ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVI (1972)

Une remarque sur l'équation des erreurs dans la solution approximative des équations différentielles

par Z. Mikołajska (Kraków)

Envisageons le système d'équations différentielles

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y) \tag{1}$$

(où $Y = Y_1, \ldots, Y_m$, $f = f_1, \ldots, f_m$) avec la condition initiale

$$Y(x_0) = y_0, \quad x_0 = a. \tag{2}$$

Nous désignons les valeurs de la solution approximative de l'équation (1) aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$, où $x_k = x_0 + kh$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $x_n = b$, par la formule suivante

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \Phi(h, y_k, x_k, f) \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ y_0 &= \bar{y}_0. \end{aligned} \tag{3}$$

On a

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_n - x_0}{n}, \quad y_k = y_{1k}, \ldots, y_{mk}, \quad \Phi = \Phi_1, \ldots, \Phi_m.$$

Moyennant certaines hypothèses sur Φ et f nous allons évaluer la différence

$$\|\varphi_0(x_n) - y_n\| = \varrho(h) \tag{4}$$

où $\varphi_0(x)$ est la solution de l'équation (1) satisfaisant à (2) et y_n est défini par (3).

Hypothèses H. *La fonction $f(x, y)$ est continue pour $x \in [a, b]$ et satisfait à la condition de Lipschitz*

$$\|f(x, y) - f(x, Y)\| \leqslant L\|y - Y\| \quad \textit{pour } x \in [a, b]. \tag{5}$$

Il existe une constante $C > 0$ et $p \geqslant 2$ telle que pour chaque solution $\varphi(x)$ de l'équation (1) *on a*

$$\varphi(x_{k+1}) = \Phi\big(h, \varphi(x_k), x_k, f\big) + r(h, \varphi) \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{6}$$

où

(7) $$\|r(h, \varphi)\| \leqslant Ch^p$$

et

(8) $$x_k = x_0 + kh = a + kh \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

THÉORÈME T. *Les hypothèses* H *étant admises on a*

(9) $$\|\varphi_0(x_n) - y_n\| = \|\varphi_0(b) - y_n\| \leqslant \frac{Ch^p \cdot (e^{L(x_n - x_0)} - 1)}{e^{Lh} - 1}$$

$$= \frac{Ch^p}{e^{Lh} - 1} \cdot (e^{L(b-a)} - 1) \leqslant \tilde{C}h^{p-1}.$$

Démonstration. Envisageons les fonctions $\varphi_k(x)$ satisfaisant à l'équation (1) et à la condition initiale

(10) $$\varphi_k(x_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

On a

(11) $$\|\varphi_0(b) - y_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \|\varphi_j(b) - \varphi_{j-1}(b)\| + \|\varphi_{n-1}(b) - y_n\|.$$

Évaluons

$$\|\varphi_j(b) - \varphi_{j-1}(b)\|.$$

De l'équation (1) et de l'hypothèse (5) on tire

$$\|\varphi_j'(x) - \varphi_{j-1}'(x)\| \leqslant L\|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)\| \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

d'où

(12) $$\|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)\| \leqslant \|\varphi_j(x_j) - \varphi_{j-1}(x_j)\| e^{L(x-x_j)} \quad \text{pour } x \geqslant x_j$$

et, à cause de (10) et (6), on obtient

$$\|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)\| \leqslant \big\|y_j - \Phi(h, \varphi_{j-1}(x_{j-1}), x_{j-1}, f) - r(h, \varphi_{j-1})\big\| e^{L(x-x_j)}$$

d'où, en vertu de (10) et (3), il vient

$$\|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)\| \leqslant \|r(h, \varphi)\| e^{L(x-x_j)} \quad \text{pour } x \geqslant x_j.$$

D'après (7) on a donc

(13) $$\|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)\| \leqslant Ch^p e^{L(x-x_j)} \quad \text{pour } x \geqslant x_j,\ j = 1, \ldots, n-1,$$

b étant égal à x_n on a, en vertu de (6), (3) et (10),

$$\begin{aligned}\|\varphi_{n-1}(b) - y_n\| &= \|\varphi_{n-1}(x_n) - y_n\| \\ &= \big\|\Phi(h, \varphi_{n-1}(x_{n-1}), x_{n-1}, f) + r(h, \varphi_{n-1}) - \Phi(h, y_{n-1}, x_{n-1}, f)\big\| \\ &= \|r(h, \varphi_{n-1})\| \leqslant Ch^p\end{aligned}$$

et par suite, à cause de (13) et (11),

$$\|\varphi_0(b)-y_n\| \leqslant Ch^p \sum_{j=1}^{n} e^{L(x_n-x_j)} = Ch^p \sum_{j=1}^{n} e^{L(n-j)h}$$
$$= Ch^p \sum_{j=0}^{n-1} e^{jLh} = \frac{Ch^p\cdot(e^{nLh}-1)}{e^{Lh}-1} = Ch^p\frac{(e^{L(b-a)}-1)}{e^{Lh}-1};$$

$\dfrac{h}{e^{Lh}-1}$ étant borné il existe une constante $\tilde{C}$ telle que

$$(e^{L(b-a)}-1)\frac{Ch}{e^{Lh}-1} < \tilde{C} \quad \text{pour tout } h_0 \geqslant h > 0,$$

et par conséquent

$$\|\varphi_0(x_n)-y_n\| \leqslant \tilde{C}h^{p-1}.$$

Remarque 1. Dans le cas $m = 1$ l'hypothese $f_Y(x, Y) \leqslant 0$ implique

$$\|\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)\| \leqslant \|\varphi_j(x_j)-\varphi_{j-1}(x_j)\| \quad \text{pour } x \geqslant x_j$$

et par suite

$$|\varphi_0(b)-y_n| \leqslant nCh^p = Ch^{p-1}(b-a).$$

Dans le cas où $f_Y(x, Y) \leqslant -\mu$ on obtient

$$\frac{d}{dx}[\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)]^2 = 2f_Y(\vartheta_j)\big(\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)\big)^2$$
$$\leqslant -2\mu[\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)]^2,$$

donc

$$|\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)| \leqslant |\varphi_j(x_j)-\varphi_{j-1}(x_j)|\, e^{-\mu(x-x_j)} \quad \text{pour } x \geqslant x_j,$$

d'où il résulte que

$$|\varphi_0(b)-y_n| \leqslant Ch^p\frac{(1-e^{-\mu(b-a)})}{1-e^{-\mu h}} \leqslant \tilde{C}h^{p-1}. \tag{14}$$

Remarque 2. Dans le cas d'un système d'équations (1) on obtient les évaluations (14) si l'on suppose qu'il existe une constante $\mu > 0$ telle que la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f^i_{Y_j}(x, Y_1, \ldots, Y_m)\eta_i\eta_j \leqslant -2\mu\sum_{j=1}^{m}\eta_j^2.$$

Remarque 3. La fonction $\varphi_0(x)$ étant continue il est évident que la suite de solutions approximatives

$$\{y_0^n, \ldots, y_n^n\}$$

satisfaisant à la condition

$$y_{k+1}^n = \Phi\left(\frac{(b-a)}{n}, y_k^n, x_k^n, f\right), \qquad y_0^n = y_0$$

(où $x_k^n = x_0 + kh_n = x_0 + k(b-a)/n$) converge vers $\varphi_0(x)$ dans le sens suivant:

Pour chaque $x \in [a, b]$ et chaque $x_{k_n}^n \to x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n}^n$ existe et

$$\lim_{n\to\infty} y_{k_n}^n = \varphi_0(x).$$

Reçu par la Rédaction le 31. 5. 1971