ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1970)

Über eine spezielle Form des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen in Zusammenhang mit einem Satz von Rossberg

von W. Tutschke (Halle/Berlin)

Bei einer holomorphen Funktion erlaubt das Maximumprinzip bekanntlich, aus einer Abschätzung von $|f(z)|$ auf dem Rand eines Gebietes G auf eine Abschätzung von $|f(z)|$ für ganz G zu schließen. Dabei wird Stetigkeit von $f(z)$ in $\bar{G}$ vorausgesetzt. Die Stetigkeitsforderung von $f(z)$ auf dem ganzen Rand kann durch Hinzunahme anderer Forderungen abgeschwächt werden. Im folgenden sollen derartige aus einer Arbeit [4] von H.-J. Roßberg folgende Zusatzbedingungen angegeben werden, wenn G einfach zusammenhängend und $f(z)$ in $G-\{P_0\}$, P_0 Randpunkt von G, stetig ist. Diese Bedingungen werden analogen, aus dem Satz von Phragmén-Lindelöf folgenden Bedingungen gegenübergestellt.

Es sei G das Innengebiet einer in der z-Ebene gelegenen geschlossenen Jordankurve, z_0 sei ein Punkt von $\gamma_0 = \partial G$. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz und dem Satz von der Ränderzuordnung ([1]) kann man G konform auf $|Z| < 1$ abbilden, $Z = Z(z)$, wobei sich diese Abbildung zu einem Homöomorphismus von $\bar{G}$ auf $|Z| \leqslant 1$ fortsetzen läßt. Es sei Z_0 der Bildpunkt von z_0. Durch eine gebrochen lineare Funktion $\zeta = \zeta(Z)$ kann man $|Z| \leqslant 1$, $Z \neq Z_0$ eineindeutig auf $\mathrm{Im}[\zeta] > 0$ abbilden, wobei $|Z| = 1$, $Z \neq Z_0$ in $\mathrm{Im}[\zeta] = 0$ übergeht. Der Punkt Z_0 und also auch z_0 entspricht dabei dem Punkt $\zeta = \infty$. Wendet man nun (auf $\mathrm{Im}[\zeta] > 0$) den Satz von Phragmén-Lindelöf an ([2], [3]), so folgt

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen*

(a) *$w(z)$ ist in G holmorph und in $\bar{G}-\{z_0\}$ stetig,*

(b) *$|w(z)| \leqslant 1$ auf $\gamma_0 = \partial G$,*

(c) *$|w(z)| \leqslant K$ in G $(K > 1)$,*

gilt $|w(z)| \leqslant 1$ in ganz G [1].

Ist $Z = Z(z)$ eine eineindeutig und konforme Abbildung von G auf $|Z| < 1$, so werde das Urbild eines Durchmessers des Kreises eine *kon-*

[1] Auf mögliche allgemeinere Fassungen dieses Satzes wurde verzichtet.

forme Symmetrielinie genannt. Da man jede (offene) Kreisscheibe so eineindeutig und konform auf sich selbst abbilden kann, daß ein beliebiger Punkt in den Mittelpunkt und eine beliebig vorgegebene Richtung durch diesen Punkt in die Richtung der reellen Asche übergeth, gilt:

Durch jeden Punkt z_* von G gibt es genau eine konforme Symmetrielinie, die in z_* eine beliebig vorgegebene Richtung besitzt.

Ist z_0 Randpunkt von G und γ' eine nach z_0 strebende Symmetrielinie ([2]), so kann man G derart auf $\mathrm{Im}[\zeta] > 0$ konform abbilden, daß γ' in $\mathrm{Im}[\varphi] > 0$, $\mathrm{Re}[\varphi] = 0$ (positive imaginäre Achse) übergeht. Nach Satz 3.6 von [4] gilt daher

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen*

(a) *$w(z)$ ist in G holomorph und in $\bar{G} - \{z_0\}$ stetig,*

(b) *$|w(z)| \leqslant 1$ auf $\partial G - \{z_0\}$ und auf einer nach z_0 strebenden Symmetrielinie,*

(c) *es sei eine in G holomorphe und in $\bar{G} - \{z_0\}$ stetige.*

Funktion $\omega(z)$ bekannt, $\omega \neq 0$, $|\omega(z)| \leqslant 1$, so daß

$$|w(z)| \leqslant \frac{1}{|\omega(z)|}$$

ist, so gilt $|w(z)| \leqslant 1$ in ganz G.

Bemerkung 1. Ist $|w(z)| \leqslant k$ auf $\partial G - \{z_0\}$ und auf einer konformen Symmetrielinie und ist analog

$$|w(z)| \leqslant \frac{k}{|\omega(z)|},$$

so gilt $|w(z)| \leqslant k$ in ganz G. Denn $W(z) = \dfrac{w(z)}{k}$ erfüllt dann die Voraussetzungen von Satz 2.

Bemerkung 2. Die Voraussetzungen (c) von Satz 1 ist ein Spezialfall der Voraussetzung (c) von Satz 2. Denn setzt man $(K > 1)$ $\omega(z) = 1/K$, so ist $|w(z)| \leqslant K$. Dennoch ist Satz 1 nicht ein Spezialfall von Satz 2, da bei der Voraussetzung (b) von Satz 2 die Abschätzung $|w(z)| \leqslant 1$ auch auf der konformen Symmetrielinie gefordert wird. Im Spezialfall $\omega(z) = 1/K$ sind die Voraussetzungen von Satz 1 demnach schwächer.

Bemerkung 3. Es sei darauf hingewiesen, daß mit der Funktion $\omega(z)$ in Satz 2 nicht die Voraussetzungen des Satzes von Phragmén-Lindelöf in der in [2], S. 47, angegebenen Form erfüllt sind. Denn wegen

$$|w(z)| \leqslant \frac{1}{|\omega(z)|}$$

([2]) Das bedeutet: z_0 entspricht bei der Ränderzuordnung einem der beiden Endpunkte des entsprechenden Durchmessers von $|Z| < 1$.

und

$$|w(z)| \cdot |\omega(z)|^{\delta} = |w(z) \cdot \omega(z)| \cdot \left(\frac{1}{|\omega(z)|}\right)^{1/\delta}$$

kann der Ausdruck $|w(z)| \cdot |\omega(z)|^{\delta}$ für $0 < \delta < 1$ nicht nach oben abgeschätzt werden.

Diese Untersuchung wurde angeregt durch Gespräche mit Herrn Roßberg, der mir auch das Manuskript seiner Arbeit [4] zur Einsichtnahme zur Verfügung stellte.

Literaturverzeichnis

[1] H. Behnke und F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.

[2] B. J. Lewin, *Nullstellenverteilung ganzer Funktionen*, Berlin 1962 (Übersetzung aus dem Russ.)

[3] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heildelberg 1953.

[4] H.-J. Roßberg, *Eigenschaften der charakteristischen Funktionen von einseitig beschränkten Verteilungsfunktionen und ihre Anwendung auf ein Charakterisierungsproblem der mathematischen Statistik*, Math. Nachr. 37 (1968), S. 37-57.

Reçu par la Rédaction le 16. 8. 1968