ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Les solutions non négatives d'un système parabolique d'équations

par J. CHABROWSKI (Katowice)

Introduction. Dans la présente note nous considérons un système parabolique d'équations du second ordre. Ensuite nous établissons la condition nécessaire et suffisante pour que tous les éléments de la matrice des solutions fondamentales de ce système soient non négatifs.

§ 1. Soient E_n l'espace euclidien à n dimensions des points $x = (x_1, \ldots, x_n)$; t la variable non négative et bornée $(0 \leqslant t \leqslant T < \infty)$ désignant le temps et

$$(1.1)\qquad \Psi^k(u^1, \ldots, u^N) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t, x)\, u^k_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_{ki}(t, x) u^k_{x_i} + \sum_{j=1}^{N} c_{kj}(t, x) u^j - u^k_t = 0$$

où $k = 1, \ldots, N$, $x \in E_n$, $0 < t \leqslant T$, $N > 1$, le système parabolique en question, enfin $u^1(t, x), \ldots, u^N(t, x), (t, x) \in (0, T] \times E_n$ les composantes de la solution $(u^1, \ldots, u^N)$.

Nos démonstrations seront basées sur le théorème suivant:

THÉORÈME 1.1. *Supposons que*

1° *Les coefficients du système* (1.1) *sont définis et bornés dans* $[0, T] \times E_n$;

2° $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t, x) \lambda_i \lambda_j \geqslant 0$ *pour tout système* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $k = 1, \ldots, N$;

3° $c_{ij}(t, x) \geqslant 0$ *pour* $(t, x) \in [0, T] \times E_n$ *et* $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, N)$;

4° *Les fonctions* $u^i(t, x)$, $i = 1, \ldots, N$, *sont continues et bornées dans* $[0, T] \times E_n$ *et possèdent des dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables* $(t, x_1, \ldots, x_n)$ *et du second ordre par rapport aux variables* $(x_1, \ldots, x_n)$ *continues dans* $(0, T] \times E_n$;

5° *Les inégalités*

$$\Psi^k(u^1, \ldots, u^N) \leqslant 0, \qquad k = 1, \ldots, N$$

sont remplies dans $(0, T] \times E_n$.

6° $u^k(0, x) \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, N$, *pour* $x \in E_n$.

Dans ces conditions les inégalités

$$u^k(t, x) \geqslant 0, \qquad k = 1, \dots, N$$

ont lieu dans $[0, T] \times E_n$.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général (voir le théorème II dans [1] ou le théorème 65.1 dans [6]).

§ 2. Sur le système (1.1) nous faisons les hypothèses suivantes:

I. *Les coefficients du système* (1.1) *sont bornés et continus dans* $[0, T] \times E_n$. *Ils sont höldériens par rapport à la variable spatiale x et les coefficients $a_{ij}^k(t, x)$ sont de plus höldériens par rapport au temps t.*

II. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t, x)\lambda_i\lambda_j \geqslant \delta|\lambda|^2$ *pour tout système* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $k = 1, \dots, N$, $\delta > 0$, $|k| = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$.

Soit $\{\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)\}$, $i, j = 1, \dots, N$, $t > \tau$ la matrice des solutions fondamentales du système (1.1) (voir [5]).

Théorème 2.1. *Si les hypothèses* I, II *et la condition* $c_{ki}(t, x) \geqslant 0$, *pour tout* $k \neq i$, *sont vérifiées on a*

$$\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \geqslant 0 \quad \textit{pour} \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Démonstration. Il suffit de considérer le problème de Cauchy

$$u^1(\tau, x) = 0, \quad \dots, \quad u^{i-1}(\tau, x) = 0, \quad u^i(\tau, x) = \varphi(x),$$
$$u^{i+1}(\tau, x) = 0, \quad \dots, \quad u^N(\tau, x) = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

où la fonction $\varphi(x)$ est continue, bornée et non négative.

La solution de ce problème prend la forme suivante

$$u^j(t, x) = \int \Gamma_{ji}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \qquad j = 1, \dots, N.$$

En vertu du théorème 1.1 nous avons

$$\int \Gamma_{ji}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi \geqslant 0,$$

donc $\Gamma_{ji}(t, x; \tau, \xi) \geqslant 0$, $i, j = 1, \dots, N$.

Nous démontrerons maintenant que si pour un système parabolique tous les éléments de la matrice des solutions fondamentales sont des fonctions non négatives, il doit être de la forme (1.1). Soit le système

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1,\dots,N}^{|l|=2} A_{ij}^{(l)}(t, x) \frac{\partial^{|l|} u^j}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} + \sum_{j=1,\dots,N}^{|l|=1} B_{ij}^{(l)}(t, x) \frac{\partial^{|l|} u^j}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} + \sum_{j=1,\dots,N} C_{ij}(t, x) u^j \tag{2.1}$$

où nous avons posé $l = (l_1, .., l_n)$, $|l| = l_1 + .. + l_n$, $l_i = 0, 1, 2$ pour $i = 1, ..., N$.

Les hypothèses sur les coefficients du système (2.1) sont les suivantes:

I'. *Les coefficients du système* (2.1) *sont continus et bornés dans* $[0, T] \times E_n$. *Ils sont höldériens par rapport à la variable spatiale x et les coefficients des dérivées du second ordre sont de plus höldériens par rapport à t.*

II'. *Le système* (2.1) *est parabolique au sens de I. Petrovsky.*

Si nous désignons par $\{\bar{\Gamma}_{ij}(t, x; \tau, \xi)\}$, $i, j = 1, ..., N$, $t > \tau$ la matrice des solutions fondamentales du système (2.1) (voir [5]), nous pouvons établir le théorème suivant:

THÉORÈME 2.2. *Si les hypothèses* I', II' *sont vérifiées et la condition* $\bar{\Gamma}_{ij}(t, x; \tau, \xi) \geqslant 0$ *est remplie pour* (t, x), $(\tau, \xi) \epsilon [0, T] \times E_n$, $t > \tau$, $i, j = 1, ..., N$ *on doit avoir*

$$C_{ij}(t, x) \geqslant 0 , \quad B_{ij}^{(l)}(t, x) \equiv 0 , \quad A_{ij}^{(l)}(t, x) \equiv 0$$

pour tout système $(l_1, .., l_n)$ *et pour* $i \neq j$.

Démonstration. Sous nos hypothèses les coefficients $C_{ij}(t, x)$ du système (2.1) doivent s'exprimer (voir [4], formule (5'.3)) par la formule:

$$C_{ij}(t, x) = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{t - \tau} \int \bar{\Gamma}_{ij}(t, x; \tau, \xi) d\xi , \quad i \neq j .$$

Nous en tirons donc $C_{ij}(t, x) \geqslant 0$ pour $i \neq j$. Nous démontrerons maintenant la seconde partie du présent théorème. Supposons que pour certaines (k) et $i \neq j$ fixés $A_{ij}^{(k)}(t, x) \not\equiv 0$ où $B_{ij}^{(k)}(t, x) \not\equiv 0$. En vertu du théorème 2.1 dans [2] la fonction $\bar{\Gamma}_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ doit changer de signe, ce qui est impossible en vertu de nos hypothèses.

Le corollaire suivant résulte des théorèmes 2.1 et 2.2:

COROLLAIRE 2.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que touts les éléments de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations du second ordre soient non négatifs, est que*

$$C_{ij}(t, x) \geqslant 0 , \quad B_{ij}^{(l)}(t, x) \equiv 0 , \quad A_{ij}^{(l)}(t, x) \equiv 0$$

pour tout système $(l_1, ..., l_n)$ *et pour* $i \neq j$ $(i, j = 1, ..., N)$, *les hypothèses* I' *et* II' *étant admises.*

Il résulte du théorème 2.1 une certaine limitation des éléments de la matrice des solutions fondamentales du système (1.1). Soit $\Gamma_k(t, x; \tau, \xi)$ la solution fondamentale de l'équation parabolique

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k}(t, x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_{ki}(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + c_{kk}(t, x) v .$$

THÉORÈME 2.3. *Supposons que les hypothèses* I *et* II *soient satisfaites et que* $c_{ki}(t, x) \geqslant 0$ *pour* $k \neq i$. *Dans ces hypothèses les inégalités* $\Gamma_k(t, x; \tau, \xi) \leqslant \Gamma_{kk}(t, x; \tau, \xi)$ $(k = 1, \ldots, N)$ *ont lieu pour* (t, x), $(\tau, \xi) \in [0, T] \times E_n$, $t > \tau$.

Démonstration. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue, non négative et bornée dans E_n. La fonction

$$r_k(t, x) = \int [\Gamma_{kk}(t, x; \tau, \xi) - \Gamma_k(t, x; \tau, \xi)]\varphi(\xi)d\xi$$

vérifie la condition initiale $r_k(\tau, x) = 0$ ainsi que l'équation

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k}(t, x)\frac{\partial^2 r_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_{ki}(t, x)\frac{r_k}{\partial x_i} + c_{kk}(t, x) r_k - \frac{\partial}{\partial t} r_k$$
$$= -\sum_{j \neq k} c_{kj}(t, x) \int \Gamma_{kj}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi \leqslant 0 .$$

Il résulte du théorème 1.1 que l'on a $r_k(t, x) \geqslant 0$ pour $(t, x) \in [0, T] \times E_n$, donc aussi $\Gamma_{kk}(t, x; \tau, \xi) \geqslant \Gamma_k(t, x; \tau, \xi)$.

COROLLAIRE 2.2. *Si les coefficients du système* (1.1) *satisfont aux hypothèses* I, II *et* $c_{ij}(t, x) \geqslant 0$ *pour* $i \neq j$ *alors* $\Gamma_{kk}(t, x; \tau, \xi) > 0$, $t > \tau$, $k = 1, \ldots, N$.

En effet, on a (voir [3]) $\Gamma_k(t, x; \tau, \xi) > 0$, $t > \tau$, d'oú il résulte en vertu du théorème 2.3 l'inégalité $\Gamma_{kk}(t, x; \tau, \xi) > 0$, $t > \tau$.

COROLLAIRE 2.3. *Si les coefficients du système* (1.1) *satisfont aux hypothèses du théorème* 2.1 *et* $c_{ij}(t, x) > 0$ *pour certains indices* $i \neq j$ *alors* $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) > 0$ *pour* $t > \tau$.

Démonstration. Admettons l'impossible, et supposons que pour un point (t_1, x_1, τ, ξ_1), $t_1 > \tau$ on ait $\Gamma_{ij}(t_1, x_1; \tau, \xi_1) = 0$. Donc la fonction $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ atteint un minimum en ce point et par conséquent, on a:

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\Gamma_{ij}(t_1, x_1; \tau, \xi_1) = 0 , \qquad s = 1, \ldots, n$$

et

$$\sum_{s,r=1}^{n} a_{sr}^{i}(t_1, x_1)\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_r}\Gamma_{ij}(t_1, x_1; \tau, \xi_1) \geqslant 0 , \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ij}(t_1, x_1; \tau, \xi_1) = 0 .$$

D'autre part nous avons

$$0 < \sum_{s,r=1}^{n} a_{sr}^{i}(t_1, x_1)\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_r}\Gamma_{ij}(t_1, x_1; \tau, \xi_1) + \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t_1, x_1)\frac{\partial}{\partial x_s}\Gamma_{ij}(t_1, x_1; \tau, \xi_1) +$$
$$+ c_{ii}(t_1, x_1)\Gamma_{ij}(t_1, x_1; \tau, \xi_1) - \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ij}(t_1, x_1; \tau, \xi_1)$$
$$= -\sum_{\substack{s \neq i \\ s \neq j}} c_{is}(t_1, x_1)\Gamma_{sj}(t_1, x_1; \tau, \xi_1) - c_{ij}(t_1, x_1)\Gamma_{jj}(t_1, x_1; \tau, \xi_1) \leqslant 0 ,$$

ce qui est impossible.

Travaux cités

[1] P. Besala, *On solution of Fourier's first problem for a system of nonlinear parabolic equations in an unbounded domain*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), p. 247-265.

[2] J. Chabrowski, *Bemerkungen über der Zeichen der Elementen der Matrix Gründlosungen für parabolische System von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Ann. Polon. Math. (sous presse).

[3] А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка параболическго типа*, Успехи Матем. Наук. 18 (3) (105) 1962, p. 3-146.

[4] H. Milicer-Grużewska, *Recherche sur les propriétés de la solution du système parabolique d'équations*, Mem. Accad. Sci. Torino, S. 3., T. 4, P. I 5 (1960), p. 257-280.

[5] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ricerche Mat. 7 (1958), p. 153-185.

[6] J. Szarski, *Differential inequalities*, Warszawa 1965.

Reçu par la Rédaction le 5. 5. 1966