continue. Par conséquent, l'application T est continue.

Pour tout $(x, \varepsilon) \in D_{\delta\gamma}$ soit $T_x(x, \varepsilon)$ la différentielle de l'application T au point (x, ε) par rapport à x . En vertu du lemme 2 on a

$$T_x(x, \varepsilon)u = u - \Gamma((F_x(x, \varepsilon) - F_x(\tilde{x}, 0))u) + H((L_0 - L_\varepsilon)u).$$

Du lemme 3 il résulte que $F_x(x, \varepsilon) - F_x(\tilde{x}, 0)$, en tant que l'élément de l'espace \mathcal{L}_k^n , dépend de façon continue de (x, ε) . Il en vient que $T_x(x, \varepsilon)$, en tant que l'élément de l'espace d'applications linéaires continues de $(C^k)^n$ dans lui-même, dépend de façon continue du point $(x, \varepsilon) \in D_{\delta\gamma}$.

En résumé, T est une application continue du voisinage $D_{\delta\gamma}$ du point $(\tilde{x}, 0)$ de l'espace $(C^k)^n \times R^m$ dans l'espace $(C^k)^n$ à différentielle $T_x(x, \varepsilon)$ continue. De plus, on a

$$T(\tilde{x}, 0) = 0, \quad T_x(\tilde{x}, 0)u = u.$$

Donc, du théorème sur les fonctions implicites il vient immédiatement qu'à un voisinage suffisamment petit U du point $\tilde{x} \in (C^k)^n$ on peut faire

correspondre un voisinage $|\varepsilon| \leq \gamma_0$ du point $\varepsilon = 0$ tel que dans le produit cartésien de ces deux voisinages l'équation

$$T(x, \varepsilon) = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (2.5) et, par conséquent, le problème (2.1), (2.2), soit équivalente à une équation

$$x = x(t, \varepsilon)$$

où $x(t, \varepsilon) \in (C^k)^n$ est défini pour tout $|\varepsilon| \leq \gamma_0$ et dépend de façon continue de ε . Mais, comme il est facile de le vérifier par les différentiations successives du système (2.1), pour les solutions x_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) de ce système $\|x_\nu - x\|_0 \rightarrow 0$ entraîne $\|x_\nu - x\|_k \rightarrow 0$. Donc, on peut prendre pour U un ensemble $\{x \in (C^k)^n: \|x - \bar{x}\|_0 \leq \delta_0\}$ ce qui achève la démonstration.

Remarque. Au 2.1, en fixant les hypothèses sur les seconds membres du système (2.1), on supposait que les fonctions $f^i(t, \xi, \varepsilon)$ ont par rapport à t et ξ les dérivées continues jusqu'à l'ordre k . Or, il est à noter que dans la démonstration du théorème on n'a eu besoin de faire recours qu'à l'existence et la continuité des dérivées des fonctions f^i et $f_{\xi_i}^i$ jusqu'à l'ordre $k-1$. Une pareille remarque s'applique aussi aux lemmes.

2.6. Le théorème 3 répond à trois questions à la fois — au problème de l'existence des solutions du système (2.1) satisfaisant aux conditions (2.2), à celui de leur unicité et enfin à celui de leur dépendance continue des seconds membres du système envisagé et des conditions imposées. Mais, du point de vue du problème de l'existence, il présente un sérieux inconvénient — il est de caractère local et assure l'existence d'une solution du problème (2.1), (2.2) seulement dans un voisinage d'une solution dont l'existence est supposée à l'avance. C'est pour cette raison qu'il convient de compléter ici le théorème 3 par un théorème, que l'on nomme global suivant la terminologie de M. A. Krasnoselskii [6], de l'existence des solutions pour les systèmes (2.1) suffisamment voisins aux systèmes linéaires. Ce théorème correspond aux théorèmes analogues établis par L. N. Echoukoff [5] et R. Conti [4] pour une classe plus spéciale de conditions aux limites (2.2).

Considérons le système d'équations différentielles

$$(2.6) \quad x' = A(t)x + g(t, x)$$

et la condition aux limites

$$(2.7) \quad Lx = r$$

où la matrice $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ et le vecteur $g(t, \xi) = \{g^i(t, \xi_1, \dots, \xi_n)\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) ont, dans l'ensemble $a \leq t \leq d, -\infty < \xi_i < +\infty$ ($i = 1, \dots, n$) des dérivées continues jusqu'à l'ordre $k-1$, L est une appli-

cation linéaire continue de l'espace $(C^k)^n$ dans K^n et r est un élément arbitraire de R^n . Le nombre (fini ou non)

$$|g|_{sn} = \inf_{\varrho > 0} \left(\sup_{\|x\|_{k-1} \geq \varrho} (\|g(t, x(t))\|_{k-1} / \|x(t)\|_{k-1}) \right)$$

sera appelé semi-norme du vecteur g .

THÉORÈME 4. *Si le problème linéaire homogène (1.3), (1.4) n'admet que la solution identiquement nulle, il existe un $\delta > 0$ (dépendant de la matrice $A(t)$ et de l'application L) tel que pour tout g satisfaisant à l'inégalité $|g|_{sn} < \delta$ le problème (2.6), (2.7) admet au moins une solution.*

Démonstration. En vertu du théorème 2 le problème (2.6), (2.7) est équivalent à l'équation

$$(2.8) \quad w = \Gamma G(x) + Hr$$

où G est une application continue de l'espace $(C^{k-1})^n$ dans lui même définie par la formule

$$G: x(t) \rightarrow y(t) = g(t, x(t))$$

(en abrégé: $y = G(x) = g(t, x)$) et $\Gamma: (C^{k-1})^n \rightarrow (C^k)^n$, $H: R^n \rightarrow (C^k)^n$ sont des applications linéaires continues. r étant fixé, le second membre de (2.8) définit une application continue de $(C^{k-1})^n$ dans $(C^k)^n$ qui, en tant que l'application de $(C^{k-1})^n$ dans lui même, est complètement continue (c'est-à-dire transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact). Soit $\delta = \|\Gamma\|^{-1}$ ($\|\Gamma\|$ désigne la norme de l'application Γ en tant que l'application de $(C^{k-1})^n$ dans lui même) et supposons que $|g|_{sn} < \delta$. Choisissons un nombre positif ϱ_0 de telle manière que l'on ait

$$\|G(x)\|_{k-1} / \|x\|_{k-1} + \frac{\delta}{\varrho} \|Hr\|_{k-1} \leq \delta$$

pour $\|x\|_{k-1} \geq \varrho_0$ et $\varrho \geq \varrho_0$. Soit enfin $\varrho_2 = \max(\varrho_0, \varrho_1)$ où

$$\varrho_1 = \sup \|\Gamma G(x) + Hr\|_{k-1}$$

pris dans la boule $\|x\|_{k-1} \leq \varrho_0$. Donc, pour tout x tel que $\|x\|_{k-1} \leq \varrho_2$ on a ou bien $\|x\|_{k-1} \leq \varrho_0$ et, par conséquent,

$$\|\Gamma G(x) + Hr\|_{k-1} \leq \varrho_1 \leq \varrho_2,$$

ou bien $\varrho_0 \leq \|x\|_{k-1} \leq \varrho_1$ et

$$\begin{aligned} \|\Gamma G(x) + Hr\|_{k-1} &\leq \|\Gamma\| \|G(x)\|_{k-1} + \|Hr\|_{k-1} = \delta^{-1} \|G(x)\|_{k-1} + \|Hr\|_{k-1} \\ &\leq \varrho_1 \delta^{-1} (\|G(x)\|_{k-1} / \|x\|_{k-1} + \delta \|Hr\|_{k-1} / \varrho_1) \leq \varrho_1 \delta^{-1} \delta = \varrho_1 \leq \varrho_2 \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application $x \rightarrow \Gamma G(x) + Hr$ applique la boule $\|x\|_{k-1} \leq \varrho_2$ dans le même. Donc, en vertu du théorème bien connu de Schauder il

existe au moins un point invariant de cette application c'est-à-dire une solution de l'équation (2.8). L'équation (2.8) étant équivalente au problème (2.6), (2.7), le théorème 4 se trouve ainsi démontré.

Revenons encore à l'inégalité $|g|_{\text{sn}} < \|I\|^{-1}$. L'évaluation de la norme $\|I\|$ n'est, en général, point facile. Elle est en tout cas beaucoup plus difficile que la vérification que le problème linéaire homogène (1.3), (1.4) n'a d'autres solutions que la solution identiquement nulle. Et c'est pour cette raison que ce n'est que le cas où $|g|_{\text{sn}} = 0$ qui peut avoir un sens pratique. Il est à noter que pour $k = 0$ cette dernière condition a une signification particulièrement simple car elle se ramène à

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{|g(t, \xi)|}{|\xi|} = 0$$

uniformément dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$.

3. Applications

3.1. Nous allons commencer par expliquer quelle signification peut avoir, dans quelques cas particulièrement simples, la dépendance continue des conditions aux limites (2.2) du paramètre ε .

Considérons à cet effet le problème de Nicoletti [11] qui consiste à chercher des solutions $x(t)$ du système (2.1) satisfaisant aux conditions

$$(3.1) \quad x(t_i) = r_i \quad (a \leq t_1 < \dots < t_n \leq d; r_i \in R).$$

Si c'est la suite $\tau = (t_1, \dots, t_n)$ qui est le paramètre du problème, l'application $L^1: x(t) \rightarrow (x_1(t_1), \dots, x_n(t_n))$ de l'espace $(C^1)^n$ dans R^n est continue pour tout τ fixé et, en plus, dépend de façon continue du paramètre τ . En effet, pour $\tau = (t_1, \dots, t_n)$ et $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$ on a

$$\begin{aligned} \|L^1_\tau - L^1_\sigma\|_1 &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \sum_{i=1}^n |x_i(t_i) - x_i(s_i)| \\ &\leq \max_i |t_i - s_i| \sum_{i=1}^n \sup_{\|x\|_1 \leq 1} |x'_i| \leq \max_i |t_i - s_i|. \end{aligned}$$

Cependant la même application envisagée comme une application de $(C^0)^n$ dans R^n est continue mais cesse dépendre de façon continue du paramètre τ . On a en effet, pourvu que $t_1 \neq s_1$,

$$\|L^1_\tau - L^1_\sigma\| = \sup_{\|x\|_0 \leq 1} \sum_{i=1}^n |x_i(t_i) - x_i(s_i)| \geq \sup_{|x_1(t)| \leq 1} |x_1(t_1) - x_1(s_1)| = 2.$$

Plus généralement, il est facile de voir que l'application L_τ ($\tau = (t_1, \dots, t_n)$) définie par des formes linéaires des valeurs des dérivées jusqu'à l'ordre p des fonctions $x_i(t)$ aux points t_i est continue en tant

qu'une application de l'espace $(C^p)^n$ dans R^n , mais dépend de façon continue de τ seulement en tant qu'une application de l'espace $(C^{p+1})^n$ dans R^n .

3.2. Supposons que les seconds membres du système (2.1) satisfassent aux conditions formulées au 2.1 c'est-à-dire que les fonctions $f^i(t, \xi, \varepsilon)$ ($i = 1, \dots, n$) soient continues et à dérivées par rapport à t, ξ jusqu'à l'ordre k ($k > 0$) continues en t, ξ, ε .

THÉORÈME 5. *Si $\hat{x}(t)$ est une solution du problème (2.1), (3.1) pour $\varepsilon = 0$, $t_i = t_i^0$, $r_i = r_i^0$ ($i = 1, \dots, n$) et si le problème aux variations correspondant (2.3) et*

$$(3.2) \quad x_i(t_i^0) = 0 \quad (a \leq t_i^0 \leq d; i = 1, \dots, n)$$

n'admet d'autres solutions que la solution identiquement nulle, il existe des nombres positifs δ_0, γ_0 tels que pour $|\varepsilon| \leq \gamma_0$, $|t_i - t_i^0| \leq \gamma_0$ et $|r_i - r_i^0| \leq \gamma_0$ le problème (2.1), (3.1) admet une et seulement une solution $x(t, \varepsilon)$ satisfaisant à l'inégalité $\|x(t, \varepsilon) - \hat{x}(t)\|_0 \leq \delta_0$. En plus, la solution $x(t, \varepsilon)$ dépend de façon continue (suivant la norme dans l'espace $(C^k)^n$) des paramètres ε, t_i et r_i .

La démonstration résulte immédiatement du théorème 3; il suffit de prendre pour le nouveau paramètre l'ensemble $t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ de $2n + m$ variables.

Les applications du théorème 5 se trouvent facilitées par le fait que l'on connaît plusieurs conditions suffisantes qui assurent l'unicité des solutions du problème (2.3), (3.2). Par exemple, comme l'a montré M. Šveč [14], il suffit à cet effet que la plus grande (en valeur absolue) racine caractéristique λ d'une matrice $\{a_{ij}\}$ dont les éléments satisfont aux inégalités

$$|f_{ij}^i(t, \hat{x}(t), 0)| \leq a_{ij} \quad (a \leq t \leq d; i, j = 1, \dots, n)$$

satisfasse à l'inégalité $|\lambda| < (d - a)^{-1}$ (cf. [10] et [13]).

3.3. Comme un autre exemple de la même catégorie nous allons considérer le problème de l'existence des solutions périodiques d'un système

$$(3.3) \quad x' = f(t, x, \varepsilon)$$

au voisinage d'une solution périodique $\hat{x}(t)$ correspondant à la valeur 0 du paramètre ε .

Supposons que les fonctions $f^i(t, \xi, \varepsilon)$ ($i = 1, \dots, n$) de $1 + n + m$ variables $t, \xi_1, \dots, \xi_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ soient définies dans l'ensemble

$$\Omega^*: -\infty < t < +\infty, |\xi - \hat{x}(t)| \leq \delta, |\varepsilon| \leq \gamma,$$

qu'elles y aient par rapport à t, ξ des dérivées jusqu'à l'ordre k continues en t, ξ, ε et, enfin, qu'elles soient périodiques en t de période T_ε qui dépend de façon continue du paramètre ε .

THÉORÈME 6. *Si le système aux variations*

$$x' = f_\varepsilon(t, \hat{x}(t), 0)x$$

n'a pas de solutions périodiques de période T_0 sauf la solution identiquement nulle, il existe des nombres positifs δ_0 et γ_0 tels que pour $|\varepsilon| \leq \gamma_0$ le système (3.3) admet une et seulement une solution $x(t, \varepsilon)$ périodique de période T_ε satisfaisant à l'inégalité

$$\|x(t, \varepsilon) - \hat{x}(t)\|_0 \leq \delta_0.$$

En plus, la solution $x(t, \varepsilon)$ dépend de façon continue (suivant la norme dans l'espace $(C^k)^n$) du paramètre ε .

La démonstration résulte immédiatement du théorème 3 et du fait que la condition de périodicité d'une solution $x(t)$ du système (3.3) est trivialement équivalente à la condition aux limites

$$x(0) - x(T_\varepsilon) = 0.$$

3.4. Nous passons maintenant aux équations différentielles d'ordres supérieurs. Dans ce n^o et dans les n^{os} qui suivent $x(t)$ désignera donc une fonction à valeurs dans R . Nous commençons par l'étude d'une équation linéaire d'ordre n

$$(3.4) \quad x^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_i(t)x^{(n-i)} + b(t) \quad (a \leq t \leq d)$$

avec les conditions aux limites

$$(3.5) \quad Lx = r \quad (r \in R^n).$$

Supposons que les fonctions $a_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) et $b(t)$ soient de classe C^{k-1} dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$ et L soit une application linéaire continue de l'espace $(C^{k+n-1})^1 = C^{k+n-1}$ dans R^n . A côté de l'équation (3.4) et de la condition (3.5) envisageons le problème linéaire homogène

$$(3.6) \quad x^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_i(t)x^{(n-i)},$$

$$(3.7) \quad Lx = 0.$$

De façon tout à fait analogue aux théorèmes 1 et 2 on peut énoncer le suivant

THÉOREME 7. *Pour que, quels que soient $b(t) \in C^{k-1}$ et $r \in R^n$, le problème (3.4), (3.5) admette une et seulement une solution, il faut et il suffit que le problème homogène correspondant (3.6), (3.7) n'admette que la solution identiquement nulle. Et si cette condition est satisfaite, la solution $x(t)$ du problème (3.4), (3.5) est déterminée par la formule*

$$(3.8) \quad x = \Gamma b + h(t)r$$

où Γ est une application linéaire continue de l'espace C^{k-1} dans l'espace C^{k+n} et $h(t)$ est un vecteur de l'espace $(C^{k+n})^n$; $h(t)r$ est le produit scalaire des vecteurs $h(t)$ et r .

Démonstration. Soit $L = (L^1, \dots, L^n)$ et $r = (r_1, \dots, r_n)$. L^i étant une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace C^{k+n-1} , on peut l'écrire sous la forme

$$(3.9) \quad L^i x = \sum_{j=2}^n \varrho_{ij} x^{(n-j)}(a) + N^i x^{(n-1)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

où ϱ_{ij} sont des nombres réels convenablement choisis et N^i est une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace C^k . En posant $x_i = x^{(n-i)}$ ($i = 1, \dots, n$) on ramène l'équation (3.4) au système

$$(3.10) \quad x'_1 = \sum_{i=1}^n a_i(t) x_i + b(t), \quad x'_i = x_{i-1} \quad (i = 2, \dots, n)$$

et de même, en profitant de (3.9) on donne à la condition (3.5) la forme

$$(3.11) \quad \sum_{j=2}^n \varrho_{ij} x_j(a) + N^i x_i = r_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

ce qui fait possible une application immédiate des théorèmes 1 et 2. Ainsi, du théorème 1 résulte la première partie du théorème 7. Et si le problème linéaire homogène (3.6), (3.7) n'admet que la solution identiquement nulle, il en est de même du problème linéaire homogène associé au problème (3.10), (3.11), et, par conséquent, en vertu du théorème 2 la solution générale du problème (3.10), (3.11) est donné par la formule

$$x_i(t) = (\Gamma_i b)(t) + \sum_{j=1}^n h_{ij}(t) r_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

où Γ_i ($i = 1, \dots, n$) est une application linéaire continue de l'espace C^{k-1} dans l'espace C^k . Par suite on a

$$x^{(n-i)}(t) = (\Gamma_i b)(t) + \sum_{j=1}^n h_{ij}(t) r_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

d'où il vient que

$$x(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left((I_1 b)(s) + \sum_{j=1}^n h_{1j}(s) r_j \right) ds + \\ + \sum_{i=2}^n \frac{(t-a)^{n-i}}{(n-i)!} \left((I_i b)(a) + \sum_{j=1}^n h_{ij}(a) r_j \right).$$

La formule (3.8) en résulte immédiatement et le théorème 7 se trouve ainsi démontré.

3.5. Considérons l'équation différentielle non-linéaire d'ordre n

$$(3.12) \quad x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}; \varepsilon) \quad (\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), a \leq t \leq d)$$

avec les conditions aux limites

$$(3.13) \quad L_\varepsilon x = r_\varepsilon.$$

Soit $\hat{x}(t) \in C^k = (C^k)^1$ une solution du problème (3.12), (3.13) correspondant à la valeur 0 du paramètre ε . Supposons que la fonction $f(t, \xi_0, \dots, \xi_{n-1}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ soit définie dans l'ensemble

$$II: a \leq t \leq d, |\xi_i - \hat{x}^{(i)}(t)| \leq \delta, |\varepsilon| \leq \gamma,$$

et qu'elle ait dans II par rapport à t, ξ des dérivées jusqu'à l'ordre $k > 0$ continues en t, ξ, ε . Supposons de plus que pour $|\varepsilon| \leq \gamma$ L_ε soit une application linéaire continue de l'espace $(C^{k+n-1})^n$ dans R^n dépendant de façon continue (suivant la norme dans l'espace d'applications linéaires continues de $(C^{k+n-1})^n$ dans R^n) du paramètre ε et que le vecteur r_ε dépende aussi de façon continue de ce paramètre. Ceci étant admis, on a un théorème analogue au théorème 3, à savoir le suivant

THÉORÈME 8. *Si le problème aux variations*

$$(3.14) \quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} f_{\xi_i}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \dots, \hat{x}^{(n-1)}(t); 0) x^{(i)}, \quad L_0 x = 0$$

n'admet que la solution identiquement nulle, il existe des nombres positifs δ_0, γ_0 tels que pour tout $|\varepsilon| \leq \gamma_0$ le problème (3.12), (3.13) admet une et seulement une solution $x(t, \varepsilon)$ satisfaisant à l'inégalité

$$\|x(t, \varepsilon) - \hat{x}(t)\|_{n-1} \leq \delta_0.$$

En plus, la solution $x(t, \varepsilon)$ dépend de façon continue (suivant la norme dans l'espace C^{k+n-1}) du paramètre ε .

La démonstration s'obtient immédiatement par le passage au système d'équations du premier ordre et par une application facile du théorème 3.

De même, pour l'équation différentielle non-linéaire

$$(3.15) \quad x^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_i(t) x^{(n-i)} + g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

on a un théorème analogue au théorème 4. Supposons à cet effet que les coefficients $a_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) soient de classe C^{k-1} dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$ et que la fonction $g(t, \xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ soit de classe C^{k-1} dans l'ensemble

$$\Pi^*: a \leq t \leq d, -\infty < \xi_i < +\infty \quad (i = 0, \dots, n-1).$$

Posons

$$|g|_{\text{sn}} = \inf_{\substack{q > 0 \\ \|x\|_{k-1} \geq q}} \sup \left(\|g(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))\|_{k-1} / \|x\|_{k-1} \right).$$

THÉOREME 9. *Si le problème linéaire homogène (3.6), (3.7) n'admet que la solution identiquement nulle, il existe un nombre positif δ (dépendant des fonctions $a_i(t)$ et de l'application L) tel que pour toute fonction g satisfaisant à l'inégalité $|g|_{\text{sn}} \leq \delta$ il existe au moins une solution du problème (3.15), (3.5).*

3.6. Pour l'équation (3.12) le problème d'interpolation consiste à chercher une solution de cette équation passant par n points P_1, \dots, P_n donnés à l'avance. Nous allons discuter ici plus en détail la question de la dépendance continue des solutions de ce problème des points P_1, \dots, P_n et celle de l'allure des solutions dans les cas critiques où quelques-uns de ces points s'approchent les uns des autres.

Partageons l'ensemble P de points donnés en p groupes

$$P_{11}(t_{11}, r_{11}), \dots, P_{1s_1}(t_{1s_1}, r_{1s_1}), \dots, P_{p1}(t_{p1}, r_{p1}), \dots, P_{ps_p}(t_{ps_p}, r_{ps_p}),$$

$$a \leq t_{ij} \leq d, t_{ij} \neq t_{im} \quad \text{pour} \quad (i, j) \neq (1, m), \quad \sum_{i=1}^p s_i = n$$

et écrivons les conditions d'interpolation sous la forme

$$(3.16) \quad x(t_{ij}) = r_{ij} \quad (i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, s_i).$$

Par $\Delta_{ij}(P)$ désignons les différences d'ordre $j-1$,

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(P) &= \Delta_{ij}(t_{i1}, \dots, t_{ij}; r_{i1}, \dots, r_{ij}) \\ &= (j-1)! \sum_{q=1}^j \frac{r_{iq}}{(t_{iq} - t_{i1}) \dots (t_{iq} - t_{i,q-1})(t_{iq} - t_{i,q+1}) \dots (t_{iq} - t_{ij})}. \end{aligned}$$

A côté des conditions (3.16) considérons les conditions

$$(3.17) \quad x^{(j-1)}(t_i^0) = r_{ij}^0 \quad (i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, s_i)$$

et les conditions homogènes correspondant

$$(3.18) \quad x^{(j-1)}(t_i^0) = 0 \quad (i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, s_i).$$

THÉOREME 10. Si la fonction $\tilde{x}(t)$ est une solution du problème (3.12), (3.16) pour $\varepsilon = 0$ et si le problème aux variations (3.14), (3.17) n'admet que la solution identiquement nulle, il existe des nombres positifs δ_0, γ_0 tel que pour tout $|\varepsilon| \leq \gamma_0$ et tout système P de points P_1, \dots, P_n tel que $|t_{ij} - t_i^0| \leq \gamma_0, |\Delta_{ij}(P) - r_{ij}^0| \leq \gamma_0$ ($i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, s_i$) le problème (3.12), (3.16) admet une et seulement une solution $x(t, \varepsilon, P)$ satisfaisant à l'inégalité

$$\|x(t, \varepsilon, P) - \tilde{x}(t)\|_{n-1} \leq \delta_0.$$

En plus, la solution $x(t, \varepsilon, P)$ dépend de façon continue (suivant la norme dans l'espace C^{k+n-1}) du paramètre ε et du système P et tend (suivant la même norme) vers $\tilde{x}(t)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0, t_{ij} \rightarrow t_i^0$ et $\Delta_{ij}(P) \rightarrow r_{ij}^0$ ($i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, s_i$).

La démonstration du théorème 10 s'appuie sur ce que les conditions (3.16) sont trivialement équivalentes aux équations

$$(3.19) \quad \Delta_{ij}(t_{i1}, \dots, t_{ij}; x(t_{i1}), \dots, x(t_{ij})) = \Delta_{ij}(P) \\ (i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, s_i).$$

Les fonctionnelles L_{ij} figurant aux premiers membres des conditions (3.16) et (3.19),

$$L_{ij}x = \begin{cases} \Delta_{ij}(t_{i1}, \dots, t_{ij}; x(t_{i1}), \dots, x(t_{ij})) & \text{pour } t_{im} \neq t_{i1} \ (m \neq 1), \\ x^{(j-1)}(t_i^0) & \text{pour } t_{im} = t_i^0 \ (m = 1, \dots, j) \end{cases}$$

sont continues et dépendent de façon continue des t_{ij} déjà dans l'espace C^j et, par conséquent, à plus forte raison dans l'espace C^{k+n-1} ($k \geq 1, n \geq 1, j \leq n$). En effet, dans le premier cas de la définition de L_{ij} cela résulte d'une propriété analogue des fonctionnelles $x \rightarrow x(t_{ij})$ et dans le second cas du fait qu'en appliquant à la différence Δ_{ij} le théorème des accroissements finis on obtient

$$\Delta_{ij}(t_{i1}, \dots, t_{ij}; x(t_{i1}), \dots, x(t_{ij})) = x^{(j-1)}(\theta_{ij})$$

où θ_{ij} est un point du plus petit intervalle contenant tous les points t_{i1}, \dots, t_{ij} .

Cela étant, la démonstration du théorème 10 résulte immédiatement du théorème 8 si comme un nouveau paramètre on introduit l'ensemble de variables $t_{i1}, \dots, t_{ps_p}, \Delta_{i1}(P), \dots, \Delta_{ps_p}(P), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$.

Dans le cas particulier où $p = n$ le théorème 10 établit la dépendance continue des solutions du problème d'interpolation (3.12), (3.16) des variables t_i, r_i ($i = 1, \dots, n$) et du second membre de l'équation (3.12).

Dans le cas général le théorème 10 dit que ces solutions dépendent de façon continue des points P_1, \dots, P_n même si quelques-uns de ces points se fondent à la limite, pourvu que la différence finie qui leur correspond tende elle aussi vers une limite. D'un autre point de vue ce problème était déjà discuté dans [9].

3.7. Considérons l'équation différentielle

$$(3.20) \quad x^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_i x^{(n-i)} + g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

où les coefficients a_i sont constants et la fonction g est de classe C^{k-1} dans l'ensemble Π^* , et le problème aux limites (pour un m fixé)

$$(3.21) \quad x^{(m)}(t_i) = r_i \quad (a \leq t_1 < \dots < t_n \leq d; m \leq k).$$

Dans le cas particulier où la fonction $g(t, \xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ ne dépend pas des variables ξ_0, \dots, ξ_{n-1} et $m = 0$. M. Biernacki [1] a démontré que si l'équation caractéristique

$$(3.22) \quad \lambda^n - \sum_{i=1}^n a_i \lambda^{n-i} = 0$$

n'a que les racines réelles, le problème (3.20), (3.21) admet une et seulement une solution. Dans le cas général envisagé ici on a un résultat analogue, à savoir le suivant

THÉORÈME 11. *Si les racines de l'équation caractéristique (3.22) sont toutes réelles distinctes et différentes de zéro et si la fonction g satisfait à la condition $|g|_{\text{sn}} = 0$, le problème (3.20), (3.21) admet au moins une solution.*

Démonstration. En vertu du théorème 9 il suffit de vérifier que le problème linéaire homogène associé

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_i x^{(n-i)}, \quad x^{(m)}(t_i) = 0$$

n'admet que la solution identiquement nulle. Or, en écrivant les conditions aux limites homogènes pour la solution générale

$$x(t) = \sum_{j=1}^n C_j e^{\lambda_j t}$$

de l'équation homogène on obtient le système d'équations linéaires algébriques

$$\sum_{j=1}^n C_j \lambda_j^m e^{\lambda_j t_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Le déterminant de ce système est égal au produit

$$(\lambda_1 \dots \lambda_n)^m \text{Det}(e^{\lambda_j t_i})$$

dont le dernier facteur, appelé le déterminant généralisé de Vandermonde, est différent de zéro par l'hypothèse que λ_j ($j = 1, \dots, n$) sont réels et tous distincts et qu'il en est de même de t_i ($i = 1, \dots, n$).

Il est à noter que dans le cas où g ne dépend pas des variables ξ_0, \dots, ξ_{n-1} la condition $|g|_{sn} = 0$ se trouve trivialement satisfaite et, par conséquent, en vertu du théorème 11 le problème (3.20), (3.21) admet au moins une solution. Et bien davantage, dans ce cas-la un raisonnement facile mène à la conclusion que cette solution est unique.

4. Remarques et compléments

4.1. Nous avons eu déjà l'occasion d'attirer l'attention sur ce que toute augmentation des conditions de régularité des seconds membres des systèmes d'équations ou des équations envisagés élargit automatiquement l'ensemble de conditions aux limites admissibles. Mais, pour les problèmes aux limites où n'interviennent que les dérivées d'ordres strictement inférieures que l'ordre de l'équation, et de tels problèmes semblent être les plus importants et les plus intéressants, les conditions de régularité à imposer aux seconds membres des systèmes ou des équations sont assez modestes — surtout en ce qui concerne le problème de l'existence des solutions.

A titre d'exemple reprenons le système d'équations différentielles (2.6). Supposons cette fois que les éléments de la matrice $A(t)$ soient des fonctions sommables dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$ et que les fonctions $g'(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$ soient mesurables en t pour tout ξ fixé et continues en ξ pour tout t fixé. Alors les solutions du système (2.6) prises au sens de Carathéodory sont des fonctions continues (même absolument continues) et, par conséquent, il est naturel de supposer que l'application linéaire au premier membre de la condition aux limites (2.7) est définie et continue dans l'espace $(C^0)^n$ — il en est ainsi par exemple pour les applications de $(C^0)^n$ dans R^n qui à chaque fonction $x(t) \in (C^0)^n$ font correspondre sa valeur en un point fixé. Si, en plus, la fonction $g(t, \xi)$ satisfait à la condition

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_a^d \sup_{|\xi| \leq k} |g(t, \xi)| dt = 0,$$

on a le théorème suivant (cf. R. Conti [4]).

Si le problème linéaire homogène (1.3), (1.4) n'admet que la solution identiquement nulle, il existe une solution au moins du problème (2.6), (2.7).

La démonstration de ce théorème peut être basée sur des raisonnements analogues à ceux de la démonstration du théorème 4. D'autres théorèmes de ce type sont à trouver dans [3], [4], [5] et [15].

4.2. La situation change un peu lorsque l'on passe à la question de la dépendance des solutions des conditions aux limites. L'hypothèse que dans un problème comme (2.1), (2.2) l'application L_ε linéaire et continue de $(C^0)^n$ dans R^n dépend de façon continue du paramètre ε suivant la norme dans l'espace $(C^0)^n$ s'avère trop restrictive et, par conséquent, privée de sens pratique. Comme nous l'avons signalé au 3.1 même de très simples applications de $(C^0)^n$ dans R^n , comme par exemple celles qui aux fonctions de l'espace $(C^0)^n$ font correspondre leurs valeurs aux points fixés, ne jouissent pas de cette propriété, de sorte qu'il serait impossible d'obtenir sur cette voie même le théorème de la dépendance continue des solutions du problème de Cauchy des valeurs initiales.

Donc, un espèce plus fin de la dépendance de L_ε du paramètre ε est nécessaire. Et c'est l'hypothèse de la dépendance au sens de la convergence simple qui semble répondre le mieux à nos besoins: la contion $\varepsilon_\nu \rightarrow \varepsilon_0$ entraîne $L_{\varepsilon_\nu} x \rightarrow L_{\varepsilon_0} x$, quel que soit $x \in (C^0)^n$.

Il reste encore à préciser les hypothèses sur la dépendance des seconds membres des systèmes envisagés du paramètre ε . Les théorèmes classiques sur la dépendance des solutions du problème de Cauchy des seconds membres des systèmes et des valeurs initiales sont susceptibles de généralisations diverses (il faut mentionner ici les travaux de M. A. Krasnoselskii et S. G. Krein [7], J. Kurzweil et Z. Vorel [8] et N. N. Petroff [12]). On pourrait donc essayer d'établir des généralisations analogues pour le problème de la dépendance des solutions des conditions aux limites générales. Pour raison de simplicité nous nous bornerons ici à exposer un des plus simples théorèmes de ce type, un théorème qui rappelle un peu des résultats de M. A. Krasnoselskii et S. G. Krein pour le problème de Cauchy.

Supposons à cet effet que la fonction $g(t, \xi, \varepsilon)$ ($g = (g^1, \dots, g^n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$) soit définie dans l'ensemble

$$E: a \leq t \leq \bar{a}, \quad |\xi| \leq \delta, \quad |\varepsilon| \leq \gamma,$$

que'elle soit mesurable en t pour ξ, ε fixés, continue en ξ uniformément par rapport à t, ε et telle que

$$(4.1) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \int_a^t g(s, \xi, \varepsilon) ds = 0 \quad (a \leq t \leq \bar{a}; |\xi| \leq \delta)$$

et

$$(4.2) \quad |g(t, \xi, \varepsilon)| \leq \varphi(t), \quad \int_a^{\bar{a}} \varphi(t) dt < +\infty.$$

Supposons en plus que les éléments de la matrice carrée $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) soient sommables dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$ et que pour tout $|\varepsilon| \leq \gamma$ l'application linéaire $L_\varepsilon: (C^0)^n \rightarrow R^n$ soit continue et dépende de façon continue au sens de la convergence simple du paramètre ε . Soit enfin r_ε une fonction continue de ce paramètre.

THÉOREME 12. *Si le problème*

$$x' = A(t)x, \quad L_0 x = 0$$

n'a d'autres solutions que la solution identiquement nulle, il existe un nombre positif γ_0 tel que pour tout $|\varepsilon| \leq \gamma_0$ il existe au moins une solution $x(t, \varepsilon)$ du système

$$(4.3) \quad x' = A(t)x + g(t, x, \varepsilon)$$

satisfaisant à la condition aux limites $L_\varepsilon x = r_\varepsilon$. En plus, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x(t, \varepsilon)\|_0 = 0.$$

Démonstration. Il est facile de vérifier (cf. (1.7), (1.8)) que dans nos hypothèses toute solution du problème

$$x' = A(t)x + b(t), \quad L_0 x = r$$

où $b(t)$ est une fonction sommable dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$, est donnée par la formule

$$x(t) = \int_a^d \Gamma(s, t) b(s) ds + H(t)r$$

où

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} V(t)W(s) + V(t)V^{-1}(s) & \text{pour } s \leq t, \\ V(t)W(s) & \text{pour } s > t, \end{cases}$$

$V(t)$ est la matrice fondamentale des solutions du système (1.3), $H(t) = V(t)(LV)^{-1}$ et $W(s) = (LV)^{-1}(LQ_s)$. La matrice $Q_s(t)$ est égale à zéro pour $s > t$ et à $V(t)V^{-1}(s)$ pour $s \leq t$. Donc les matrices $V(t)$ et $H(t)$ sont continues dans l'intervalle $\langle a, d \rangle$ et la matrice $W(s)$ est bornée. Il en vient immédiatement que

$$(4.4) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^d |\Gamma(s, t) - \Gamma(s, t_0)| u(s) ds = 0,$$

quelle que soit la fonction sommable $u(s)$.

Le problème (4.3) est équivalent au système d'équations intégrales

$$(4.5) \quad x(t) = \int_a^d \Gamma(s, t) g(s, x(s), \varepsilon) ds + H(t)(r + (L_0 - L_\varepsilon)x(t)).$$

Toute solution du système (4.3) appartient à la famille Z de fonctions $x(t)$ satisfaisant aux inégalités

$$|x(t)| \leq \delta, \quad |x'(t)| \leq \delta \|A\|_0 + \varphi(t) \stackrel{\text{df}}{=} \psi(t).$$

La famille Z est une partie compacte de $(C^0)^n$. Il en résulte que

$$(4.6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L_0 - L_\varepsilon)x(t) = 0$$

uniformément dans Z . On sait aussi (cf. [8]) que de la condition (4.1), qui, en vertu de (4.2), se trouve satisfaite uniformément, il vient que pour toute fonction $x(t) \in (C^0)^n$ on a

$$(4.7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^t g(s, x(s), \varepsilon) ds = 0.$$

Les fonctions $g(s, x(s), \varepsilon)$ étant bornées dans leur ensemble par une fonction sommable $\varphi(t)$, de (4.7) il résulte que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^d w(s) g(s, x(s), \varepsilon) ds = 0$$

pour toute fonction bornée $w(s)$. Par suite, quels que soient $t \in \langle a, d \rangle$ et $x(t) \in Z$, on a

$$(4.8) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^d \Gamma(s, t) g(s, x(s), \varepsilon) ds = 0.$$

Et la convergence exprimée par (4.8) est uniforme dans $\langle a, d \rangle \times Z$. En effet, dans le cas contraire il existerait des suites $\{t^i\} \subset \langle a, d \rangle$, $\{x^i(t)\} \subset Z$ et $\{\varepsilon^i\}$, $\varepsilon^i \rightarrow 0$, telles que

$$\int_a^d \Gamma(s, t^i) g(s, x^i(s), \varepsilon^i) ds \not\rightarrow 0.$$

Les ensembles $\langle a, d \rangle$ et Z étant compacts, on peut supposer sans restreindre la généralité que les suites $\{t^i\}$, $\{x^i(t)\}$ sont convergentes, $t^i \rightarrow t^0$ et $x^i(t) \rightarrow x^0(t)$. On a alors

$$\begin{aligned} & \int_a^d \Gamma(s, t^i) g(s, x^i(s), \varepsilon^i) ds \\ &= \int_a^d \Gamma(s, t^0) g(s, x^0(s), \varepsilon^i) ds + \int_a^d (\Gamma(s, t^i) - \Gamma(s, t^0)) g(s, x^i(s), \varepsilon^i) ds + \\ & \quad + \int_a^d \Gamma(s, t^0) (g(s, x^i(s), \varepsilon^i) - g(s, x^0(s), \varepsilon^i)) ds. \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme tend vers zéro en vertu de (4.8), le second tend vers la même limite en vertu de (4.2) et (4.4), enfin le troisième jouit de la même propriété en vertu de la continuité uniforme de la fonction $g(t, \xi, \varepsilon)$ par rapport à ξ . D'où la contradiction.

Désignons par T_ε l'application de l'espace $(C^0)^n$ dans lui-même déterminée par la formule

$$T_\varepsilon: x(t) \rightarrow y(t) = \int_a^d \Gamma(s, t) g(s, x(s), \varepsilon) ds + H(t) \{r_\varepsilon + (L_0 - L_\varepsilon)x(t)\}.$$

De (4.6) et (4.8) il résulte que pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a $\|T_\varepsilon(x)\|_0 \rightarrow 0$ uniformément dans Z . Il en vient que les solutions $x(t, \varepsilon)$, si elles existent, satisfont forcément à la condition $\|x(t, \varepsilon)\|_0 \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. L'existence des solutions $x(t, \varepsilon)$ résulte du théorème de Schauder sur les points invariants des transformations continues. En effet, pour tout $x(t) \in Z$ l'application T_ε donne une solution $y(t)$ du système

$$y' = A(t)y + g(t, x(t), \varepsilon).$$

Si $|\varepsilon|$ est suffisamment petit, on a $|y(t)| \leq \delta$ d'où l'on tire $|y'(t)| \leq \psi(t)$ et, par suite, $y(t) \in Z$ c'est-à-dire $T_\varepsilon(Z) \subset Z$. L'ensemble Z est compact dans $(C^0)^n$, donc il reste seulement à vérifier que l'application T_ε est continue dans $(C^0)^n$. Mais cela résulte immédiatement de ce que la fonction Γ est bornée et de la continuité uniforme de la fonction $g(t, \xi, \varepsilon)$ par rapport à ξ . Le théorème 12 se trouve ainsi démontré.

4.3. Comme nous l'avons déjà dit, on peut essayer d'établir pour les problèmes aux limites généraux des théorèmes analogues aux théorèmes sur la dépendance des solutions du problème de Cauchy des seconds membres des équations et des valeurs initiales. La tâche n'est point facile comme le montre l'exemple suivant d'une différence intéressante entre ces deux questions. Pour le problème de Cauchy N. N. Petroff [12] a découvert que pour la dépendance continue des solutions de leurs valeurs initiales il suffit que les seconds membres soient convergents le long de la solution limite. Or, il n'en est plus de même pour les problèmes aux limites. Par exemple les solutions $x(t, \varepsilon) = \varepsilon(2e^t - 1)$ de l'équation différentielle

$$(4.9) \quad x' = x + \varepsilon$$

satisfaisant à la condition initiale $x(0, \varepsilon) = \varepsilon$ tendent pour $\varepsilon \rightarrow 0$ vers la solution $x(t, 0) \equiv 0$ de l'équation

$$(4.10) \quad x' = 0$$

satisfaisant à la condition initiale $x(0) = 0$, bien que le second membre de l'équation (4.9) ne converge, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, vers le second membre de

l'équation (4.10) que le long de la solution $x(t, 0)$. Cependant pour la condition aux limites

$$(4.11) \quad x(0) - x(1)/e = \varepsilon(e^{-1} - 1)$$

cette propriété n'a plus lieu. En effet, la solution $x(t, \varepsilon) = e^t - \varepsilon$ de l'équation (4.9) satisfaisant à la condition (4.11) ne tend pas, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers la solution unique $x(t, 0) \equiv 0$ de l'équation (4.10) satisfaisant à la condition aux limites $x(0) - e^{-1}x(1) = 0$.

Travaux cités

- [1] M. Biernacki, *Sur un problème d'interpolation relatif aux équations différentielles linéaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), p. 169-214.
- [2] R. Conti, *I problemi ai limiti lineari per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie: teoremi di esistenza*, Ann. Mat. Pura Appl. 35 (1953), p. 155-182.
- [3] — *Problemi lineari per le equazioni differenziali ordinarie*, Matematiche (Catania) 13 (1958), p. 116-125.
- [4] — *Problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires*, Math. Nachr. 23 (1961), p. 161-178.
- [5] Л. Н. Ешуков, *Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Усп. Мат. Наук 13 (1958), p. 191-196.
- [6] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Москва 1956.
- [7] — С. Г. Крейн, *О принципе усреднения в нелинейной механике*, Усп. Мат. Наук. 10 (1955), p. 147-152.
- [8] Я. Курцвейль, Э. Ворел, *О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра*, Чехосл. Матем. Журн., 7 (1957), p. 568-583.
- [9] A. Lasota, *O związku między problemami początkowymi i brzegowymi dla równania różniczkowego zwyczajnego n-tego rzędu*, Zeszyty Nauk. UJ, Prace Mat. 5 (1959), p. 59-65.
- [10] — C. Olech, *An optimal solution of Nicoletti's boundary value problem*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), p. 131-139.
- [11] O. Nicoletti, *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*, Atti Accad. Sci. Torino 33 (1897-98), p. 746-759.
- [12] Н. Н. Петров, *Некоторые достаточные условия непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра*, Вестник Ленинградск. Унив. 19 (1962), p. 26-40.
- [13] В. И. Скрипник, *Об одной краевой задаче и некоторых вопросах колеблемости решений*, Мат. Сборник 55 (1961), pp. 449-472.
- [14] M. Švčec, *K problému jednoznačnosti integralov systému lineárných diferenciálních rovnic*, Mat.-Fiz. Sborník Slov. Akad. Ved. 2 (1952), p. 3-22.
- [15] W. M. Whyburn, *Differential equations with general boundary conditions*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), p. 692-704.

Reçu par la Rédaction le 31. 8. 1965